บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานเฉพาะเท่าที่จำเป็น เพื่อนำไปใช้ศึกษาในบทที่ 3 และบทที่ 4 ต่อไปเท่านั้น โดยจะกล่าวถึงนิยาม ทฤษฎี และคุณสมบัติต่าง ๆ ที่สำคัญไว้พอสังเขป และการวิจัยเรื่องนี้อาศัยความรู้พื้นฐานระดับวิชา คณิต.336 และคณิต.731 ดังนั้นคำศัพท์ และสัญลักษณ์ต่าง ๆ จะเป็นที่รู้จักและนิยมใช้กันในระดับนั้น ซึ่งผู้เขียนจะไม่กล่าวถึงในส่วนรายละเอียด

2.1 <u>เลเบกเมเชอเรเบิลเซต</u> (Lebesgue measurable set)

<u>นิยาม 2.1.1</u> ให้ I เป็นช่วงเปิดแบบจำกัด นั่นคือ $I = (a,b)$ โดยที่ $a, b \in R$ และ $a < b$ แล้วกำหนดให้ $l(I)$ = ความยาวของ $I = b - a$, ถ้า $I = \emptyset$ แล้ว $l(I) = 0$, สำหรับ $E \subset R$

ให้ $m^*(E) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) : I_n$ = ช่วงเปิดแบบจำกัด หรือ $\emptyset$

และ $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\}$

เรียก $m^*(E)$ ว่า <u>เลเบกเอาเทอร์เมเชอร์</u> (Lebesgue outer measure) <u>ของ E</u>

<u>ข้อสังเกต</u> สำหรับ $E \subset R$, $m^*(E) < \infty$ ก็ต่อเมื่อ

(i) $m^*(E) \leq \sum l(I_n)$ สำหรับทุก ๆ ลำดับ $\{I_n\}$ ซึ่ง $E \subset \bigcup I_n$

(ii) สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\{I_n\}$ ซึ่ง $E \subset \bigcup I_n$ และ $\sum l(I_n) < m^*(E) + \varepsilon$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

<u>คุณสมบัติของ m^*</u>

1. $m^*(\emptyset) = 0$

2. $m^*(\{x_o\}) = 0 , \forall x_o \in R$

3. <u>โมโนโทนิซิตี</u> (Monotonicity) :

   $A \subset B$ แล้วจะได้ว่า $m^*(A) \leq m^*(B)$

4. <u>ทรานสเลชันอินแวเรียนท์</u> (Translation invariance) :

   สำหรับแต่ละ $r \in R$ และ $E \subset R$ จะได้ว่า $m^*(E+r) = m^*(E)$

   โดยที่ $E + r = \{x : x = e + r$, สำหรับบาง e ใน $E\}$

5. <u>เคาเทเบิลสับแอดดิติวิตี</u> (Countable subadditivity) :

   $$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$$

6. $m^*(J) = l(J)$ สำหรับช่วง J ใด ๆ

<u>นิยาม 2.1.2</u> ให้ $E \subset R$ จะเรียก E ว่าเป็น <u>เลเบกเมเซอเรเบิลเซต</u> (Lebesgue measurable set) หรือ เมเซอเรเบิลเซต หรือกล่าวสั้น ๆ ว่า E เมเซอเรเบิล ถ้าสำหรับทุก ๆ $A \subset R$ เราได้ว่า

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

เรียก E ว่าเป็น <u>นอนเมเซอเรเบิลเซต</u> (non - measurable set) ถ้า E ไม่เป็นเมเซอเรเบิลเซต

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

<u>นิยาม 2.1.3</u> เรียกคลาส $\mathfrak{F}$ ของสับเซตของ R ว่า σ - แอลยีบรา (σ - algebra) ถ้า

(1) $\emptyset \in \mathfrak{F}$

(2) ถ้า $E \in \mathfrak{F}$ แล้ว $E^c \in \mathfrak{F}$

(3) ถ้า $E_n \in \mathfrak{F}$, $n=1,2,\ldots$ แล้ว $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{F}$

<u>สัญลักษณ์</u> ให้ $\mathfrak{M}$ เป็นคลาสของเมเชอเรเบิลเซตทั้งหมด

<u>ทฤษฎี 2.1.1</u> $\mathfrak{M}$ เป็น σ - แอลยีบรา

<u>นิยาม 2.1.4</u> สำหรับ $E \in \mathfrak{M}$ เรียก $m^*(E)$ ว่า <u>เลเบกเมเชอร์</u> (Lebesgue measure) <u>ของ E</u> หรือ เมเชอร์ของ E เขียนแทนด้วย $m(E)$

<u>พรอพโพซิชัน 2.1.1</u> $\mathfrak{M}$ มีคุณสมบัติเคาเทเบิลแอดดิทิวิตี (Countable additivity) นั่นคือ ถ้า $E_n \in \mathfrak{M}$, $n=1,2,\ldots$ และ $E_j \cap E_k = \emptyset$ สำหรับ $j \neq k$ แล้ว

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

<u>พรอพโพซิชัน 2.1.2</u> ถ้า $E_n \in \mathfrak{M}$, $E_{n+1} \subset E_n$, $\forall n=1,2,\ldots$ แล้วถ้า $m(E_1) < \infty$ แล้ว $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \to \infty} m(E_n)$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

2.2 นอนเมเชอเรเบิลเซตบน $[0,1)$ (A non measurable set on $[0,1)$)

นิยาม 2.2.1 ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงใน $[0,1)$ การบวกมอดูโล 1 (Sum modulo 1) ของ x และ y จะเขียนแทนด้วย $x \dotplus y$ มีนิยามดังนี้

$$x \dotplus y = \begin{cases} x + y & , \text{ถ้า } 0 \leq x + y < 1 \\ x + y - 1 & , \text{ถ้า } x + y \geq 1 \end{cases}$$

ข้อสังเกต สำหรับแต่ละจำนวนจริง x , y ใน $[0,1)$ จะได้ว่า $x \dotplus y \in [0,1)$

นิยาม 2.2.2 ให้ $E \subset [0,1)$, สำหรับ $y \in [0,1)$ เรียกการเลื่อนมอดูโล 1 (Translate modulo 1) ของ E ซึ่งเขียนแทนด้วย $E \dotplus y$ หมายถึง $\{z : z = x \dotplus y$ สำหรับ x บางตัวใน $E\}$

พรอพโพซิชัน 2.2.1 ให้ $E \subset [0,1)$ และ $E \in \mathcal{M}$ แล้ว สำหรับแต่ละ $y \in [0,1)$ จะได้ว่า $E \dotplus y \in \mathcal{M}$ และ $m(E \dotplus y) = m(E)$

พิสูจน์ สำหรับ $y \in (0,1)$

ให้ $E_1 = E \cap [0,1-y)$

$E_2 = E \cap [1-y,1)$

จะเห็นว่า $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ และ $E_1 \cup E_2 = E$

ดังนั้น $m(E) = m(E_1) + m(E_2)$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

เนื่องจาก $E_1 \dotplus y = \{z : z = x \dotplus y,$ สำหรับบาง x ใน $E_1\}$

$= \{z : z = x + y,$ สำหรับบาง x ใน $E_1\}$

$= E_1 + y$

ดังนั้น $E_1 \dotplus y \in \mathcal{M}$ และ $m(E_1 \dotplus y) = m(E_1 + y) = m(E_1)$

และเนื่องจาก $E_2 \dotplus y = \{z : z = x \dotplus y,$ สำหรับบาง x ใน $E_2\}$

$= \{z : z = x + y - 1,$ สำหรับบาง x ใน $E_2\}$

$= E_2 + (y-1)$

ดังนั้น $E_2 \dotplus y \in \mathcal{M}$ และ $m(E_2 \dotplus y) = m(E_2 + (y-1)) = m(E_2)$

เนื่องจาก $E \dotplus y = \{z : z = x \dotplus y,$ สำหรับบาง x ใน $E\}$

$= \{z : z = x \dotplus y,$ สำหรับบาง x ใน $E_1 \cup E_2\}$

$= \{z : z = x \dotplus y,$ สำหรับบาง x ใน $E_1\}$

$\cup \{z : z = x \dotplus y,$ สำหรับบาง x ใน $E_2\}$

$= (E_1 \dotplus y) \cup (E_2 \dotplus y)$

และ $(E_1 \dotplus y) \cap (E_2 \dotplus y) = \emptyset$

ดังนั้น $E \dotplus y \in \mathcal{M}$ และ $m(E \dotplus y) = m(E_1 \dotplus y) + m(E_2 \dotplus y)$

$= m(E_1) + m(E_2) = m(E)$ $\square$

ต่อไปจะเป็นการสร้างนอนเมเชอเรเบิลเซตบน $[0,1)$

ให้นิยาม <u>x อีควิวาเลนท์กับ y</u> ซึ่งเขียนแทนด้วย $x \sim y$

ถ้า $x - y$ เป็นจำนวนตรรกยะ

จะได้ว่า $\sim$ เป็น<u>ความสัมพันธ์อีควิวาเลนซ์</u> (Equivalence relation)

และแบ่งเซต $[0,1)$ ออกเป็นอีควิวาเลนซ์คลาส (Equivalence classes)

นั่นคือ x และ y จะอยู่คลาสเดียวกัน ถ้า $x \sim y$

และในทางกลับกัน x และ y จะอยู่คนละคลาสกัน ถ้า $x \nsim y$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

จาก<u>สัจพจน์ของการเลือก</u> (Axiom of choice) จะมีเซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกที่แต่ละสมาชิกต้องเป็นสมาชิกเพียงตัวเดียว จากแต่ละอีควิวาเลนซ์คลาส กำหนดให้เซตนี้เป็นเซต E

ให้ $r_0, r_1, r_2, \ldots$ เป็นจำนวนตรรกยะทั้งหมดใน $[0,1)$ ซึ่ง $r_0 = 0$

ให้ $E_i = E \dotplus r_i$, $i = 0,1,2,\ldots$

ถ้า $x \in E_i \cap E_j$ แล้ว

$x = e_{x_i} \dotplus r_i = e_{x_j} \dotplus r_j$ สำหรับ e_{x_i}, e_{x_j} บางตัวใน E

$$e_{x_i} - e_{x_j} = \begin{cases} r_j - r_i & \text{ถ้า } e_{x_i}+r_i < 1 \text{ และ } e_{x_j}+r_j < 1 \\ r_j - r_i & \text{ถ้า } e_{x_i}+r_i \geq 1 \text{ และ } e_{x_j}+r_j \geq 1 \\ r_j - r_i - 1 & \text{ถ้า } e_{x_i}+r_i < 1 \text{ และ } e_{x_j}+r_j \geq 1 \\ r_j - r_i + 1 & \text{ถ้า } e_{x_i}+r_i \geq 1 \text{ และ } e_{x_j}+r_j < 1 \end{cases}$$

ดังนั้น $e_{x_i} - e_{x_j}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

ทำให้ $e_{x_i} \sim e_{x_j}$

เนื่องจาก E ประกอบด้วยสมาชิกเพียงตัวเดียว จากแต่ละอีควิวาเลนส์คลาส

จะได้ $e_{x_i} = e_{x_j}$

ทำให้ $x = e_x \dotplus r_i = e_x \dotplus r_j$ โดยที่ $e_x = e_{x_i} = e_{x_j}$

$$\text{พิจารณา } r_i - r_j = \begin{cases} e_x - e_x = 0 & \text{ถ้า } e_x+r_i < 1 \text{ และ } e_x+r_j < 1 \\ e_x - e_x = 0 & \text{ถ้า } e_x+r_i \geq 1 \text{ และ } e_x+r_j \geq 1 \\ e_x - e_x - 1 = -1 & \text{ถ้า } e_x+r_i < 1 \text{ และ } e_x+r_j \geq 1 \\ e_x - e_x + 1 = 1 & \text{ถ้า } e_x+r_i \geq 1 \text{ และ } e_x+r_j < 1 \end{cases}$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

เนื่องจากถ้า r_i , $r_j \in [0,1)$ แล้ว $r_i - r_j \in (-1,1)$

จะได้ $r_i - r_j = 0$

$r_i = r_j$

ทำให้ $i = j$

ดังนั้น ถ้า $i \neq j$ แล้ว $E_i \cap E_j = \emptyset$

แสดงว่า E_i เป็นเซตที่ไม่ตัดกัน , $\forall\ i = 0,1,2,\ldots$

ต่อไปจะแสดงว่า $\dot{\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}} E_i = [0,1)$

ให้ $y \in \dot{\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}} E_i$ จะได้ว่า

$y \in E_{i_o}$. สำหรับ i_o บางตัว

$y \in E \dotplus r_{i_o}$

จะได้ $y \in \{z : z = x \dotplus r_{i_o}$, สำหรับบาง x ใน $E\}$

เนื่องจาก $x \in [0,1)$ และ $r_{i_o} \in [0,1)$

ทำให้ $x \dotplus r_{i_o} \in [0,1)$

จะได้ $y \in [0,1)$

ดังนั้น $\dot{\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}} E_i \subset [0,1)$ ....(1)

ให้ $x \in [0,1)$

จะได้ว่า $x \sim z$ สำหรับ z บางตัว ซึ่ง $z \in E$

ทำให้ $x - z$ เป็นจำนวนตรรกยะ

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

เนื่องจาก $x, z \in [0,1)$ และ $x - z$ เป็นจำนวนตรรกยะ

ดังนั้นจะมี r_{i_o} บางตัวใน $[0,1)$ ซึ่ง $x = z \dotplus r_{i_o}$

ทำให้ $x \in E \dotplus r_{i_o}$

จะได้ $x \in E_{i_o}$

$$x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$$

ดังนั้น $[0,1) \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$ ....(2)

จาก (1),(2) จะได้

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i = [0,1)$$

ต่อไปจะแสดงว่า E เป็นนอนเมเชอเรเบิลเซต

สมมุติว่า $E \in \mathcal{M}$

ดังนั้น $m([0,1)) = m(\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i) = \sum_{i=0}^{\infty} m(E_i)$

จากพรอพโพซิชัน 2.2.1 จะได้ว่า

$E_i \in \mathcal{M}$ และ $m(E) = m(E_i)$, $\forall i=0,1,2,\ldots$

ดังนั้น $\sum_{i=0}^{\infty} m(E_i) = 0$ ถ้า $m(E) = 0$

$\sum_{i=0}^{\infty} m(E_i) = \infty$ ถ้า $m(E) > 0$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

แต่ $m([0,1)) = 1$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง (Contradiction)

ดังนั้น E เป็นนอนเมเชอเรเบิลเซต

<u>พรอพโพซิชัน 2.2.2</u> ถ้า $A \subset [0,1]$ และ $m(A) > 0$ แล้วจะมี $d > 0$
ซึ่ง $[0,d) \subset \{z : z = x - y,\ x, y \in A$ และ $x \geq y\}$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\varepsilon > 0$

สำหรับ $A \subset [0,1]$ และ $m(A) > 0$

จะมีเซตเปิด G ซึ่ง $A \subset G$ และ

$m(G) < m(A) + \varepsilon . m(A) = (1+\varepsilon)m(A)$

ให้ $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ โดยที่ I_k เป็นช่วงที่ไม่ตัดกัน สำหรับ $k = 1,2,\ldots$

กำหนด $A_k = A \cap I_k$ จะได้ว่า

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ และ } \{A_k\} \text{ เป็นลำดับของเซตที่ไม่ตัดกัน}$$

ดังนั้น $m(G) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} m(I_k) < (1+\varepsilon)m(A)$

$$= (1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$$

ทำให้ $m(I_{k_o}) < (1+\varepsilon)m(A_{k_o})$ สำหรับ k_o บางตัว

ให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $I = I_{k_o}$ และ $E = A_{k_o}$

จะได้ว่า $E \subset I$ และ $m(E) > \frac{3}{4}m(I)$ ....(1)

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ถ้าสมมุติให้ $E \cap (E + d) = \emptyset$ สำหรับ d บางตัวซึ่ง $0 < d < \frac{m(I)}{2}$

แล้ว $E \cup (E + d) \subset J$ สำหรับ J บางช่วงที่ $m(J) = m(I) + d$

จะได้
$$\begin{aligned} m(E) + m(E + d) &\leq m(I) + d \\ &< m(I) + \frac{m(I)}{2} \\ &= \frac{3}{2} m(I) \end{aligned}$$

ทำให้ $m(E) < \frac{3}{4} m(I)$ ซึ่งขัดแย้งกับ (1)

ดังนั้น $E \cap (E + d) \neq \emptyset$ ถ้า $0 < d < \frac{m(I)}{2}$ ....(2)

ต่อไปจะพิสูจน์ว่า

$[0,d) \subset \{z : z = x - y,\ x, y \in A$ และ $x \geq y\}$ สำหรับ $0 < d < \frac{m(I)}{2}$

ให้ $d_o \in [0,d)$

จาก (2) จะได้ $E \cap (E + d_o) \neq \emptyset$

ดังนั้น จะมี $e, e' \in E$ ซึ่งทำให้ $e = e' + d_o$ จะได้ $d_o = e - e'$

ทำให้ $d_o \in \{z : z = x - y,\ x, y \in A$ และ $x \geq y\}$

ดังนั้น $[0,d) \subset \{z : z = x - y,\ x, y \in A$ และ $x \geq y\}$ $\square$

ให้ $P(i)$ เป็นข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก i เรากล่าวว่า $P(i)$ เป็นจริงแบบอนันต์ (Infinitely many i) ถ้ามีลำดับย่อย $\{i_k, k \geq 1\}$ ของลำดับ $\{1,2,...\}$ ที่ $P(i_k)$ เป็นจริง $\forall k \geq 1$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

<u>พรอพโพซิชัน 2.2.3</u> ถ้า $M \subset [0,1)$, $m(M) > 0$ และ E_i เป็นเซตในการสร้างนอนเมเชอเรเบิลเซตบน $[0,1)$ แล้ว $M \cap E_i \neq \emptyset$ แบบอนันต์

<u>พิสูจน์</u> สำหรับ $M \subset [0,1)$ และ $m(M) > 0$

จากการสร้างนอนเมเชอเรเบิลเซตบน $[0,1)$

เราได้ $[0,1) = \dot{\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}} E_i$ โดยที่ $E_i = E \dotplus r_i$, $i = 0,1,\ldots$

ซึ่งเห็นได้ชัดว่า $M \cap (\dot{\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}} E_i) \neq \emptyset$

ถ้าสมมุติว่ามี n ที่ $M \cap E_i = \emptyset$, $\forall i > n$

จะได้ $M \subset \dot{\bigcup\limits_{i=0}^{n}} E_i$

ให้ $A = \{z : z = x - y,\ x , y \in M \text{ และ } x \geq y\}$

จากพรอพโพซิชัน 2.2.2 จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $[0,\delta) \subset A$

เลือก $z \in [0,\delta) \cap Q$

จะได้ $z = x - y$ สำหรับ x , y บางตัวใน M และ $x \geq y$

ซึ่งถ้า $x \in M$ แล้ว $x = e_x \dotplus r_j$ สำหรับ j บางตัวที่ $0 \leq j \leq n$ และ e_x บางตัวใน E และถ้า $y \in M$ แล้ว $y = e_y \dotplus r_k$ สำหรับ k บางตัวที่ $0 \leq k \leq n$ และ e_y บางตัวใน E

พิจารณา $x - y = (e_x \dotplus r_j) - (e_y \dotplus r_k)$

$$
\text{ทำให้ } x - y = \begin{cases} (e_x - e_y) + (r_j - r_k) & \text{ถ้า } e_x + r_j < 1 \text{ และ } e_y + r_k < 1 \\ (e_x - e_y) + (r_j - r_k) & \text{ถ้า } e_x + r_j \geq 1 \text{ และ } e_y + r_k \geq 1 \\ (e_x - e_y) + (r_j - r_k) - 1 & \text{ถ้า } e_x + r_j \geq 1 \text{ และ } e_y + r_k < 1 \\ (e_x - e_y) + (r_j - r_k) + 1 & \text{ถ้า } e_x + r_j < 1 \text{ และ } e_y + r_k \geq 1 \end{cases}
$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

เนื่องจาก $x - y \in Q$ ทำให้ $e_x - e_y \in Q$ ดังนั้น $e_x \sim e_y$

แต่ E ประกอบด้วยสมาชิกซึ่งแต่ละสมาชิกเป็นสมาชิกเพียงตัวเดียวจากแต่ละอีควิวาเลนซ์คลาส

จะได้ $e_x = e_y$

ทำให้ $z = \begin{cases} r_j - r_k & \text{หรือ} \\ r_j - r_k - 1 & \text{หรือ} \\ r_j - r_k + 1 & \text{สำหรับ } j, k \text{ บางตัวที่ } 0 \leq j, k \leq n \end{cases}$

แต่ $\{r_j - r_k, r_j - r_k - 1, r_j - r_k + 1 : 0 \leq j, k \leq n\}$ เป็นเซตจำกัดในขณะที่มี z อยู่ใน $[0,\delta) \cap Q$ เป็นจำนวนอนันต์ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $M \cap E_i \neq \emptyset$ แบบอนันต์ $\square$

2.3 <u>เลเบกเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน</u> (Lebesgue Measurable Function)

<u>พรอพโพซิชัน 2.3.1</u> ให้ $E \in \mathcal{M}$ และให้ $f : E \longrightarrow R_e$ ($R_e = R \cup \{-\infty, \infty\}$)

ดังนั้นข้อความต่อไปนี้ จะสมมูลกัน

(1) $\forall r \in R, \{x \in E : f(x) > r\} \in \mathcal{M}$

(2) $\forall r \in R, \{x \in E : f(x) \geq r\} \in \mathcal{M}$

(3) $\forall r \in R, \{x \in E : f(x) < r\} \in \mathcal{M}$

(4) $\forall r \in R, \{x \in E : f(x) \leq r\} \in \mathcal{M}$

<u>นิยาม 2.3.1</u> ฟังก์ชัน $f : E \longrightarrow R_e$ สำหรับ $E \in \mathcal{M}$ จะเรียกว่าเป็น <u>เลเบกเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน</u> (Lebesgue measurable function) <u>บนเซต E</u> หรือเรียกว่า f เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ถ้า f สอดคล้องกับเงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่ง ในพรอพโพซิชัน 2.3.1

<u>นิยาม 2.3.2</u> ข้อความใดที่เกี่ยวข้องกับจุดบนเมเชอเรเบิลเซต E จะถูกเรียกว่า เป็นจริง <u>ออลโมสท์เอเวอรีแวร์</u> (Almost every where) (บน E) ถ้าเมเชอร์ของเซตของจุดทั้งหมดในเซต E ที่ทำให้ข้อความนั้นไม่เป็นจริง มีค่าเป็นศูนย์ (เขียนย่อ ๆ ว่า ข้อความนั้นเป็นจริง a.e. (บน E))

<u>นิยาม 2.3.3</u> สำหรับ $E \subset R$ ให้

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x \in E \\ 0 & \text{ถ้า } x \notin E \end{cases}$$

เรียก χ_E ว่า <u>แคเรคเตอร์ริสติกฟังก์ชัน</u> (The charecteristic function) (ของ E)

<u>พรอพโพซิชัน 2.3.2</u> ถ้า $f, g : E \longrightarrow R$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชันแล้ว สำหรับ $c \in R$ ฟังก์ชัน $c+f$, cf, $f+g$ และ fg ต่างก็เป็น เมเชอเรเบิลฟังก์ชัน

<u>พรอพโพซิชัน 2.3.3</u> ถ้า $f_n : E \longrightarrow R_e$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน, $\forall n \geq 1$ และลำดับ $\{f_n\}$ คอนเวอร์จแล้ว $\lim\limits_{n \to \infty} f_n$ จะเป็น เมเชอเรเบิลฟังก์ชันด้วย

<u>พรอพโพซิชัน 2.3.4</u> ถ้า $f : E \longrightarrow R_e$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง a.e. (บน E) และ $E \in \mathcal{M}$ แล้ว f จะเป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน

<u>พรอพโพซิชัน 2.3.5</u> ถ้า $f : E \longrightarrow R_e$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน และ สำหรับ $D \subset E$ โดยที่ $D \in \mathcal{M}$ แล้ว $f|_D$ จะเป็นเมเชอเรเบิล ฟังก์ชัน

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

<u>นิยาม 2.3.4</u> ให้ $f_n, f : E \dashrightarrow R_e$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน $\forall n \geq 1$ f_n และ f ไฟไนท์ a.e. บน E $\forall n \geq 1$ เรากล่าวว่า

(ก) <u>f_n ลู่เข้าสู่ f แบบจุดต่อจุด</u> (Point wise) <u>บน E</u> ซึ่งเขียนแทนด้วย $f_n \dashrightarrow f$ บน E หรือ $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ บน E ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก $N_{\varepsilon,x}$ ซึ่ง $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq N_{\varepsilon,x}$

(ข) <u>f_n ลู่เข้าสู่ f แบบยูนิฟอร์ม</u> (Uniform) <u>บน E</u> ซึ่งเขียนแทนด้วย $f_n \dashrightarrow f$ แบบยูนิฟอร์ม บน E ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_ε ซึ่ง $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall x \in E$

(ค) <u>f_n ลู่เข้าสู่ f แบบเกือบยูนิฟอร์ม</u> (Almost uniform) <u>บน E</u> ซึ่งเขียนแทนด้วย $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีสับเซต F_ε ของ E ที่ $m(F_\varepsilon) < \varepsilon$ และ $f_n \dashrightarrow f$ แบบยูนิฟอร์ม บน $E - F_\varepsilon$

(ง) <u>f_n ลู่เข้าสู่ f ในรูปเมเชอร์</u> (In measure) ซึ่งเขียนแทนด้วย $f_n \xrightarrow{m} f$ ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ แล้ว

$$\lim_{n \to \infty} m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

ถ้า f_n ไม่ลู่เข้าสู่ f เขียนแทนด้วย $f_n \not\dashrightarrow f$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

<u>นิยาม 2.3.5</u> ให้ $f_h : E \dashrightarrow R_e$, $\forall h \in I$ โดยที่ I เป็นช่วงใน R จะเรียกคลาส $\{f_h : \forall h \in I\}$ ว่า <u>ระบบแบบต่อเนื่องของฟังก์ชัน</u> (Continuous family of functions)

ตัวอย่างเช่น ให้ $f : E \times (0,1] \dashrightarrow R_e$ โดยที่ $E \subset R$ ให้ $f_h(x) = f(x,h)$, $\forall (x,h) \in E \times (0,1]$ ดังนั้น $\{f_h : \forall h \in (0,1]\}$ เป็นระบบแบบต่อเนื่องของฟังก์ชัน f_h (ในที่นี้ $f_h : E \dashrightarrow R_e$)

<u>นิยาม 2.3.6</u> ให้ $f^* : E \times (0,1] \dashrightarrow R_e$ โดยที่ $\emptyset \neq E \subset R$, $E \in \mathcal{M}$ และสำหรับแต่ละ $x \in E$ ให้ $f_h(x) = f^*(x,h)$ เป็นฟังก์ชันบน $(0, 1]$, f_h, $f : E \dashrightarrow R_e$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน, $\forall h \in (0,1]$ และ f_h, f ไฟไนท์ a.e. บน E, $\forall h \in (0,1]$ เรากล่าวว่า

(ก) <u>f_h ลู่เข้าสู่ f แบบจุดต่อจุด บน E</u> ซึ่งเขียนแทนด้วย

$f_h \xrightarrow[h \to 0^+]{} f$ บน E หรือ $\lim\limits_{h \to 0^+} f_h(x) = f(x)$ บน E

ถ้าสำหรับแต่ละ $x \in E$ และแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta \in (0,1]$ ซึ่ง $|f_h(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall h \in (0,\delta]$

(ข) <u>f_h ลู่เข้าสู่ f แบบยูนิฟอร์ม บน E</u> ซึ่งเขียนแทนด้วย

$f_h \xrightarrow[h \to 0^+]{} f$ แบบยูนิฟอร์ม บน E ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta \in (0,1]$ ซึ่ง $|f_h(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall h \in (0,\delta]$, $\forall x \in E$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

(ค) f_h ลู่เข้าสู่ f แบบเกือบยูนิฟอร์ม บน E ซึ่งเขียนแทนด้วย

$f_h \xrightarrow[h \to 0^+]{a.u.} f$ ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมี

สับเซต F_ε ของ E ที่ $m(F_\varepsilon) < \varepsilon$ และ $f_h \xrightarrow[h \to 0^+]{} f$

แบบยูนิฟอร์ม บน $E - F_\varepsilon$

ทฤษฎี 2.3.1 ทฤษฎีอีเกอรอฟ (Egorov's Theorem)

ถ้า $f_n, f : E \to R_e$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน $\forall n \geq 1$, f_n, f ไฟไนท์ a.e. บน E, $\forall n \geq 1$, $m(E) < \infty$ และ $f_n \to f$ a.e. บน E แล้ว $f_n \xrightarrow{a.u.} f$

ตัวอย่าง 2.3.1 ให้ $f_n, f : [0,1] \to R$ โดยที่ ,

$$f_n(x) = x^n, \forall x \in [0,1], n = 1,2,\ldots$$

$$\text{และ } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x = 1 \\ 0 & \text{ถ้า } x \in [0,1) \end{cases}$$

เห็นได้ชัดว่า ตัวอย่างนี้สอดคล้องกับทฤษฎีอีเกอรอฟและ $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ โดยให้ $F_\varepsilon = [0,\varepsilon] \cap [0,1], \forall \varepsilon > 0$

ตัวอย่าง 2.3.2 ให้ $f_n, f : R \to R$ โดยที่

$f_n(x) = \chi_{[n,\infty)}(x)$, $\forall x \in R$

และ $f(x) = 0$, $\forall x \in R$

เนื่องจาก สำหรับแต่ละ $x \in R$

จะมีจำนวนเต็มบวก i_o ซึ่ง $x \in (-\infty, i_o)$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ดังนั้น สำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ และสำหรับแต่ละ $x \in R$

จะได้ว่า $x \in (-\infty, i_o)$ สำหรับจำนวนเต็มบวก i_o บางตัว

เลือก $N_{\varepsilon,x} = i_o$ ซึ่งทำให้

$$|f_n(x) - f(x)| = |\chi_{[n,\infty)}(x) - 0|$$

$$= \chi_{[n,\infty)}(x) = 0 < \varepsilon, \forall n \geq i_o$$

ดังนั้น $f_n \dashrightarrow f$ บน R

แต่เนื่องจาก $m(R) = \infty$

ซึ่งจะเห็นว่าไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขในทฤษฎีอีเกอรอฟ

ต่อไปจะแสดงว่า $\chi_{[n,\infty)} \overset{a.u.}{\not\dashrightarrow} 0$

ให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}$

สำหรับแต่ละสับเซต F_ε ของ R ซึ่ง $m(F_\varepsilon) < \frac{1}{2}$

ถ้า $[n,\infty) \cap (R - F_\varepsilon) = \emptyset$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n บางตัว

แล้ว $[n,\infty) \subset F_\varepsilon$

ทำให้ $m([n,\infty)) = \infty < \frac{1}{2}$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $[n,\infty) \cap (R - F_\varepsilon) \neq \emptyset$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกตัว

ถ้าให้ $\delta = \frac{1}{2}$, สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n

ให้ $x \in [n,\infty) \cap (R - F_\varepsilon)$ จะได้ว่า

$$|f_n(x) - f(x)| = |\chi_{[n,\infty)}(x) - 0|$$

$$= \chi_{[n,\infty)}(x)$$

$$= 1 > \delta$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ทำให้ $f_n \dashrightarrow\!\!\!\!\!/\; f$ แบบยูนิฟอร์ม บน $R - F_\varepsilon$

ดังนั้น $f_n \overset{a.u.}{\dashrightarrow\!\!\!\!\!/}\; f$

นั่นคือ ตัวอย่าง 2.3.2 เป็นการแสดงว่าทฤษฎีอีเกอรอฟไม่เป็นจริงในกรณีทั่ว ๆ ไป เมื่อ E เป็นเมเชอเรเบิลเซตใด ๆ

2.4 เลเบกอินทิกรัล (Lebesgue Integral)

นิยาม 2.4.1 ถ้า $s : E \longrightarrow R$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน เรียก s ว่า เป็น ซิมเพิลฟังก์ชัน (Simple function) ถ้า $s(E)$ เป็นเซตจำกัด

ข้อสังเกต ถ้า s เป็นซิมเพิลฟังก์ชัน ให้ $s(E) - \{0\} = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$

และ $E_k = \{x \in E : s(x) = c_k\}$, $\forall\, k = 1,2,\ldots,n$

ดังนั้น $E_k \in \mathcal{M}$, $E_j \cap E_k = \emptyset$ ถ้า $j \neq k$

และ $s(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}(x)$

นิยาม 2.4.2 สมมุติให้ $s : E \longrightarrow R$ เป็นซิมเพิลฟังก์ชันซึ่ง $m(E) < \infty$

และ $s = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}$ โดยที่ $E_j = s^{-1}(c_j)$, $c_j \neq 0$,

$\forall\, j = 1,2,\ldots,n$ และ $c_i \neq c_j$ ถ้า $i \neq j$ แล้ว กำหนดให้

$$\int_E s = \sum_{j=1}^{n} c_j m(E_j)$$

สัญลักษณ์ ถ้า $A \in \mathcal{M}$, $A \subset E$, $m(E) < \infty$ และ s เป็นซิมเพิลฟังก์ชัน บน E แล้ว เราเขียน $\int_A s = \int_E s\chi_A$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

นิยาม 2.4.3 ให้ $f : E \longrightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต และ $m(E) < \infty$ แล้ว โลเออร์เลเบกอินทิกรัล (The lower Lebesgue integral) ของ f บน E คือ

$$\underline{\int}_E f = \sup\{ \int_E s : s \leq f ,\ s \text{ เป็นซิมเพิลฟังก์ชัน } \}$$

อัปเปอร์เลเบกอินทิกรัล (The upper Lebesgue integral) ของ f บน E คือ

$$\overline{\int}_E f = \inf\{ \int_E t : t \geq f ,\ t \text{ เป็นซิมเพิลฟังก์ชัน } \}$$

เรียก f ว่าเป็น เลเบกอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน (Lebesgue integrable function) บน E หรือ อินทิเกรเบิลฟังก์ชัน ถ้า $\underline{\int}_E f = \overline{\int}_E f$

เรียกค่ารวมนี้ว่า เลเบกอินทิกรัล (Lebesgue integral) หรือ อินทิกรัล ของ f บน E และเขียนแทนด้วย $\int_E f$

ทฤษฎี 2.4.1 ถ้า $f : E \longrightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต และ $m(E) < \infty$ แล้ว f เป็นเลเบกอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน

นิยาม 2.4.4 ให้ $f : E \longrightarrow [0,\infty)$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน กำหนดให้

$$\int_E f = \sup\{ \int_E g : g : E_g \longrightarrow R \text{ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชันที่มีขอบเขต},$$
$$g \leq f \text{ บน } E_g ,\ E_g \subset E \text{ และ } m(E_g) < \infty \}$$

นิยาม 2.4.5 เรียกนอนเนกาทีฟเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน f บน E ที่ $\int_E f < \infty$ ว่า เลเบกอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน หรือ อินทิเกรเบิลฟังก์ชัน บน E

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

นิยาม 2.4.6 เรียกเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน f บน E ว่า เลเบกอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน หรือ อินทิเกรเบิลฟังก์ชัน บน E ถ้า f^+ และ f^- เป็นอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน เราให้นิยาม $\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$ และเรียก $\int_E f$ ว่า เลเบกอินทิกรัล หรือ อินทิกรัลของ f บน E

$(f^+ = \max(f, 0) , f^- = \max(-f, 0))$

หมายเหตุ $\int_A f = \int_E f\chi_A$ สำหรับ $A \subset E$

นิยาม 2.4.7 ให้ $f_n , f : E \to R_e$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน $\forall n \geq 1$ f_n และ f ไฟไนท์ a.e. บน E , $\forall n \geq 1$ เรากล่าวว่า f_n ลู่เข้าสู่ f ใน L^1 บน E ซึ่งเขียนแทนด้วย $f_n \xrightarrow{L^1} f$ ถ้า $\lim_{n \to \infty} \int_E |f_n - f| = 0$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved