บทที่ 4

ทฤษฎีของ Hermann Hueber กับ [0, 1] continuous metric space

ในบทนี้เป็นการขยายทฤษฎีของ Hermann Hueber ซึ่งกล่าวว่า

(X, d) เป็นคอมแพคเมตริกสเปซก็ต่อเมื่อเงื่อนไขทั้งสองข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1. ทุกฟังก์ชันต่อเนื่อง $f: X \longrightarrow R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเสมอต้นเสมอปลาย
2. แต่ละ $\varepsilon > 0$, $\{x \in X / d(x) > \varepsilon\}$ เป็นเซตจำกัด

จะเห็นได้ว่าทฤษฎีดังกล่าว f เป็นฟังก์ชันจากเมตริกสเปซใดๆ ไปยัง R แต่เมื่อเราแทน R ด้วยเมตริกสเปซอื่น ผลสรุปของทฤษฎีดังกล่าวจะไม่จริงเสมอไป ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ให้ $A = \{1, 2\}$ และให้ $d : A \times A \longrightarrow R$

กำหนดโดย $d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$

จะเห็นได้ว่า (A, d) เป็นเมตริกสเปซ

เมื่อเราแทน R ด้วย (A, d) จะทำให้ผลสรุปของทฤษฎีดังกล่าวไม่เป็นจริง

เพราะว่า ถ้าเราให้ $X = (0, 1)$ จะได้ว่า (X, d_u) เป็นเมตริกสเปซ ต่อไปจะแสดงว่า (X, d_u) มีคุณสมบัติครบทั้ง 2 ข้อ ในทฤษฎีของ Hermann Hueber

1. ทุกฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : X \longrightarrow A$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเสมอต้นเสมอปลาย

<u>พิสูจน์</u> ให้ $f : (0, 1) \longrightarrow \{1, 2\}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเสมอต้นเสมอปลาย โดยจะแสดงว่า เรนจ์ของ f มีสมาชิกเพียงตัวเดียว ก็จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเสมอต้นเสมอปลาย

สมมุติว่าเรนจ์ของ f มีสมาชิก 2 ตัว คือ 1 กับ 2
จะแสดงว่า $f(X)$ ไม่คอนเนค
พิจารณา $(-\infty, 1.5) \cap f(X) \neq \emptyset$ (มี 1 เป็นสมาชิก)
และ $(1.5, \infty) \cap f(X) \neq \emptyset$ (มี 2 เป็นสมาชิก)
$((-\infty, 1.5) \cap f(X)) \cap ((1.5, \infty) \cap f(X)) = \emptyset$
$((-\infty, 1.5) \cap f(X)) \cup ((1.5, \infty) \cap f(X)) = f(X)$
$(-\infty, 1.5) \cap f(X)$, $(1.5, \infty) \cap f(X)$ เป็นเซตเปิดใน $f(X)$
เพราะฉะนั้น $f(X)$ ไม่คอนเนค ขัดแย้ง เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $(0, 1)$ คอนเนค จะได้ $f(X)$ คอนเนคโดยทฤษฎี 2.6.3
ดังนั้น ข้อ 1. ของทฤษฎีจึงเป็นจริง

2. แต่ละ $\varepsilon > 0$, $\{x \in X / d(x) > \varepsilon\}$ เป็นเซตจำกัด
แต่ (X, d_u) ไม่เป็นคอมแพคเมต ริกสเปซ

เพราะว่า $\{(\frac{1}{n}, 1) / n \in N\}$ เป็นคัฟเวอร์เปิดของ $(0, 1)$ แต่ไม่มี

สับคัฟเวอร์ที่เป็นเซตจำกัด

นั่นคือเมื่อแทน R ด้วย (A, d) แล้ว ผลสรุปของทฤษฎีดังกล่าวไม่จริง

ดังนั้นจุดประสงค์ที่สำคัญของบทนี้ก็คือ ต้องการหาคุณสมบัติของเมต ริกสเปซ ที่จะนำมาแทน R แล้วยังคงทำให้ผลสรุปของทฤษฎีดังกล่าวเป็นจริง โดยจะแบ่งเนื้อหาในบทนี้เป็น 4 หัวข้อดังนี้คือ

หัวข้อ 4.1 เป็นการให้นิยามของ [0, 1] continuous metric space และพิสูจน์ว่า เมื่อแทน R ด้วยเมตริกสเปซดังกล่าวแล้ว ผลสรุปทฤษฎีของ Hermann Hueber ยังคงเป็นจริง

หัวข้อ 4.2 เป็นการเปรียบเทียบคุณสมบัติของ [0, 1] continuous metric space กับคุณสมบัติอื่นๆ ของเมตริกสเปซ เพื่อช่วยในการตรวจสอบว่าเมตริกสเปซใดบ้าง เป็น [0, 1] continuous metric space

หัวข้อ 4.3 เป็นการขยายทฤษฎีบางทฤษฎีไปถึง [0, 1] continuous metric space

หัวข้อ 4.4 เป็นการหาเงื่อนไขอื่นที่นำไปแทนในทฤษฎีของ Hermann Hueber แล้วยังคงทำให้ผลสรุปของทฤษฎีดังกล่าวเป็นจริง

4.1 <u>[0, 1] continuous metric space</u>

<u>นิยาม</u> 4.1.1 จะเรียก (X, d) ว่าเป็น <u>[0, 1] continuous metric space</u> ถ้ามีฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : [0, 1] \dashrightarrow X$ โดยที่ $f(0) \neq f(1)$

<u>ตัวอย่าง</u> (R, d_u) เป็น [0, 1] continuous metric space

เพราะว่ามีฟังก์ชัน $f : [0, 1] \dashrightarrow R$

กำหนดโดย $f(x) = x$ เมื่อ $x \in [0, 1]$

จะเห็นได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $f(0) \neq f(1)$

<u>ทฤษฎี</u> 4.1.1 ถ้า (Y, d') เป็น [0, 1] continuous metric space, (X, d) เป็นเมตริกสเปซ และทุกฟังก์ชันต่อเนื่อง

$f : (X, d) \dashrightarrow (Y, d')$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเสมอต้นเสมอปลาย

แล้ว ทุกลำดับ (x_n) ใน X โดยที่ $\lim_{n \to \infty} d(x_n) = 0$

จะมีลำดับย่อยที่เป็นลำดับลู่เข้า

<u>พิสูจน์</u> สมมุติว่ามีลำดับ (x_n) ใน X โดยที่ $\lim_{n\to\infty} d(x_n) = 0$ แต่ไม่มีลำดับย่อยที่เป็นลำดับลู่เข้า

โดยทฤษฎี 3.1 จึงได้ว่ามีลำดับ (y_n) ใน X โดยที่ $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ และ $y_n \neq x_n$ สำหรับทุก $n \in N$

ต่อไปจะแสดงว่า (y_n) ไม่มีลำดับย่อยที่เป็นลำดับลู่เข้า สมมุติว่ามี ให้ (y_{n_k}) เป็นลำดับย่อยที่เป็นลำดับลู่เข้าของ (y_n) โดยทฤษฎี 3.2 ได้ว่า (x_{n_k}) เป็นลำดับย่อยที่เป็นลำดับลู่เข้าของ (x_n) ขัดแย้งกับที่สมมุติ

ดังนั้น (x_n) และ (y_n) ต่างก็ไม่มีลำดับย่อยที่เป็นลำดับลู่เข้า แสดงว่า (x_n) และ (y_n) ต่างก็ไม่มีจุดใดเลยที่ซ้ำกันเป็นจำนวนอนันต์

โดยทฤษฎี 3.3 ได้ว่ามีลำดับเพิ่มขึ้นอย่างแท้จริง (n_k) ใน N โดยที่ ถ้า $P = \{x_{n_k} / k \in N\}$, $M = \{y_{n_k} / k \in N\}$ แล้ว $P \cap M = \emptyset$

จาก (x_{n_k}) และ (y_{n_k}) ไม่มีลำดับย่อยที่เป็นเป็นลำดับลู่เข้า

โดยทฤษฎี 3.5 จึงได้ว่า P และ M ไม่มีจุดลิมิต จึงมีผลทำให้ P และ M เป็นเซตปิด

โดยทฤษฎี 2.4.10 ได้ว่ามีฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : X \to [0, 1]$ โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x \in P \\ 1 & \text{เมื่อ } x \in M \end{cases}$$

แต่ (Y, d') เป็น $[0, 1]$ continuous metric space

ดังนั้นจึงได้ว่ามีฟังก์ชันต่อเนื่อง $g : [0, 1] \dashrightarrow Y$

โดยที่ $g(0) \neq g(1)$

ให้ $g(0) = a$, $g(1) = b$ สำหรับบาง $a, b \in Y$

ดังนั้น $a \neq b$

ให้ $h = gof$

ดังนั้นได้ฟังก์ชันต่อเนื่อง $h : X \dashrightarrow Y$ โดยที่

$$h(x) = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } x \in P \\ b & \text{เมื่อ } x \in M \end{cases}$$

โดยทฤษฎี 3.6 จึงได้ว่า h ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเสมอต้นเสมอปลาย ทั้งนี้เพราะว่า

$$\lim_{k \dashrightarrow \infty} d(x_{n_k}, y_{n_k}) = 0$$

แต่ $$\lim_{k \dashrightarrow \infty} d'(h(x_{n_k}), h(y_{n_k})) = d'(a, b) \neq 0$$

ดังนั้นทฤษฎีจึงเป็นจริง ⌑

<u>ทฤษฎี</u> 4.1.2 ให้ (Y, d') เป็น $[0, 1]$ continuous metric space (X, d) เป็นเมตริกสเปซ (X, d) เป็นคอมแพคเมตริกสเปซ ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขทั้งสองข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1. ทุกฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : X \dashrightarrow Y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเสมอต้นเสมอปลาย
2. แต่ละ $\varepsilon > 0$, $\{x \in X / d(x) > \varepsilon\}$ เป็นเซตจำกัด

พิสูจน์ ให้ (X, d) เป็นคอมแพคเมตริกสเปซ

การแสดงว่า

1. ทุกฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : X \dashrightarrow Y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเสมอต้นเสมอปลาย

2. แต่ละ $\varepsilon > 0$, $\{x \in X / d(x) > \varepsilon\}$ เป็นเซตจำกัด

เหมือนการพิสูจน์ทฤษฎี 3.8 ในบทที่ 3

ให้เงื่อนไขข้อ 1 และข้อ 2 เป็นจริง จะพิสูจน์ว่า (X, d) เป็นคอมแพคเมตริกสเปซ

ให้ (x_n) เป็นลำดับใน X

ต้องการแสดงว่า (x_n) มีลำดับย่อยที่เป็นลำดับลู่เข้า

กรณีที่ 1 ถ้ามีจุด x_n ใน (x_n) ซึ่งซ้ำกันเป็นจำนวนอนันต์

จะได้ว่า (x_n) มีลำดับย่อยที่เป็นลำดับลู่เข้า

กรณีที่ 2 ถ้า (x_n) ไม่มีจุด x_n ใดเลยที่ซ้ำกันเป็นจำนวนอนันต์

ให้ $\varepsilon > 0$

จาก (2) จะได้ว่า $\{x \in X / d(x) > \frac{\varepsilon}{2}\}$ $(= K)$ เป็นเซตจำกัด

ดังนั้นจุด x_n ใน (x_n) โดยที่ $d(x_n) > \frac{\varepsilon}{2}$ จึงมีจำนวนจำกัดด้วย

ให้เป็น $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_m}$ ถ้า $K \neq \emptyset$

$$ให้ \quad n_o = \begin{cases} 1 + \max\{n_i / i = 1,2, \ldots, m\} & ถ้า\ K \neq \emptyset \\ 1 & ถ้า\ K = \emptyset \end{cases}$$

จะได้ว่า $d(x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ สำหรับ $n \geq n_o$

ดังนั้น $\lim_{n \to \infty} d(x_n) = 0$

โดยทฤษฎี 4.1.1 จึงได้ว่า (x_n) มีลำดับย่อยที่เป็นลำดับลู่เข้า และโดยทฤษฎี 2.5.4 จึงได้ว่า (X, d) เป็นคอมแพคเมต ริกสเปซ ⊢

4.2 ทฤษฎีเกี่ยวกับ [0, 1] continuous metric space

จุดมุ่งหมายในการศึกษาหัวข้อนี้ก็เพื่อจะเปรียบเทียบคุณสมบัติของ [0, 1] continuous metric space กับ คุณสมบัติอื่นๆ ของเมต ริกสเปซ เพื่อช่วยในการตรวจสอบว่าเมต ริกสเปซใดบ้างเป็น [0, 1] continuous metric space

ทฤษฎี 4.2.1 ถ้า (X, d) เป็นเปียโนสเปซที่มีสมาชิกมากกว่าหนึ่งตัว แล้ว (X, d) เป็น [0, 1] continuous metric space

พิสูจน์ เป็นผลมาจากทฤษฎี 2.7.4

ทฤษฎี 4.2.2 ถ้า (X, d) เป็นอาร์กไวซ์คอนเนคเตดสเปซที่มีสมาชิกมากกว่าหนึ่งตัว แล้ว (X, d) เป็น [0, 1] continuous metric space

พิสูจน์ เป็นผลมาจากนิยาม 2.6.6

ทฤษฎี 4.2.3 ถ้า (X, d) มีสับสเปซเป็นเปียโนสเปซที่มีสมาชิกมากกว่าหนึ่งตัว แล้ว (X, d) เป็น [0, 1] continuous metric space

พิสูจน์ เป็นผลมาจากทฤษฎี 2.7.4

ทฤษฎี 4.2.4 ถ้า (X, d) มีสับสเปซเป็นอาร์กไวซ์คอนเนคเตดที่มีสมาชิกมากกว่าหนึ่งตัว แล้ว (X, d) เป็น [0, 1] continuous metric space

พิสูจน์ เป็นผลมาจากนิยาม 2.6.6

<u>ทฤษฎี</u> 4.2.5 ถ้า (X, d) เป็นเมตริกสเปซที่เป็นคอมแพค, คอนเนค, โลกัลลี่คอนเนค และมีสมาชิกมากกว่าหนึ่งตัว แล้ว (X, d) เป็น $[0, 1]$ continuous metric space

<u>พิสูจน์</u> เป็นผลมาจากทฤษฎี 2.7.3 และทฤษฎี 4.2.3

<u>ทฤษฎี</u> 4.2.6 ถ้า (X, d) เป็น $[0, 1]$ continuous metric space แล้ว

1. (X, d) มีคอมแพคสับสเปซที่มีสมาชิกมากกว่าหนึ่งตัว
2. (X, d) มีคอนเนคเตคสับสเปซที่มีสมาชิกมากกว่าหนึ่งตัว

<u>พิสูจน์</u> เป็นผลมาจากทฤษฎี 2.5.7 และทฤษฎี 2.6.3

<u>ทฤษฎี</u> 4.2.7 ถ้า (X, d) เป็นคอนเนคเตคเมตริกสเปซที่มีสมาชิกมากกว่าหนึ่งตัว แล้ว $d(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

<u>พิสูจน์</u> สมมุติว่า $d(x) > 0$ สำหรับบาง $x \in X$

เพราะฉะนั้น $B(x, \frac{d(x)}{2}) = \{x\}$ เป็นเซตเปิด

นั่นคือ $\{x\}$ เป็นทั้งเซตเปิด และเซตปิด
โดยที่ $\{x\} \neq X$ (เพราะว่า X มีสมาชิกมากกว่าหนึ่งตัว)
โดยทฤษฎี 2.6.2 จึงได้ว่า (X, d) ไม่คอนเนค
ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนด

ดังนั้นทฤษฎีจึงเป็นจริง ⌗

<u>ทฤษฎี</u> 4.2.8 ถ้า (X, d) เป็น $[0, 1]$ continuous metric space แล้ว X มีจุดลิมิตเป็นจำนวนอนันต์

<u>พิสูจน์</u> จาก (X, d) เป็น $[0, 1]$ continuous metric space

เพราะฉะนั้นมีฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : [0, 1] \dashrightarrow X$ โดยที่ $f(0) \neq f(1)$

ให้ $f(0) = y_1$, $f(1) = y_2$ ดังนั้น $y_1 \neq y_2$

ให้ $Y = f([0, 1])$

โดยทฤษฎี 2.6.3 จึงได้ว่า Y คอนเนค

โดยทฤษฎี 4.2.7 ได้ว่า $d(y, Y \setminus \{y\}) = 0$ สำหรับ $y \in Y$ ....(1)

จะแสดงว่า Y มีสมาชิกเป็นจำนวนอนันต์

สมมุติว่า Y มีสมาชิกจำกัดให้เป็น $\{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n\}$

เลือก $y_o \in Y$

พิจารณา $d(y_o, Y \setminus \{y_o\}) = \inf \{d(y_o, y_i) / i = 1, 2, \ldots, n, y_i \neq y_o\}$

จึงได้ $d(y_o, Y \setminus \{y_o\}) > 0$ ขัดแย้งกับ (1)

เพราะฉะนั้น Y มีสมาชิกเป็นจำนวนอนันต์

แต่ $d(y) = 0$ สำหรับทุก $y \in Y$

นั่นคือ X มีจุดลิมิตเป็นจำนวนอนันต์ ⌑

บทกลับของทฤษฎี 4.2.8 ไม่จริงเสมอไป

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ Q เป็นเซตของจำนวนตรรกยะ และ d_u เป็นเมตริกปกติ

ดังนั้น (Q, d_u) เป็นเมตริกสเปซ และ $d(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in Q$

จะเห็นได้ว่า (Q, d_u) มีจุดลิมิตเป็นจำนวนอนันต์

แต่ (Q, d_u) ไม่เป็น $[0, 1]$ continuous metric space

<u>พิสูจน์</u> สมมุติว่า (Q, d_u) เป็น $[0, 1]$ continuous metric space

ดังนั้นมีฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : [0, 1] \dashrightarrow Q$ โดยที่ $f(0) \neq f(1)$

ให้ $f(0) = a$, $f(1) = b$ สำหรับบาง $a, b \in Q$

<u>กรณีที่</u> 1 ถ้า $a < b$

เลือก c เป็นจำนวนอตรรกยะโดยที่ $a < c < b$

จะได้ว่า $(-\infty, c) \cap f([0, 1]) \neq \emptyset$ (มี a เป็นสมาชิก)

$(c, \infty) \cap f([0, 1]) \neq \emptyset$ (มี b เป็นสมาชิก)

$((-\infty, c) \cap f([0, 1])) \cap ((c, \infty) \cap f([0, 1])) = \emptyset$

$((-\infty, c) \cap f([0, 1])) \cup ((c, \infty) \cap f([0, 1])) = f([0, 1])$

$(-\infty, c) \cap f([0, 1])$ และ $(c, \infty) \cap f([0, 1])$

เป็นเซตเปิดใน $f([0, 1])$

ทำให้ $f([0, 1])$ ไม่คอนเนค

ขัดแย้งกับทฤษฎี 2.6.2 ซึ่งได้ว่า $f([0, 1])$ คอนเนค

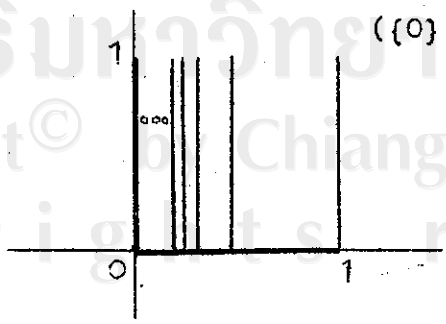
<u>กรณีที่</u> 2 ถ้า $a > b$ (พิสูจน์ทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 1)

นั่นคือ (Q, d_u) ไม่เป็น $[0, 1]$ continuous metric space

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของ $[0, 1]$ continuous metric space

<u>ตัวอย่างที่</u> 1 R^n เป็นอาร์กไวซ์คอนเนคเตคสเปซ(โดยทฤษฎี 2.6.7)

<u>ตัวอย่างที่</u> 2 ให้ $A = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{\frac{1}{n} / n \in N\} \times [0, 1] \cup (\{0\} \times [0, 1])$



เมตริกปกติบน A เป็นอาร์กไวซ์คอนเนคเตคสเปซ

ตัวอย่างที่ 3 $([a, b], d_u)$ เป็นเบียโนสเปซ สำหรับ $a < b \in R$

ตัวอย่างที่ 4 $([4, 5] \cup \{\frac{1}{n} / n \in N\}, d_u)$ ไม่เป็น

เบียโนสเปซ และไม่เป็นอาร์กไวซ์คอนเนคเตคสเปซ
แต่เป็น $[0, 1]$ continuous metric space

โดยอาศัยทฤษฎีที่กล่าวมาข้างต้น จะเห็นได้ว่าตัวอย่างที่ 1, 2, 3, 4 เป็น $[0, 1]$ continuous metric space

หมายเหตุ เซตที่มีสมาชิกจำกัด ไม่เป็น $[0, 1]$ continuous metric space โดยทฤษฎี 4.2.8

4.3 ประยุกต์ $[0, 1]$ continuous metric space

ในหัวข้อนี้จะยกตัวอย่างทฤษฎีบางทฤษฎี ซึ่งสามารถขยายไปถึง $[0, 1]$ continuous metric space ได้

ทฤษฎี 4.3.1 (Urysohn's Lemma)

ให้ $(X, \mathcal{J})$ เป็นนอร์มัลสเปซ และ A, B เป็นสับเซตปิดของ X โดยที่ $A \cap B = \emptyset$ แล้วจะมีฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : X \longrightarrow [0, 1]$ โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x \in A \\ 1 & \text{เมื่อ } x \in B \end{cases}$$

จากทฤษฎี 4.3.1 เราสามารถขยายไปถึง $[0, 1]$ continuous metric space ได้ดังนี้

<u>ทฤษฎี</u> 4.3.2 ให้ $(X, \mathcal{T})$ เป็นนอร์มัลสเปซ และ (Y, d) เป็น $[0, 1]$ continuous metric space และ A, B เป็นสับเซตปิดของ X โดยที่ $A \cap B = \emptyset$ แล้ว จะมี $a, b \in Y$ และมีฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : X \dashrightarrow Y$ โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } x \in A \\ b & \text{เมื่อ } x \in B \end{cases}$$

<u>พิสูจน์</u> เป็นผลมาจากนิยาม $[0, 1]$ continuous metric space

ทฤษฎี 4.3.2 สามารถขยายไปถึงอาร์กไวซ์คอนเนคเตดสเปซได้ดังนี้

<u>ทฤษฎี</u> 4.3.3 ให้ $(X, \mathcal{T})$ เป็นนอร์มัลสเปซ และ $(Y, \mathcal{T})$ เป็นอาร์กไวซ์คอนเนคเตดสเปซ และ A, B เป็นสับเซตปิดของ X โดยที่ $A \cap B = \emptyset$ แล้ว แต่ละ $a, b \in Y$ จะมีฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : X \dashrightarrow Y$ โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } x \in A \\ b & \text{เมื่อ } x \in B \end{cases}$$

<u>พิสูจน์</u> เป็นผลมาจากนิยามของอาร์กไวซ์คอนเนคเตดสเปซ

4.4 <u>เงื่อนไขใหม่ในทฤษฎีของ Hermann Hueber</u>

จุดมุ่งหมายในการศึกษาหัวข้อนี้ ก็เพื่อที่จะหาเงื่อนไขอื่นๆ มาแทนเงื่อนไขข้อ 1 ในทฤษฎีของ Hermann Hueber แล้วยังคงทำให้ข้อความที่ได้ใหม่เป็นจริง

<u>ทฤษฎี</u> 4.4.1 ถ้า (X, d) เป็นเมตริกสเปซ (Y, d') เป็น $[0, 1]$ continuous metric space แล้วจะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลย์กัน

1. ทุกฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : X \dashrightarrow Y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเสมอต้นเสมอปลาย
2. ทุกลำดับ (x_n) ใน X โดยที่ $\lim_{n \to \infty} d(x_n) = 0$ จะมีลำดับย่อยที่เป็นลำดับลู่เข้า

3. X' คอมแพค และแต่ละ $\delta_1 > 0$ จะมี $\delta_2 > 0$

ซึ่งทำให้ $d(x) > \delta_2$ สำหรับ $x \in X$ โดยที่ $d(x, X') > \delta_1$

(X' หมายถึงเซตของจุดลิมิตทั้งหมดของ X)

<u>พิสูจน์</u> สมมุติว่า (1) เป็นจริง แล้วพิสูจน์ว่า (2) เป็นจริงนั้น การพิสูจน์เหมือนทฤษฎี 4.1.1

สมมุติว่า (2) เป็นจริง จะแสดงว่า X' คอมแพค

ให้ (x_n) เป็นลำดับใน X' ดังนั้น $d(x_n) = 0$ สำหรับทุก $n \in N$

จึงได้ว่า $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n) = 0$ โดย (2) จึงได้ว่า

(x_n) มีลำดับย่อยที่เป็นลำดับลู่เข้า สมมุติให้เป็น (x_{n_k})

โดยที่ $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = y$

จะแสดงว่า $y \in X'$ โดยแสดงว่า $d(y) = 0$

<u>กรณีที่</u> 1 ถ้า $y = x_{n_{k_o}}$ สำหรับบาง $k_o \in N$ จะได้ $d(y) = 0$

<u>กรณีที่</u> 2 ถ้า $y \neq x_{n_k}$ สำหรับทุก $k \in N$

สมมุติว่า $d(y) > 0$

จาก $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = y$

ดังนั้นจะมี $k_o \in N$ ซึ่งทำให้ $d(y, x_{n_{k_o}}) < d(y)$

ขัดแย้งเพราะว่า $y \neq x_{n_{k_o}}$ และนิยามของ $d(y)$

จึงได้ว่า $d(y) = 0$ ทำให้ $y \in X'$

นั่นคือ X' คอมแพค

จะพิสูจน์ตอนที่สองของ (3)

ให้ $\delta_1 > 0$ และ $\delta = \inf \{d(x)/\ x \in X,\ d(x, X') > \delta_1\}$

จะแสดงว่า $\delta > 0$

สมมุติว่า $\delta = 0$

จาก $0 = \inf \{d(x)/\ x \in X,\ d(x, X') > \delta_1\}$

จึงมี $x_1 \in X$ ซึ่งทำให้ $d(x_1) < 1$ และ $d(x_1, X') > \delta_1$

และมี $x_2 \in X$ ซึ่งทำให้ $d(x_2) < \frac{1}{2}$ และ $d(x_2, X') > \delta_1$

ดังนั้นจะมีลำดับ (x_n) ใน X โดยที่ $d(x_n) < \frac{1}{n}$

และ $d(x_n, X') > \delta_1$ สำหรับ $n \in N$

จึงได้ว่า $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n) = 0$

ดังนั้นโดย (2) จึงได้ว่า (x_n) มีลำดับย่อยที่เป็นลำดับลู่เข้า

สมมุติให้เป็น (x_{n_k}) โดยที่ $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = y$

จะแสดงว่าแต่ละ $n \in N$ จะมี $n_o \geq n$ ซึ่งทำให้ $x_{n_o} \neq y$

สมมุติว่าไม่จริง

นั่นคือมี $n' \in N$ ซึ่งทำให้ $x_n = y$ สำหรับ $n \geq n'$

มีผลทำให้ $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n) = d(y)$ และ $d(x_n) = d(y)$ สำหรับ $n \geq n'$

จาก $d(x_n, X') > \delta_1 > 0$ จึงได้ว่า $d(x_n) > 0$ สำหรับ $n \in N$

ดังนั้น $\lim_{n \to \infty} d(x_n) > 0$ ขัดแย้งกับ $\lim_{n \to \infty} d(x_n) = 0$

นั่นคือ แต่ละ $n \in N$ จะมี $n_o \geq n$ ซึ่งทำให้ $x_{n_o} \neq y$

ต่อไปจะแสดงว่า $d(y) = 0$

สมมุติว่า $d(y) > 0$

จาก $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = y$

ดังนั้นจะมี $k_o \in N$ ซึ่งทำให้ $d(y, x_{n_k}) < d(y)$ สำหรับ $k \geq k_o$

จากแต่ละ $n \in N$ จะมี $n_o \geq n$ ซึ่งทำให้ $x_{n_o} \neq y$

จึงมี $k' \in N$ ซึ่งทำให้ $d(y, x_{n_{k'}}) < d(y)$ โดยที่ $x_{n_{k'}} \neq y$

ขัดแย้งกับนิยามของ $d(y)$

จึงได้ว่า $d(y) = 0$

นั่นคือ $y \in X'$

ต่อไปจะแสดงว่า $\lim_{k \to \infty} d(x_{n_k}, X') = 0$

จาก $y \in X'$ ดังนั้น $d(x_{n_k}, X') \leq d(x_{n_k}, y)$ สำหรับทุก $k \in N$

จึงได้ว่า $\lim_{k \to \infty} d(x_{n_k}, X') \leq \lim_{k \to \infty} d(x_{n_k}, y)$

จาก $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = y$

ทำให้ $\lim_{k \to \infty} d(x_{n_k}, y) = 0$

จึงได้ว่า $\lim_{k \to \infty} d(x_{n_k}, X') = 0$ ......(1)

จาก $d(x_n, X') > \delta_1$ สำหรับทุก $n \in N$

ดังนั้น $d(x_{n_k}, X') > \delta_1$ สำหรับทุก $k \in N$

ทำให้ $\lim_{k \to \infty} d(x_{n_k}, X') \geq \delta_1$

แต่ $\delta_1 > 0$ ดังนั้น $\lim_{k \to \infty} d(x_{n_k}, X') > 0$ ขัดแย้งกับ (1)

ดังนั้น $\delta > 0$ จริง

เลือก $\delta_2 = \frac{\delta}{2}$ ก็จะทำให้ข้อ 3 ตอนสองเป็นจริง

สมมุติว่า (3) เป็นจริง จะแสดงว่า (1) เป็นจริง

ให้ $f : X \to Y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ต้องการแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเสมอต้นเสมอปลาย

ให้ $\varepsilon > 0$ และ $x \in X$ จะมี $\delta_x > 0$ ซึ่งทำให้

$d'(f(y), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ สำหรับทุก $y \in X$ เมื่อ $d(x, y) < \delta_x$

จาก $\{B(x, \frac{\delta_x}{4}) / x \in X'\}$ เป็นคัฟเวอร์เปิดของ X'

และ X' คอมแพค

จะมี $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ใน X' โดยที่

$\{B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{4}) / i = 1, 2, \ldots, n\}$ เป็นคัฟเวอร์เปิดของ X'

ให้ $\delta_1 = \frac{1}{4} \inf \{\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \delta_{x_3}, \ldots, \delta_{x_n}\}$

ดังนั้น $\delta_1 > 0$

โดยข้อ 3. จะมี $\delta_2 > 0$ ที่ทำให้

$d(x) > \delta_2$ สำหรับทุก $x \in X$ ที่ $d(x, X') > \delta_1$

ให้ $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$

ให้ $x, y \in X$ โดยที่ $d(x, y) < \delta$

<u>กรณีที่</u> 1 ถ้า $d(x, X') > \delta_1$ จาก (3) จะได้ $d(x) > \delta_2$

แต่ $d(x, y) < \delta \leq \delta_2$

จะแสดงว่า $x = y$

สมมุติว่า $x \neq y$ จาก $d(x) > \delta_2$ แต่ $\delta_2 \geq \delta > d(x, y)$

จะได้ $d(x) > d(x, y)$ ขัดแย้ง

นั่นคือ $x = y$

จึงได้ $d'(f(x), f(y)) = 0 < \varepsilon$

<u>กรณีที่</u> 2 ถ้า $d(x, X') < \delta_1$ จะมี $a \in X'$ ซึ่งทำให้ $d(x, a) < \delta_1$

จาก $a \in X'$ และ $\{B(x_k, \frac{\delta_{x_k}}{4}) / k = 1, 2, \ldots, n\}$

เป็นคัฟเวอร์เปิดของ X'

จะมี $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ โดยที่ $d(a, x_k) < \frac{\delta_{x_k}}{4}$

จาก $d(y, x_k) \leq d(y, x) + d(x, a) + d(a, x_k)$

$$< \delta + \delta_1 + \frac{\delta_{x_k}}{4} < \delta_{x_k}$$

และ $d(x, x_k) \leq d(x, a) + d(a, x_k) < \delta_1 + \frac{\delta_{x_k}}{4} < \delta_{x_k}$

จึงได้ $d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f(x_k)) + d'(f(x_k), f(y))$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

<u>กรณีที่</u> 3 ถ้า $d(x, X') = \delta_1$ จะมี $a \in X'$ โดยที่ $d(x, a) < 2\delta_1$

จาก $a \in X'$

และ $\{B(x_k, \frac{\delta_{x_k}}{4}) / k = 1, 2, \ldots, n\}$

เป็นคัฟเวอร์เปิดของ X'

จะมี $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ โดยที่ $d(a, x_k) < \frac{\delta_{x_k}}{4}$

จาก $d(y, x_k) \leq d(y, x) + d(x, a) + d(a, x_k)$

$$< \delta + 2\delta_1 + \frac{\delta_{x_k}}{4} < \delta_{x_k}$$

และ $d(x, x_k) \leq d(x, a) + d(a, x_k) < 2\delta_1 + \frac{\delta_{x_k}}{4} < \delta_{x_k}$

จึงได้ $d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f(x_k)) + d'(f(x_k), f(y))$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเสมอต้นเสมอปลาย #

<u>ทฤษฎี</u> 4.4.2 (X, d) เป็นคอมแพคเมตริกสเปซ ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขทั้งสองข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1. ทุกลำดับ (x_n) ใน X โดยที่ $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n) = 0$ มีลำดับย่อยที่เป็นลำดับลู่เข้า
2. แต่ละ $\varepsilon > 0$, $\{x \in X / d(x) > \varepsilon\}$ เป็นเซตจำกัด

<u>พิสูจน์</u> เป็นผลมาจากทฤษฎี 4.4.1

<u>ทฤษฎี</u> 4.4.3 (X, d) เป็นคอมแพคเมตริกสเปซ ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขทั้งสองข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1. X' คอมแพคและแต่ละ $\delta_1 > 0$ จะมี $\delta_2 > 0$ โดยที่ $d(x) > \delta_2$ สำหรับทุก $x \in X$ ซึ่ง $d(x, X') > \delta_1$
2. แต่ละ $\varepsilon > 0$, $\{x \in X / d(x) > \varepsilon\}$ เป็นเซตจำกัด

<u>พิสูจน์</u> เป็นผลมาจากทฤษฎี 4.4.1