บทที่ 2
ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานเฉพาะที่จำเป็น เพื่อนำไปใช้ในบทที่ 3 และบทที่ 4 โดยจะกล่าวถึงนิยาม ทฤษฎี และตัวอย่างพอสังเขป สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีในบทนี้จะไม่แสดงไว้

ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเซต หรือนิยามของคำศัพท์บางคำ เช่น เซตจำกัด (Finite Set) เซตอนันต์ (Infinite Set) คอมพลีเมนต์ (Complement) ยูเนียน (Union) อินเตอร์เซกชัน (Intersection) และขอบเขตล่างค่ามากสุด (Greatest Lower Bound) เป็นต้น ผู้เขียนไม่ได้ให้รายละเอียดไว้ แต่ผู้สนใจสามารถค้นคว้าได้จากตำราคณิตศาสตร์ทั่วไป

สัญลักษณ์ที่สำคัญที่ใช้ในงานวิจัยนี้ได้

$>$	หมายถึง	มากกว่า
$\in$	หมายถึง	เป็นสมาชิกของ
$=$	หมายถึง	การเท่ากัน
inf	หมายถึง	อินฟีมัม
R	หมายถึง	เซตของจำนวนจริงทั้งหมด
R^+	หมายถึง	เซตของจำนวนจริงบวกทั้งหมด
$\geq$	หมายถึง	มากกว่า หรือเท่ากับ
$<$	หมายถึง	น้อยกว่า
$\neq$	หมายถึง	ไม่เท่ากัน
(x_n)	หมายถึง	ลำดับ
N	หมายถึง	เซตของจำนวนธรรมชาติทั้งหมด
$\leq$	หมายถึง	น้อยกว่า หรือเท่ากับ
diam(E)	หมายถึง	เส้นผ่าศูนย์กลางของเซต E

$X \setminus A$ หมายถึงเซต $\{x / x \in X$ และ $x \notin A\}$

$\subseteq$ หมายถึง สับเซต

sup หมายถึง ซูพรีมัม

$[a, b]$ หมายถึง ช่วงปิด a, b

$\cap$ หมายถึงอินเตอร์เซคชัน

$\cup$ หมายถึง ยูเนียน

$\emptyset$ หมายถึง เซตว่าง

$f(E)$ หมายถึง อิมเมจของ E ภายใต้ f

R^n หมายถึง เซต $\{x_1, x_2, \ldots, x_n) / x_i \in R, i = 1, 2, \ldots, n\}$

2.1 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน (Relation and Function)

นิยาม 2.1.1 ให้ A และ B เป็นเซต 2 เซต ผลคูณคาร์ทีเซียน (The cartesian Product) ของ A กับ B จะแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \times B$ หมายถึง เซตของคู่ลำดับ (a, b) ทั้งหมด เมื่อ $a \in A$ และ $b \in B$ หรือใช้สัญลักษณ์สั้นๆ ดังนี้ $A \times B = \{(a, b) / a \in A$ และ $b \in B\}$

นิยาม 2.1.2 ความสัมพันธ์ r จากเซต X ไปยังเซต Y หมายถึงสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียนของ X กับ Y ในกรณีที่ $X = Y$ จะเรียกความสัมพันธ์ r ว่าเป็นความสัมพันธ์ในเซต X

นิยาม 2.1.3 ฟังก์ชัน หมายถึงความสัมพันธ์ ซึ่งคู่ลำดับสองคู่ลำดับใดๆ ที่ต่างกันในความสัมพันธ์ จะมีสมาชิกในพิกัดที่หนึ่งเหมือนกันไม่ได้

นั่นคือ ถ้าให้ f เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $(x, y), (x, z) \in f$ แล้วจะได้ $y = z$

<u>นิยาม</u> 2.1.4 เซตของพิกัดที่หนึ่งของคู่ลำดับทั้งหมดของฟังก์ชัน f เรียกว่า <u>โดเมน</u> (Domain) ของ f เขียนแทนด้วย D_f เซตของพิกัดที่สองของคู่ลำดับทั้งหมดของฟังก์ชัน f เรียกว่า <u>เรนจ์</u> (Range) ของ f เขียนแทนด้วย R_f

ใช้สัญลักษณ์ $f : A \longrightarrow B$ แทน f เป็นฟังก์ชันจากโดเมน A ไปยัง B

<u>นิยาม</u> 2.1.5 ให้ f, g เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f : A \longrightarrow B$ และ $g : B \longrightarrow C$ ให้ $h : A \longrightarrow C$ กำหนดโดย $h(x) = g(f(x))$ เมื่อ $x \in A$ เรียก h ว่า <u>คอมโพสิชัน</u> (Composition) ของ f และ g

ใช้สัญลักษณ์ gof แทน h จากการกำหนด gof นี้ ทำให้รู้ว่า ค่าฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นสมาชิกในโดเมน g และ $D_{gof} = D_f$ $R_{gof} \subseteq R_g$

<u>นิยาม</u> 2.1.6 ถ้าให้ฟังก์ชัน $f : A \longrightarrow B$ จะเรียก f เป็น<u>ฟังก์ชันออนทู</u> (Onto Function หรือ Surjection) ถ้า $R_f = B$ นั่นคือ สำหรับทุกๆ $y \in B$ จะมี $x \in A$ โดยที่ $y = f(x)$

<u>นิยาม</u> 2.1.7 ฟังก์ชัน f จะเรียกว่า เป็น<u>ฟังก์ชันเพิ่มอย่างแท้จริง</u> (Strictly Increasing Function) ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ สำหรับ $x_1 < x_2$ ที่อยู่ในโดเมนของ f

<u>นิยาม</u> 2.1.8 ให้ $S : N \longrightarrow X$ ซึ่ง $X \neq \emptyset$ โดยที่ $S(n) = x_n$ สำหรับทุก $n \in N$ เรียก $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ ว่าเป็น<u>ลำดับ</u> (Sequence) ใน X และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ (x_n)

<u>นิยาม</u> 2.1.9 ให้ (x_n) เป็นลำดับใน X และ (n_k) เป็นลำดับของจำนวนธรรมชาติ โดยที่ $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ จะเรียกลำดับ (x_{n_k}) ว่า <u>ลำดับย่อย</u> (Subsequence) ของ (x_n)

2.2 <u>เมตทริกสเปซ</u> (Metric Space)

<u>นิยาม</u> 2.2.1 ให้ X เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง จะเรียกฟังก์ชัน $d : X \times X \longrightarrow R$ ว่า เป็น<u>ฟังก์ชันระยะทาง</u> (Distance Function) หรือ <u>เมต ริก</u> (Metric) บนเซต X ถ้า d มีคุณสมบัติต่อไปนี้ สำหรับสมาชิก x, y, z ใดๆ ของ X จะได้ว่า

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
4. $d(x, y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

<u>นิยาม</u> 2.2.2 จะเรียกเซต X พร้อมด้วยเมต ริก d ว่าเป็น <u>เมต ริกสเปซ</u> (Metric Space) ซึ่งจะใช้แทนด้วยสัญลักษณ์ (X, d)

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ $X = R$, $d_u : R \times R \longrightarrow R$ โดยนิยามดังนี้

$d(x, y) = |x - y|$ สำหรับสมาชิก x , y ใดๆ ของ R

จะได้ว่า (R, d_u) เป็นเมต ริกสเปซ และจะเรียก d_u ว่า เป็นเมต ริกปกติ (Usual Metric)

[0, 1] ในที่นี้ให้หมายถึง เมต ริกสเปซ ([0, 1] , d_u)

<u>นิยาม</u> 2.2.3 ให้ (X, d) เป็นเมต ริกสเปซ ให้ $p \in X$ และ $\varepsilon \in R^+$ จะเรียกเซต $B(p, \varepsilon) = \{x \in X / d(x, p) < \varepsilon\}$ ว่าเป็น <u>บอลล์เปิด</u> (Open Ball) ซึ่งมีศูนย์กลางที่ p และรัศมี ε

<u>นิยาม</u> 2.2.4 ให้ (X, d) เป็นเมตริกสเปซ และ A เป็นสับเซตที่ไม่ว่างของ X สำหรับ $p \in X$ จะนิยาม<u>ระยะทางระหว่าง p กับ A</u> เป็น $d(p, A) = \inf\{d(x, p) / x \in A\}$ จะใช้สัญลักษณ์ $d(x)$ แทน $d(x, X \setminus \{x\})$

<u>นิยาม</u> 2.2.5 ให้ (X, d) เป็นเมตริกสเปซ และ $A \subseteq X$ จะเรียก A ว่าเป็น <u>เซตเปิด</u> (Open Set) ถ้าแต่ละ $x \in A$ จะมี $\varepsilon_x > 0$ ซึ่งทำให้ $B(x, \varepsilon_x) \subseteq A$ และเรียก A ว่า เซต<u>ปิด</u> (Closed Set) ถ้า $X \setminus A$ เป็นเซตเปิด

<u>หมายเหตุ</u> ถ้า (X, d) เป็นเมตริกสเปซ $A \subseteq Y$ โดยที่ A มีสมาชิกเพียงตัวเดียว แล้วจะได้ว่า A เป็นเซตปิด

<u>นิยาม</u> 2.2.6 ให้ (X, d) เป็นเมตริกสเปซ จะเรียกสับเซต W ของ X ว่าเป็น<u>เนเบอร์ฮูด</u> (Neighborhood) ของ $x \in X$ ถ้ามีเซตเปิด G ซึ่ง $x \in G \subseteq W$ และใช้สัญลักษณ์ $\eta(x)$ หมายถึงเซตของเนเบอร์ฮูดทั้งหมดของ x

<u>นิยาม</u> 2.2.7 ให้ (X, d) เป็นเมตริกสเปซ และ $A \subseteq X$, $x \in X$ จะเรียก x ว่าเป็น <u>จุดลิมิต</u> (Limit point) ของ A ถ้า $d(x, A \setminus \{x\}) = 0$ และจะใช้สัญลักษณ์ A' แทนเซตของจุดลิมิตทั้งหมดของ A

<u>ทฤษฎี</u> 2.2.8 ให้ (X, d) เป็นเมตริกสเปซ $A \subseteq X$, $p \in X$ จะเรียก p ว่าเป็นจุดลิมิตของ A ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ $W \in n(p)$ จะได้ว่า

$W \cap (A \setminus \{p\}) \neq \emptyset$

<u>พิสูจน์</u> [12] หน้า 50

<u>ทฤษฎี</u> 2.2.9 ให้ (X, d) เป็นเมตริกสเปซ และ $A \subseteq X$, A เป็นเซตปิด ก็ต่อเมื่อ $A' \subseteq A$

<u>พิสูจน์</u> [1] หน้า 13

<u>นิยาม</u> 2.2.10 ให้ (X, d) เป็นเมตริกสเปซ และ $A \subseteq X$ <u>เส้นผ่าศูนย์กลาง</u> (Diameter) ของ A ใช้สัญลักษณ์ diam (A) หมายถึง

$$\mathrm{diam}(A) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } A = \emptyset \\ \sup\{d(x, y)/x, y \in A\} & \text{ถ้า } \sup\{d(x,y)/ x, y \in A\} \text{ หาค่าได้} \\ \infty & \text{ถ้า } \sup\{d(x,y)/x, y \in A\} \text{ หาค่าไม่ได้} \end{cases}$$

<u>นิยาม</u> 2.2.11 ให้ (x_n) เป็นลำดับในเมตริกสเปซ (X, d), $l \in X$ จะกล่าวว่า (x_n) <u>ลู่เข้า</u>(Converge) สู่ l หรือ (x_n) เป็น<u>ลำดับลู่เข้า</u> (Convergent Sequence) ถ้าแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $n_o \in N$ ซึ่งทำให้ $d(x_n, l) < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geq n_o$

<u>ทฤษฎี</u> 2.2.12 ถ้า (x_n) เป็นลำดับในเมตริกสเปซ (X, d) โดยที่ (x_n) ลู่เข้าสู่ l และ m แล้ว $l = m$

<u>พิสูจน์</u> [2] หน้า 7

(จะใช้สัญลักษณ์ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = l$ แทน (x_n) เป็นลำดับลู่เข้าสู่ l)

2.3 <u>ฟังก์ชันต่อเนื่อง</u> (Continuous Function)

<u>นิยาม</u> 2.3.1 จะเรียกฟังก์ชัน $f : (X, d) \to (Y, d')$ ว่าเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x_o \in X$ ถ้าแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ โดยที่ ถ้า $y \in X$ และ $d(x_o, y) < \delta$ แล้ว $d'(f(x_o), f(y)) < \varepsilon$

จะเรียก f ว่า เป็นฟังก์<u>ชันต่อเนื่อง</u> (Continuous Function) บน X ถ้า f ต่อเนื่องที่ทุกจุดใน X

<u>นิยาม</u> 2.3.2 จะเรียกฟังก์ชัน $f : (X, d) \dashrightarrow (Y, d')$ ว่าเป็น<u>ฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเสมอต้นเสมอปลาย</u> (Uniformly Continuous) บน X ถ้าแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ โดยที่ ถ้า $x, y \in X$ และ $d(x, y) < \delta$ แล้ว $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$

<u>ทฤษฎี</u> 2.3.3 ถ้าฟังก์ชัน $f : (X, d) \dashrightarrow (Y, d')$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x_o \in X$ และฟังก์ชัน $g : (Y, d') \dashrightarrow (Z, d'')$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $f(x_o)$ แล้ว gof ต่อเนื่องที่ x_o

<u>พิสูจน์</u> [1] หน้า 18

2.4 <u>โทโพโลจิคัลสเปซ และสับสเปซ</u> (Topological Space and Subspace)

<u>นิยาม</u> 2.4.1 ให้ X เป็นเซต และ $\mathcal{T}$ เป็นเซตของสับเซตของ X จะเรียก $\mathcal{T}$ ว่าเป็น <u>โทโพโลยี</u> (Topology) สำหรับ X ถ้า $\mathcal{T}$ มีคุณสมบัติ

1. $X, \emptyset \in \mathcal{T}$
2. ถ้า $A, B \in \mathcal{T}$ แล้ว $A \cap B \in \mathcal{T}$
3. ถ้า $A_\alpha \in \mathcal{T}$ สำหรับทุก $\alpha \in \lambda$ แล้ว $\bigcup_{\alpha \in \lambda} A_\alpha \in \mathcal{T}$

และเรียกสมาชิกใน $\mathcal{T}$ ว่า <u>เซตเปิด</u> (Open Set)

<u>นิยาม</u> 2.4.2 ให้ $\mathcal{T}$ เป็นโทโพโลยี สำหรับ X จะเรียกคู่ลำดับ $(X, \mathcal{T})$ ว่า <u>โทโพโลจิคัลสเปซ</u> (Topological Space)

<u>นิยาม</u> 2.4.3 ให้ (X, d) เป็นเมตริกสเปซ และ

$$\mathcal{T}_d = \{G \subseteq X / G \text{ เป็นเซตเปิดของ } X\}$$

จะได้ว่า $\mathcal{T}_d$ เป็นโทโพโลยีสำหรับ X เรียก $(X, \mathcal{T}_d)$ ว่า <u>เป็นโทโพโลจิคัลสเปซที่ถูกกำหนดโดยเมตริก d</u> และใช้สัญลักษณ์ $\mathcal{T}_u$ แทน $\mathcal{T}_{d_u}$

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.4 ให้ $(X, \mathcal{T})$ เป็นโทโพโลจิคัลสเปซ และ $Y \subseteq X$ จะได้ว่า
$$\mathcal{T}_Y = \{U \subseteq Y / U = G \cap Y \text{ สำหรับบาง } G \in \mathcal{T}\}$$
เป็นโทโพโลยีสำหรับ Y

<u>พิสูจน์</u> [1] หน้า 20

<u>นิยาม</u> 2.4.5 ให้ $(X, \mathcal{T})$ เป็นโทโพโลจิคัลสเปซ และ $Y \subseteq X$ จะเรียก $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ว่าเป็น <u>สับสเปซ</u> (Subspace) ของ $(X, \mathcal{T})$

<u>นิยาม</u> 2.4.6 ให้ $(X, \mathcal{T})$ เป็นโทโพโลจิคัลสเปซ ถ้ามีเมตริก d สำหรับ X ซึ่ง $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$ แล้วจะเรียก $(X, \mathcal{T})$ ว่า <u>เมตไทรเซเบิลสเปซ</u> (Metrizable Space)

<u>นิยาม</u> 2.4.7 ให้ A เป็นสับเซตของโทโพโลจิคัลสเปซ $(X, \mathcal{T})$ <u>โคลสเชอร์</u> (Closure) ของ A หมายถึงเซต $\{x \in X / W \cap A \neq \emptyset$ และ $W \in n(x)\}$ และจะเขียนแทนด้วย $\bar{A}$

<u>นิยาม</u> 2.4.8 ให้ $(X, \mathcal{T})$ เป็นโทโพโลจิคัลสเปซ และ $A \subseteq X$ จะเรียก A ว่า <u>เดนซ์</u> (Dense) ใน X ถ้า $\bar{A} = X$

<u>นิยาม</u> 2.4.9 ให้ $(X, \mathcal{T})$ เป็นโทโพโลจิคัลสเปซ จะเรียก $(X, \mathcal{T})$ ว่าเป็น <u>นอร์มัลสเปซ</u> (Normal Space) ถ้าทุกๆ เซตปิด F_1, F_2 ซึ่ง $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ จะมีเซตเปิด U_{F_1}, U_{F_2} โดยที่ $F_1 \subseteq U_{F_1}$, $F_2 \subseteq U_{F_2}$ และ $U_{F_1} \cap U_{F_2} = \emptyset$

ทฤษฎี 2.4.10 ทุกเมตริกสเปซเป็นนอร์มัลสเปซ

พิสูจน์ [3] หน้า 43

ทฤษฎี 2.4.11 ให้ $(X, \mathcal{T})$ เป็นนอร์มัลสเปซ และ A , B เป็นสับเซตปิดของ X โดยที่ $A \cap B = \emptyset$ แล้ว จะมีฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : X \longrightarrow [0, 1]$ โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x \in A \\ 1 & \text{เมื่อ } x \in B \end{cases}$$

พิสูจน์ [3] หน้า 44

2.5 การเป็นคอมแพค (Compactness)

นิยาม 2.5.1 ให้ $(X, \mathcal{T})$ เป็นโทโพโลจิคัลสเปซ และ $\mathcal{V} = \{V_\alpha / \alpha \in \lambda\}$ เป็นเซตของสับเซตของ X

$\mathcal{V}$ จะเป็นคัฟเวอร์ (Cover) ของ X ถ้า $\bigcup_{\alpha \in \lambda} V_\alpha = X$

และถ้าทุกสมาชิกของ $\mathcal{V}$ เป็นเซตเปิดแล้ว จะเรียก $\mathcal{V}$ ว่าเป็นคัฟเวอร์เปิด (Open Cover) ของ X

นิยาม 2.5.2 ให้ $(X, \mathcal{T})$ เป็นโทโพโลจิคัลสเปซ และ $\mathcal{V}$ เป็นคัฟเวอร์ของ X จะเรียกสับเซต $\mathcal{U}$ ของ $\mathcal{V}$ ว่าเป็นสับคัฟเวอร์ (Subcover) ของ $\mathcal{V}$ ถ้า $\mathcal{U}$ เป็นคัฟเวอร์ของ X

นิยาม 2.5.3 ให้ $(X, \mathcal{T})$ เป็นโทโพโลจิคัลสเปซ จะเรียก X ว่าเป็นคอมแพคสเปซ (Compact Space) ถ้าทุกคัฟเวอร์เปิดของ X มีสับคัฟเวอร์ซึ่งเป็นเซตจำกัด

<u>ทฤษฎี</u> 2.5.4 ให้ (X, d) เป็นเมตริกสเปซ ; (X, d) เป็นคอมแพคเมตริกสเปซ ก็ต่อเมื่อ ทุกลำดับใน X มีลำดับย่อยที่เป็นลำดับลู่เข้า

<u>พิสูจน์</u> [1] หน้า 26

<u>นิยาม</u> 2.5.5 ให้ (X, d) เป็นเมตริกสเปซ และ $\mathcal{V}$ เป็นคัฟเวอร์ของสับเซต A ของ X จะเรียกจำนวนจริง $\delta > 0$ ว่าเป็น <u>จำนวนเลเบก</u>(Lebesque Number) สำหรับ $\mathcal{V}$ ถ้าทุกสับเซต B ของ A ซึ่ง $\mathrm{diam}(B) < \delta$ จะมี $V \in \mathcal{V}$ ซึ่ง $B \subseteq V$

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ $(R, \mathcal{T}_u)$ เป็นโทโพโลจิคัลสเปซ $\mathcal{V} = \{(-n, n)/ n \in N\}$ เป็นคัฟเวอร์ของ R จะได้ว่า จำนวนจริงบวกทุกจำนวนเป็นจำนวนเลเบก สำหรับ $\mathcal{V}$

<u>ทฤษฎี</u> 2.5.6 ให้ (X, d) เป็นคอมแพคเมตริกสเปซ และ $\mathcal{V} = \{G_\alpha / \alpha \in \lambda\}$ เป็นคัฟเวอร์เปิดของ X แล้ว จะมีจำนวนเลเบกสำหรับ $\mathcal{V}$

<u>พิสูจน์</u> [11] หน้า 163

<u>ทฤษฎี</u> 2.5.7 ให้ $f : (X, \mathcal{T}_X) \dashrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน X ถ้า $(X, \mathcal{T}_X)$ เป็นคอมแพคสเปซ แล้ว $f(X)$ เป็นคอมแพคสับสเปซของ $(Y, \mathcal{T}_Y)$

2.6 <u>การเป็นคอนเนค</u> (Connectedness)

<u>นิยาม</u> 2.6.1 ให้ $(X, \mathcal{T})$ เป็นโทโพโลจิคัลสเปซ และเรียก $(X, \mathcal{T})$ ว่าเป็น <u>คอนเนคเตคสเปซ</u> (Connected Space) ถ้า $X \neq G_1 \cup G_2$ สำหรับทุก $G_1, G_2 \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ และ $G_1 \cap G_2 = \emptyset$

ถ้า $A \subseteq X$ จะเรียก A ว่า <u>คอนเนค</u> (Connected)
ถ้าสับสเปซ $(A, \mathcal{T}_A)$ เป็นคอนเนคเตดสเปซ

<u>ทฤษฎี</u> 2.6.2 $(X, \mathcal{T})$ เป็นคอนเนคเตดสเปซ ก็ต่อเมื่อสับเซตของ X ที่เป็นทั้งเซตเปิดและปิดมีเพียง ϕ และ X

<u>หมายเหตุ</u> สับเซต A ของ R คอนเนคก็ต่อเมื่อ A เป็นช่วง (Interval)

<u>พิสูจน์</u> [3] หน้า 29

<u>ทฤษฎี</u> 2.6.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก $(X, \mathcal{T}_X)$ ไปยัง $(Y, \mathcal{T}_Y)$
ถ้า $(X, \mathcal{T}_X)$ เป็นคอนเนคเตดสเปซ แล้ว $f(X)$ เป็นคอนเนคเตดสับสเปซของ $(Y, \mathcal{T}_Y)$

<u>พิสูจน์</u> [3] หน้า 29

<u>นิยาม</u> 2.6.4 ให้ x เป็นสมาชิกในโทโพโลจิคัลสเปซ $(X, \mathcal{T})$
<u>เนเบอร์ฮูดเบสของ x</u> (Neignborhood Base at x)
จะหมายถึงเซต $\mathcal{B}(x) \subseteq \eta(x)$ และสำหรับทุก $N \in \eta(x)$
จะมี $B \in \mathcal{B}(x)$ ซึ่ง $B \subseteq N$

<u>นิยาม</u> 2.6.5 ให้ $(X, \mathcal{T})$ เป็นโทโพโลจิคัลสเปซ จะเรียก $(X, \mathcal{T})$ ว่าเป็น
<u>โลคัลลี่คอนเนค</u> (Locally Connected)
ถ้าแต่ละ $x \in X$ จะมีเนเบอร์ฮูดเบส $\mathcal{B}(x)$ ของ x
โดยที่แต่ละ $B \in \mathcal{B}(x)$ จะได้ว่า B เป็นคอนเนค

<u>ตัวอย่าง</u> $(R, \mathcal{T}_u)$ เป็นโลคัลลี่คอนเนค เพราะว่าแต่ละ $x \in R$
มี $\{B(x, \frac{1}{n}) / n \in N\}$ เป็นเนเบอร์ฮูดเบสของ x และ
$B(x, \frac{1}{n})$ เป็นคอนเนค สำหรับทุก $n \in N$

<u>นิยาม</u> 2.6.6 ให้ $(X, \mathcal{T})$ เป็นโทโพโลจิคัลสเปซ จะเรียก $(X, \mathcal{T})$ ว่า เป็น <u>อาร์กไวซ์คอนเนคเตดสเปซ</u> (Arcwise Connected Space) ถ้าแต่ละ $a, b \in X$ จะมีฟังก์ชันต่อเนื่อง

$$f : [0, 1] \longrightarrow X \quad \text{โดยที่} \quad f(0) = a, \; f(1) = b$$

<u>ตัวอย่าง</u> $(R, \mathcal{T}_u)$ เป็นอาร์กไวซ์คอนเนคเตดสเปซ

<u>ทฤษฎี</u> 2.6.7 ใน R^n กำหนด $d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}$ สำหรับแต่ละ $x, y \in R^n$ โดยที่ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ และ $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ จะได้ว่า (R^n, d) เป็นอาร์กไวซ์คอนเนคเตดสเปซ

<u>พิสูจน์</u> [7] หน้า 99

2.7 <u>เปียโนสเปซ</u> (Peano Space)

<u>นิยาม</u> 2.7.1 ให้ $(X, \mathcal{T})$ เป็นโทโพโลจิคัลสเปซ จะเรียก $(X, \mathcal{T})$ ว่าเป็น <u>เฮาส์ดอร์ฟสเปซ</u> (Hausdorff Space) ถ้าแต่ละ $x, y \in X$ โดยที่ $x \neq y$ จะมีเนเบอร์ฮูด U ของ x, V ของ y ซึ่ง $U \cap V = \emptyset$

<u>ตัวอย่าง</u> ทุกเมตริกสเปซเป็นเฮาส์ดอร์ฟสเปซ

<u>นิยาม</u> 2.7.2 ให้ $(X, \mathcal{T})$ เป็นเฮาส์ดอร์ฟสเปซ จะเรียก $(X, \mathcal{T})$ ว่าเป็น <u>เปียโนสเปซ</u> (Peano Space) ถ้ามีฟังก์ชันต่อเนื่องจาก $[0, 1]$ ออนทู $(X, \mathcal{T})$

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ $X = [2, 4]$ จะได้ว่า (X, d_u) เป็นเปียโนสเปซ เพราะมีฟังก์ชัน $f : [0, 1] \longrightarrow [2, 4]$ กำหนดโดย $f(x) = 2 + 2x$ จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และเป็นออนทูฟังก์ชัน

<u>ทฤษฎี</u> 2.7.3 $(X, \mathcal{T})$ เป็นเปียโนสเปซ ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขทั้ง 5 ข้อ ต่อไปนี้เป็นจริง

1. $X \neq \emptyset$
2. $(X, \mathcal{T})$ เป็นคอมแพคสเปซ
3. $(X, \mathcal{T})$ เป็นคอนเนคเตคสเปซ
4. $(X, \mathcal{T})$ เป็นโลคัลลี่คอนเนค
5. $(X, \mathcal{T})$ เป็นเมตไทรเซเบิลสเปซ

<u>พิสูจน์</u> [8] หน้า 204

<u>ทฤษฎี</u> 2.7.4 ถ้า $(X, \mathcal{T})$ เป็นเปียโนสเปซ และ $a, b \in X$ โดยที่ $a \neq b$ แล้วจะมีฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : [0, 1] \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ โดยที่ $f(0) = a$, $f(1) = b$

<u>พิสูจน์</u> [8] หน้า 206