บทที่ 3

การศึกษาทฤษฎีอีเกอรอฟ

3.1 ทฤษฎีอีเกอรอฟ เมื่อ E เป็นเมเชอเรเบิลเซตใด ๆ

จากทฤษฎีอีเกอรอฟ จะเห็นว่า ถ้า E เป็นเมเชอเรเบิลเซตใด ๆ โดยทั่วไปแล้วทฤษฎีอีเกอรอฟไม่สามารถนำมาประยุกต์ได้ ดังตัวอย่างที่ได้แสดงแล้ว Bartle [4] ได้ขยายทฤษฎีอีเกอรอฟออกไปสำหรับลำดับของเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน $\{f_n\}$ ที่สอดคล้องคุณสมบัติบางประการ โดยไม่คำนึงถึงว่า $m(E)$ จะไฟไนท์หรือไม่ (ดูทฤษฎี 3.1.1 ข้างล่าง)

สัญลักษณ์ ให้ $f_n, f : E \dashrightarrow R_e$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน , $\forall n \geq 1$ f_n และ f ไฟไนท์ a.e. บน E , $\forall n \geq 1$ แล้ว สำหรับแต่ละจำนวนจริง $\alpha > 0$ และแต่ละจำนวนเต็มบวก n ให้

$$E_n^f(\alpha) = \bigcup_{i=n}^{\infty} \{x \in E : |f_i(x) - f(x)| \geq \alpha\}$$

พรอพโพซิชัน 3.1.1 ให้ $f_n, f : E \dashrightarrow R_e$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน , $\forall n \geq 1$, f_n และ f ไฟไนท์ a.e. บน E, $\forall n \geq 1$ แล้ว สำหรับแต่ละจำนวนจริง $\alpha > 0$ และสำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า $E_{n+1}^f(\alpha) \subset E_n^f(\alpha)$

<u>พิสูจน์</u> สำหรับจำนวนจริง $\alpha > 0$ และจำนวนเต็มบวก n

ให้ $y \in E^f_{n+1}(\alpha)$ จะได้ว่า

$$y \in \bigcup_{i=n+1}^{\infty} \{x \in E : |f_i(x) - f(x)| \geq \alpha\}$$

$$y \in \bigcup_{i=n+1}^{\infty} \{x \in E : |f_i(x) - f(x)| \geq \alpha\} \cup \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}$$

$$y \in \bigcup_{i=n}^{\infty} \{x \in E : |f_i(x) - f(x)| \geq \alpha\}$$

$$y \in E^f_n(\alpha)$$

ดังนั้น $E^f_{n+1}(\alpha) \subset E^f_n(\alpha)$ $\square$

<u>นิยาม 3.1.1</u> ให้ $f_n, f : E \dashrightarrow R_e$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน, $\forall n \geq 1$ f_n, f ไฟไนท์ a.e. บน E, $\forall n \geq 1$ แล้ว

(ก) เรียก $\{f_n\}$ ว่า <u>ไฟไนท์เนสเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f</u>

(Finiteness Restriction with respect to f)

ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริง $\alpha > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก n_α ซึ่งทำให้ $m(E^f_{n_\alpha}(\alpha)) < \infty$

(ข) เรียก $\{f_n\}$ ว่า <u>วานิชชิงเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f</u>

(Vanishing Restriction with respect to f)

ถ้า $\lim_{n \to \infty} m(E^f_n(\alpha)) = 0$ สำหรับแต่ละจำนวนจริง $\alpha > 0$

<u>ตัวอย่าง 3.1.1</u> ให้ $f_n, f : R \longrightarrow R$ โดยที่

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & , x \in (1,\infty) \\ x^n & , x \in [0,1] \\ 0 & , x \in (-\infty,0) \end{cases} \quad , n = 1,2,\ldots$$

และ $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty,1) \\ 1 & , x \in [1,\infty) \end{cases}$

สำหรับจำนวนจริง $\alpha > 0$

ถ้า $\alpha > 1$ แล้ว ให้ $n_\alpha = 1$ ซึ่งจะได้

$$\begin{aligned} m(E^f_{n_\alpha}(\alpha)) &= m(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{x \in R : |f_i(x) - f(x)| \geq \alpha\}) \\ &= m(\emptyset) \\ &= 0 < \infty \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \end{aligned}$$

ถ้า $\alpha \leq 1$

สำหรับแต่ละ $x \in (-\infty,0] \cup [1,\infty)$ ให้ $n_\alpha = 1$

ซึ่งจะได้ว่า $|f_i(x) - f(x)| = 0 < \infty, \forall i \geq 1$

ทำให้ $\bigcup_{i=1}^{\infty}\{x \in R - (0,1) : |f_i(x) - f(x)| \geq \alpha\} = \emptyset$

ดังนั้น $m(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{x \in R - (0,1) : |f_i(x) - f(x)| \geq \alpha\}) = m(\emptyset)$

$= 0 < \infty \ldots\ldots (2)$

สำหรับ $0 < \varepsilon < 1$ เลือก $n_\varepsilon \geq 1$ ที่ $(1-\varepsilon)^{n_\varepsilon} < \alpha$

ดังนั้น $m(\bigcup_{i=n_\varepsilon}^{\infty} \{x \in (0,1-\varepsilon) : |f_i(x)-f(x)| \geq \alpha\}) = m(\emptyset) = 0$ .... (3)

จาก (1), (2) และ (3) จะเห็นว่า $m(E_n^f(\alpha)) = 0, \forall n \geq n_\varepsilon$

ทำให้ $\lim_{n\to\infty} m(E_n^f(\alpha)) = 0$

แสดงว่า $\{f_n\}$ วานิชชิงเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f

<u>ทฤษฎี 3.1.1</u> ให้ $f_n, f : E \longrightarrow R_e$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน, $\forall n \geq 1$ f_n และ f ไฟไนท์ a.e. บน E, $\forall n \geq 1$ ดังนั้น ข้อความต่อไปนี้จะสมมูลกัน

(i) $\{f_n\}$ ไฟไนท์เนสเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f

และ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ a.e. บน E

(ii) $\{f_n\}$ วานิชชิงเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f

(iii) $f_n \xrightarrow{a.u.} f$

<u>พิสูจน์</u> (i) $\Longrightarrow$ (ii) สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$

ให้ $C_n(\varepsilon) = E - E_n^f(\varepsilon) = \bigcap_{i=n}^{\infty} \{x \in E : |f_i(x) - f(x)| < \varepsilon\}$

และให้ $C = \{x \in E : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\}$

จะได้ว่า $C = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n=i_o}^{\infty} C_n(\varepsilon)$, $\forall i_o \geq 1$

ดังนั้น $C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_n(\varepsilon)$

ทำให้ $E - C \supset E - \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n(\varepsilon)$

$$E - \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n(\varepsilon) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E - C_n(\varepsilon))$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} \{x \in E : |f_i(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n^f(\varepsilon)$$

เนื่องจาก $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ a.e. บน E

จะได้ว่า $m(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n^f(\varepsilon)) \leq m(E - C) = 0$

จากพรอพโพซิชัน 3.1.1 , $E_{n+1}^f(\varepsilon) \subset E_n^f(\varepsilon)$, $\forall n \geq 1$

และจาก $\{f_n\}$ไฟไนท์เนสเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f

ทำให้ได้ว่า จะมี n_ε ซึ่ง $m(E_{n_\varepsilon}^f(\varepsilon)) < \infty$

โดยพรอพโพซิชัน 2.1.2 จะได้ว่า

$$\lim_{n \to \infty} m(E_n^f(\varepsilon)) = m(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n^f(\varepsilon)) = 0$$

ดังนั้น $\{f_n\}$ วานิชชิงเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f

(ii) ===> (iii) ให้ $\varepsilon > 0$; ดังนั้น $\lim_{n \to \infty} m(E_n^f(\varepsilon)) = 0$

สำหรับจำนวนจริง $\delta > 0$

เลือก n_k ที่ $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ และ $m(E^f_{n_k}(\varepsilon)) < \frac{\delta}{2^k}$

ให้ $B_\delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} E^f_{n_k}(\varepsilon)$

$$m(B_\delta) = m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E^f_{n_k}(\varepsilon)) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} = \delta$$

จะได้ $m(B_\delta) < \delta$

ถ้า $x \notin B_\delta$ แล้ว $x \in E^f_{n_k}(\varepsilon)^c$, $\forall k=1,2,\ldots$

ดังนั้น $|f_j(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall j \geq n_k$, $\forall k=1,2,\ldots$

นั่นคือ สำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก n_k

ซึ่งทำให้ $|f_j(x) - f(x)| < \varepsilon$,$\forall j \geq n_k$;$\forall x \in E - B_\delta$

จะได้ $f_n \dashrightarrow f$ แบบยูนิฟอร์ม บน $E - B_\delta$

ดังนั้น $f_n \xrightarrow{a.u.} f$

(iii) ===> (i) ให้ $f_n \xrightarrow{a.u.} f$

ดังนั้นสำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก k จะมี $B_k \subset E$ ซึ่ง $m(B_k) < \frac{1}{k}$

และ $f_n \dashrightarrow f$ แบบยูนิฟอร์ม บน $E - B_k$

ให้ $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$

จะได้ $m(B) = m(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k) < \frac{1}{k}$, $\forall k$

ดังนั้น $m(B) = 0$

ถ้า $x \notin B$ แล้ว $x \in B_k^c$ สำหรับ k บางตัว

ทำให้ $x \in E - B_k$ ซึ่ง $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$

ดังนั้น $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ a.e. บน E

ให้ $\alpha > 0$

สำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมี $B_\varepsilon \subset E$ ซึ่ง $m(B_\varepsilon) < \varepsilon$

และ $f_n \longrightarrow f$ แบบยูนิฟอร์ม บน $E - B_\varepsilon$

ทำให้ $\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\} \subset B_\varepsilon$

สำหรับทุก n เมื่อ n ใหญ่เพียงพอ

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มบวก n_α ซึ่ง $\bigcup_{i=n_\alpha}^{\infty} \{x \in E : |f_i(x) - f(x)| \geq \alpha\} \subseteq B_\varepsilon$

ทำให้ $E_{n_\alpha}^f(\alpha) \subset B_\varepsilon$

ซึ่งจะได้ $m(E_{n_\alpha}^f(\alpha)) < \varepsilon < \infty$

ดังนั้น $\{f_n\}$ ไฟไนท์เนสเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f $\square$

3.2 ทฤษฎีอีเกอรอฟ บนโดเมน[0, 1]สำหรับระบบแบบต่อเนื่องของเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน

สำหรับทฤษฎีอีเกอรอฟนั้น $\{f_n\}$ เป็นลำดับของเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน ต่อไปนี้จะเป็นการศึกษาทฤษฎีอีเกอรอฟ บนโดเมน [0, 1] สำหรับระบบแบบต่อเนื่องของเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน ซึ่งทฤษฎีนี้เป็นแบบฝึกหัดข้อ 13 หน้า 62 ของ [7]

<u>ทฤษฎี 3.2.1</u> ถ้า $f^* : [0,1]\times(0,1] \dashrightarrow R_e$ และสำหรับแต่ละ $x \in [0,1]$ ให้ $f_h(x) = f^*(x,h)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง สำหรับ $h \in (0,1]$ $f_h : E \dashrightarrow R_e$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน, $\forall h \in (0,1], f_h$ ไฟไนท์ a.e. บน $[0,1], \forall h \in (0,1]$ และ $\lim_{h \to 0^+} f_h(x) = f(x)$ a.e. บน [0, 1] ดังนั้นจะได้ว่า $f_h \xrightarrow[h \to 0^+]{a.u.} f$

เนื่องจากในหัวข้อ 4.3 จะเป็นการขยายทฤษฎี 3.2.1 จากการกำหนดฟังก์ชันบนโดเมน[0, 1] ออกไปเป็นการกำหนดฟังก์ชันบนโดเมนที่เป็นเมเชอเรเบิลเซตใดๆ ดังนั้นจึงไม่พิสูจน์ทฤษฎี 3.2.1 ไว้ในที่นี้