บทที่ 4

คุณสมบัติไฟไนท์เนสและทฤษฎีอีเกอรอฟ

4.1 การประยุกต์ของคุณสมบัติไฟไนท์เนส

จากการศึกษาคุณสมบัติไฟไนท์เนสเรสตริกชันขึ้นอยู่กับ f ของลำดับของเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน f_n โดยที่ $f_n, f : E \dashrightarrow R_e$ นั้น จะเห็นได้ว่า E เป็นเมเชอเรเบิลเซตใด ๆ เท่านั้น ไม่จำเป็นที่เซต E จะต้องมีเมเชอร์ไฟไนท์ ซึ่งจะเป็นประโยชน์ในการศึกษาทฤษฎีเมเชอร์ (Measure Theory) รวมทั้งการนำไปใช้ประยุกต์กับทฤษฎีต่าง ๆ ในการศึกษา Real Analysis มาก เพราะเป็นการขยายทฤษฎีต่าง ๆ ออกไป แทนที่จะจำกัดอยู่เฉพาะบนเซตที่มีเมเชอร์ไฟไนท์เท่านั้น ดังจะเห็นได้จากทฤษฎีต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 4.1.1</u> ให้ $f_n, f : E \dashrightarrow R_e$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน, $\forall n \geq 1$ และ f_n, f ไฟไนท์ a.e. บน E, $\forall n \geq 1$ ถ้า $\{f_n\}$ ไฟไนท์เนสเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f และ $f_n \chi_A \xrightarrow{L^1} f \chi_A$ สำหรับแต่ละ $A \subset E$ ซึ่ง $m(A) < \infty$ แล้ว $f_n \xrightarrow{m} f$

<u>พิสูจน์</u> สำหรับ $\varepsilon > 0$, จะมี n_ε ซึ่งทำให้ $m(E^f_{n_\varepsilon}(\varepsilon)) < \infty$

ให้ $A^\varepsilon_n = \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$

จะได้ $A^\varepsilon_n \subset E^f_{n_\varepsilon}(\varepsilon)$ และ $m(A^\varepsilon_n) < \infty$, $\forall n \geq n_\varepsilon$

ดังนั้น สำหรับทุก $n \geq n_\varepsilon$ จะได้ว่า

$$\varepsilon \cdot m(A_n^{\varepsilon}) \leq \int_{A_n^{\varepsilon}} |f_n - f|$$

$$= \int_E |f_n - f| \chi_{A_n^{\varepsilon}}$$

$$= \int_E |f_n \chi_{A_n^{\varepsilon}} - f \chi_{A_n^{\varepsilon}}|$$

เนื่องจาก $f_n \chi_{A_n^{\varepsilon}} \xrightarrow{L^1} f \chi_{A_n^{\varepsilon}}$

ให้ $\delta > 0$, จะมีจำนวนเต็มบวก N_δ ที่ทำให้

$$\int_E |f_n \chi_{A_n^{\varepsilon}} - f \chi_{A_n^{\varepsilon}}| < \varepsilon \delta, \forall n \geq N_\delta$$

จะได้ว่า

$$\varepsilon \cdot m(A_n^{\varepsilon}) \leq \int_E |f_n \chi_{A_n^{\varepsilon}} - f \chi_{A_n^{\varepsilon}}| < \varepsilon \delta, \forall n \geq N_\delta$$

ทำให้ $m(A_n^{\varepsilon}) < \delta, \forall n \geq N_\delta$

ดังนั้น $\lim_{n \to \infty} m(A_n^{\varepsilon}) = 0$

นั่นคือ $f_n \xrightarrow{m} f$ $\square$

สำหรับทฤษฎี 4.1.1 ถ้า $\{f_n\}$ ไม่ไฟไนท์เนสเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f แล้ว ถึงแม้ว่า $f_n \chi_A \xrightarrow{L^1} f \chi_A, \forall A \subset E$ ซึ่ง $m(A) < \infty$ ก็ตาม ทฤษฎีจะไม่เป็นจริงโดยทั่ว ๆ ไป ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 4.1.1</u> ให้ $f_n, f : [0,\infty) \longrightarrow R$ โดยที่

$$f_n(x) = \chi_{[0,n]}(x) \quad , \forall x \in [0,\infty)$$

และ $f(x) = 1 \quad , \forall x \in [0,\infty)$

สำหรับ $\varepsilon = \frac{1}{2}$

จะได้ $\{x \in [0,\infty) : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2}\} = (n,\infty)$

ทำให้ $m(\{x \in [0,\infty) : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2}\}) = m((n,\infty)) = \infty$

และ $m(E_n^f(\frac{1}{2})) = \infty \quad , \forall n \geq 1$

ดังนั้น $\{f_n\}$ ไม่ไฟไนท์เนสเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f และ $f_n \overset{m}{\not\longrightarrow} f$

สำหรับแต่ละ $A \subset [0,\infty)$ และ $m(A) < \infty$ จะได้ว่า

$$\int_A |f_n - f| = m(A \cap (n,\infty)) \quad , \forall n$$

ดังนั้น $f_n\chi_A \overset{L^1}{\longrightarrow} f\chi_A \quad , \forall A \subset [0,\infty)$ ที่ $m(A) < \infty$

นั่นคือ คุณสมบัติไฟไนท์เนสเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f ของ $\{f_n\}$ มีความจำเป็นสำหรับทฤษฎี 4.1.1

ตัวอย่างต่อไปนี้จะเป็นการแสดงว่า สมมุติฐานของทฤษฎี 4.1.1 นั้นไม่เป็นการเพียงพอที่จะสรุปว่า $f_n \overset{a.u.}{\longrightarrow} f$ โดยตัวอย่างนี้นำมาจาก [1] หน้า 58

ตัวอย่าง 4.1.2 สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n ให้ j เป็นจำนวนเต็มบวกที่ใหญ่ที่สุดที่ $2^j \leq n$ เขียน $n = 2^j + k$ สำหรับ k บางตัวที่ $0 \leq k \leq 2^j - 1$

ให้ $f_n, f : [0,1] \dashrightarrow R$ โดยที่

$$f_n = \chi_{[k.2^{-j}, (k-1)2^{-j}]} \text{ บน } [0,1]$$

และ $f(x) = 0, \forall x \in [0,1]$

เนื่องจาก $E_n^f(\alpha) \subset [0,1], \forall \alpha > 0, \forall n \geq 1$

จะได้ $m(E_n^f(\alpha)) \leq 1 < \infty, \forall n \geq 1$

ทำให้ (f_n) ไฟไนท์เนสเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f และสำหรับแต่ละ $A \subset [0,1]$ และ $n \geq 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} f_n \chi_A &\leq \int_{[0,1]} f_n \chi_{[0,1]} \\
&= \int_{[0,1]} f_n \\
&= \int_{[0,1]} \chi_{[k.2^{-j}, (k-1)2^{-j}]} \\
&= m([k.2^{-j}, (k+1)2^{-j}]) \\
&= \frac{1}{2^j}
\end{aligned}$$

ทำให้ $\int_{[0,1]} f_n \chi_A \xrightarrow{n \to \infty} 0$ เพราะว่า $\int_{[0,1]} |f_n \chi_A - f\chi_A| = \int_{[0,1]} f_n \chi_A$

ดังนั้น $f_n \chi_A \xrightarrow{L^1} f\chi_A$

เนื่องจากสำหรับแต่ละ $x \in [0,1]$ และ $\forall j \geq 1$ นั้น

$x \in [k.2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$, สำหรับ k บางตัวที่ $0 \leq k \leq 2^{j}-1$

ทำให้ $\chi_{[k.2^{-j}, (k+12^{-j}]}(x) = 1$

จะได้ว่า $\chi_{[k.2^{-j},(k+1)2^{-j}]} \not\longrightarrow 0$ บน $[0,1]$

นั่นคือ $f_n \xrightarrow{a.u.}\!\!\!\!\!\!/\;\; f$

4.2 เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่ $f_n \xrightarrow{a.u.} f$

สำหรับการลู่เข้าแบบเกือบยูนิฟอร์มของลำดับของเมเชอเรเบิลฟังก์ชันนั้น มีประโยชน์อย่างมากในการศึกษา Real Analysis ดังเห็นได้จากการพิสูจน์ทฤษฎี Bounded Convergence Theorem และทฤษฎีอื่น ๆ อีกหลายทฤษฎี ดังนั้นทฤษฎีต่อไปนี้จะเป็นการให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอของการลู่เข้าแบบเกือบยูนิฟอร์มของลำดับของเมเชอเรเบิลฟังก์ชันอีกเงื่อนไขหนึ่ง ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่แตกต่างไปจากการลู่เข้าแบบเกือบยูนิฟอร์มที่ผ่านมา

<u>ทฤษฎี 4.2.1</u> ถ้า $f_n, f : E \longrightarrow R_e$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน $\forall n \geq 1$

f_n และ f ไฟไนท์ a.e. บน E $\forall n \geq 1$ แล้วได้ว่า $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมี $A_\varepsilon \subset E$, $m(A_\varepsilon) < \varepsilon$

และจะมีจำนวนเต็มบวก N_ε ซึ่ง $\sup\limits_{x \in E - A_\varepsilon} |f_n - f| < \varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon$

<u>พิสูจน์</u> (===>) ให้ $\varepsilon > 0$

จะมี A_ε ซึ่ง $m(A_\varepsilon) < \varepsilon$

และ $f_n \longrightarrow f$ แบบยูนิฟอร์มบน $E - A_\varepsilon$

นั่นคือ ถ้า $x \in E - A_\varepsilon$ แล้ว จะมี N_ε ซึ่ง

$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall x \in E - A_\varepsilon$

ดังนั้น $\sup\limits_{x \in E - A_\varepsilon} |f_n - f| < \varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon$

(<===) ให้ $\varepsilon > 0$

สำหรับ $k = 1, 2, \ldots$ เลือก $A_k \subset E$ ซึ่ง $m(A_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$

และเลือก N_k ซึ่ง $\sup\limits_{x \in E - A_k} |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2^k}, \forall n \geq N_k$

ให้ $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$

จะได้ $m(A) = m(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} m(A_k) < \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$

ทำให้ $m(A) < \varepsilon$

ให้ $\delta > 0$, เลือก k_o ซึ่ง $\frac{\varepsilon}{2^{k_o}} < \delta$

ให้ $N_\delta = N_{k_o}$

ถ้า $x \in E - A$ แล้ว $x \in E - A_{k_o}$

จะได้ $\sup\limits_{x \in E - A_{k_o}} |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2^{k_o}}, \forall n \geq N_{k_o}$

ทำให้ $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2^{k_o}}, \forall n \geq N_{k_o}, \forall x \in E - A_{k_o}$

$|f_n(x) - f(x)| < \delta, \forall n \geq N_\delta, \forall x \in E - A_{k_o}$

นั่นคือ $f_n \dashrightarrow f$ แบบยูนิฟอร์ม บน $E - A$

ดังนั้น $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ $\square$

4.3 ทฤษฎีอีเกอรอฟ บนโดเมนที่เป็นเมเชอเรเบิลเซตใดๆ สำหรับระบบแบบต่อเนื่องของเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน

ทฤษฎีอีเกอรอฟนั้น เดิมจะเป็นจริงบนเมเชอเรเบิลเซต E ซึ่ง $m(E) < \infty$ เท่านั้น ทฤษฎี 3.1.1 ได้ขยายทฤษฎีอีเกอรอฟดังกล่าวออกไปถึงเมเชอเรเบิลเซต E ใดๆ โดยให้ลำดับของเมเชอเรเบิลฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องมีคุณสมบัติบางประการ ส่วนทฤษฎี 3.2.1 นั้น เป็นการขยายทฤษฎีอีเกอรอฟออกไปสำหรับระบบแบบต่อเนื่องของเมเชอเรเบิลฟังก์ชันบนโดเมน $[0,1]$ ต่อไปนี้จะเป็นการขยายทฤษฎี 3.2.1 โดยแทน $[0,1]$ ด้วย E เมื่อ E เป็นเมเชอเรเบิลเซตใดๆ

เพื่อจุดมุ่งหมายดังกล่าว เราจึงจำเป็นต้องขยายนิยาม 3.1.1 ออกไปดังนี้

<u>สัญลักษณ์</u> ถ้า $f^* : E \times (0,1] \dashrightarrow R_e$ โดยที่ $\emptyset \neq E \subset R$, $E \in \mathcal{M}$

และสำหรับแต่ละ $x \in E$ ให้ $f_h(x) = f^*(x,h)$ เป็นฟังก์ชันบน $(0,1]$,

ให้ $f_h, f : E \dashrightarrow R_e$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน, $\forall h \in (0,1]$

f_h, f ไฟไนท์ a.e. บน E, $\forall h \in (0,1]$, สำหรับแต่ละจำนวนจริง $\alpha > 0$

และแต่ละจำนวนเต็มบวก n ให้

$$E_n^f(\alpha)^* = \bigcup_{i=n}^{\infty} \{x \in E : |f_h(x) - f(x)| \geq \alpha \text{ , สำหรับบาง } h \text{ ใน } [\tfrac{1}{i+1}, \tfrac{1}{i}]\}$$

<u>พรอพโพซิชัน 4.3.1</u> ให้ $f^*: E \times (0,1] \dashrightarrow R_e$ โดยที่ E เป็นเมเชอเรเบิลสับเซตของ R และสำหรับแต่ละ $x \in E$ ถ้า $f_h(x) = f^*(x,h)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับ $h \in (0,1]$, ให้ $f_h, f : E \dashrightarrow R_e$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน $\forall h \in (0,1]$, f_h, f ไฟไนท์ a.e. บน E ดังนั้นสำหรับแต่ละจำนวนจริง $\alpha > 0$ และแต่ละจำนวนเต็มบวก n แล้วจะได้ว่า

(i) $E_n^f(\alpha)^* \in \mathcal{M}$

(ii) $E_{n+1}^f(\alpha)^* \subset E_n^f(\alpha)^*$

<u>พิสูจน์</u> (i) สำหรับจำนวนจริง $\alpha > 0$ และจำนวนเต็มบวก i

ให้ $D = \{h_k : k=1,2,\ldots\}$ เป็นเดนซ์สับเซตของ $[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]$

และให้ $E_k = \{x \in E : |f_{h_k}(x)-f(x)| \leq \alpha\}$, $k=1,2,\ldots$

เนื่องจาก f_h เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน, $\forall h \in (0,1]$

ดังนั้น f_{h_k} เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน, $\forall h_k \in D$

ทำให้ $|f_{n_k} - f|$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน, $\forall k \geq 1$

ดังนั้น $E_k = \{x \in E : |f_{h_k}(x)-f(x)| \leq \alpha\} \in \mathcal{M}$, $\forall k \geq 1$

ทำให้ $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$

ต่อไปจะแสดงว่า

$$\{x \in E : |f_h(x)-f(x)| \leq \alpha, \forall h \in [\tfrac{1}{i+1}, \tfrac{1}{i}]\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$$

ให้ $y \in \{x \in E : |f_h(x) - f(x)| \leq \alpha, \forall h \in [\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]\}$

จะได้ $|f_h(y) - f(y)| \leq \alpha, \forall h \in [\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]$

ทำให้ $|f_{h_k}(y) - f(y)| \leq \alpha, \forall h_k \in D$

ดังนั้น $y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in E : |f_{h_k}(x) - f(x)| \leq \alpha\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$

นั่นคือ $\{x \in E : |f_h(x) - f(x)| \leq \alpha, \forall h \in [\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]\}$

$$\subset \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ให้ $z \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$

$z \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in E : |f_{h_k}(x) - f(x)| \leq \alpha\}$

จะได้ $|f_{h_k}(z) - f(z)| \leq \alpha, \forall k \geq 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$

เนื่องจาก D เป็นเดนซ์สับเซตของ $[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]$

ดังนั้น สำหรับแต่ละ $h \in [\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]$

จะได้ว่า $h \in D$ หรือ h เป็นจุดลิมิตของ D

ถ้า $h \in D$ แล้ว จาก (*) จะได้ $|f_h(z) - f(z)| \leq \alpha \quad \ldots\ldots\ldots (**)$

ถ้า h เป็นจุดลิมิตของ D แล้ว

จะมี $\{h_{k_n}\} \subset D$ ซึ่ง $\lim\limits_{n \to \infty} h_{k_n} = h$

โดยความต่อเนื่องของฟังก์ชัน $f_h(z)$

จะได้ว่า $\lim\limits_{n \to \infty} f_{h_{k_n}}(z) = f_h(z)$

จาก (*) , $|f_{h_{k_n}}(z) - f(z)| \le \alpha , \forall n = 1,2,...$

จะได้ $\lim\limits_{n \to \infty} |f_{h_{k_n}}(z) - f(z)| \le \alpha$

ดังนั้น $|f_h(z) - f(z)| \le \alpha$ ....(***)

จาก (**) และ (***) จะได้ว่า

$|f_h(z) - f(z)| \le \alpha , \forall h \in [\frac{1}{i+1} , \frac{1}{i}]$

ดังนั้น $z \in \{x \in E: |f_h(x)-f(x)| \le \alpha, \forall h \in [\frac{1}{i+1} , \frac{1}{i}]\}$

นั่นคือ $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k \subset \{x \in E: |f_h(x)-f(x)| \le \alpha, \forall h \in [\frac{1}{i+1} , \frac{1}{i}]\}$ ....(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า

$\{x \in E : |f_h(x)-f(x)| \le \alpha, \forall h \in [\frac{1}{i+1} , \frac{1}{i}]\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$

ดังนั้น $\{x \in E : |f_h(x)-f(x)| \le \alpha, \forall h \in [\frac{1}{i+1} , \frac{1}{i}]\} \in \mathcal{M}$

เนื่องจาก $\mathcal{M}$ เป็น σ - แอลยีบรา จะได้ว่า

$\{x \in E: |f_h(x)-f(x)| > \alpha,$ สำหรับบาง h ใน $[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]\} \in \mathcal{M}$

สำหรับทุก ๆ $\alpha > 0$ และทุก ๆ $i = 1,2,\ldots$

นั่นคือ $\{x \in E: |f_h(x)-f(x)| > \alpha - \frac{1}{k}$, สำหรับบาง h ใน $[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]\} \in \mathcal{M}, \forall k \geq 1$

จะได้ $\bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in E: |f_h(x)-f(x)| > \alpha - \frac{1}{k}$, สำหรับบาง h ใน $[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]\} \in \mathcal{M}$

โดยอาศัยการเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของ $f_h(x)$ สำหรับแต่ละ x

และการเป็นคอมแพคเซตของ $[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]$ จะได้

$\bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in E: |f_h(x)-f(x)| > \alpha - \frac{1}{k}$, สำหรับบาง h ใน $[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]\}$

$= \{x \in E: |f_h(x)-f(x)| \geq \alpha,$ สำหรับบาง h ใน $[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]\}$

ทำให้ $\{x \in E: |f_h(x)-f(x)| \geq \alpha,$ สำหรับบาง h ใน $[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]\} \in \mathcal{M}$

ดังนั้นสำหรับแต่ละจำนวนจริง $\alpha > 0$ และแต่ละจำนวนเต็มบวก n

จะได้ว่า $\bigcup_{i=n}^{\infty} \{x \in E: |f_h(x)-f(x)| \geq \alpha,$ สำหรับบาง h ใน $[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]\} \in \mathcal{M}$

แสดงว่า $E_n^f(\alpha)^* \in \mathcal{M}$

(ii) สำหรับจำนวนจริง $\alpha > 0$ และจำนวนเต็มบวก n

ให้ $y \in E_{n+1}^f(\alpha)^*$

จะได้

$y \in \bigcup_{i=n+1}^{\infty} \{x \in E: |f_h(x)-f(x)| \geq \alpha,$ สำหรับบาง h ใน $[\frac{1}{i+1}]\}$

$y \in \bigcup_{i=n+1}^{\infty} \{x \in E : |f_h(x)-f(x)| \geq \alpha,$ สำหรับบาง h ใน $[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]\}$

$\bigcup \{x \in E : |f_h(x)-f(x)| \geq \alpha,$ สำหรับบาง h ใน $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]\}$

$y \in \bigcup_{i=n}^{\infty} \{x \in E : |f_h(x)-f(x)| \geq \alpha,$ สำหรับบาง h ใน $[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]\}$

$y \in E_n^f(\alpha)^*$

ดังนั้น $E_{n+1}^f(\alpha)^* \subseteq E_n^f(\alpha)^*$ □

<u>นิยาม 4.3.1</u> ให้ $f^* : E \times (0,1] \longrightarrow R_e$ โดยที่ E เป็นเมเชอเรเบิลสับเซต ของ R และสำหรับแต่ละ $x \in E$ ถ้า $f_h(x) = f^*(x,h)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง สำหรับ $h \in (0,1]$, ให้ $f_h, f : E \longrightarrow R_e$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน $\forall h \in (0,1]$, f_h, f ไฟไนท์ a.e. บน E $\forall h \in (0,1]$ แล้ว

(ก) เราจะกล่าวว่า <u>$\{f_h\}$ ไฟไนท์เนสเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f</u> ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริง $\alpha > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก n_α ซึ่งทำให้

$m(E_{n_\alpha}^f(\alpha)^*) < \infty$

(ข) เราจะกล่าวว่า <u>$\{f_h\}$ วานิชชิงเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f</u> ถ้า

$\lim_{n \to \infty} m(E_n^f(\alpha)^*) = 0$ สำหรับแต่ละจำนวนจริง $\alpha > 0$

<u>พรอพโพซิชัน 4.3.2</u> ให้ $f^* : E \times (0,1] \longrightarrow R_e$ โดยที่ E เป็นเมเชอเรเบิลสับเซตของ R และสำหรับแต่ละ $x \in E$ ถ้า $f_h(x) = f^*(x,h)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับ $h \in (0,1]$ ให้ $f_h, f : E \longrightarrow R_e$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน $\forall h \in (0,1]$ f_h, f ไฟไนท์ a.e. บน $E, \forall h \in (0,1]$ ดังนั้นจะได้ว่า $\{f_h\}$ ไฟไนท์เนสเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f และ $\lim_{h \to 0^+} f_h(x) = f(x)$ a.e. บน E

ก็ต่อเมื่อ $\{f_h\}$ วานิชชิงเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f

<u>พิสูจน์</u> (===>) ไม่เป็นการเสียหาย (W L O G) ที่จะกำหนดให้

$$\lim_{h \to 0^+} f_h(x) = f(x), \forall x \in E$$

ทำให้ได้ว่า สำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n^f(\varepsilon)^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} \{x \in E : |f_h(x) - f(x)| \geq \varepsilon, \text{สำหรับบาง } h \text{ ใน } [\tfrac{1}{i+1}, \tfrac{1}{i}]\}$$

$$= \emptyset$$

จากพรอพโพซิชัน 4.3.1, $E_{n+1}^f(\varepsilon)^* \subset E_n^f(\varepsilon)^*, \forall n \geq 1$

และเนื่องจาก $\{f_h\}$ ไฟไนท์เนสเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f

ดังนั้นจะมี n_ε ซึ่ง $m(E_{n_\varepsilon}^f(\varepsilon)^*) < \infty$ ทำให้

$$\lim_{n \to \infty} m(E_n^f(\varepsilon)^*) = m(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n^f(\varepsilon)^*) = 0$$

ดังนั้น $\{f_h\}$ วานิชชิงเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f

(<===) ให้ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า $\lim_{n \to \infty} m(E_n^f(\varepsilon)^*) = 0$

ดังนั้นจะมี n_ε ซึ่งทำให้ $m(E_n^f(\varepsilon)^*) < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$

ทำให้ $\{f_h\}$ ไฟไนท์เนสเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f

สำหรับแต่ละ $k \geq 1$ เลือก n_k ซึ่ง $n_1 < n_2 < \cdots$

และ $m(E_{n_k}^f(\frac{1}{k})^*) < \frac{1}{k}, \forall k \geq 1$

ให้ $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k}^f(\frac{1}{k})^*$ จะได้ $m(F) < \frac{1}{k}, \forall k \geq 1$

ดังนั้น $m(F) = 0$

ให้ $\varepsilon > 0$ จะแสดงว่า สำหรับแต่ละ $y \notin F$

จะมี $\delta \in (0,1]$ ที่ทำให้ $|f_h(y)-f(y)| < \varepsilon, \forall h \in (0,\delta]$

ถ้า $y \notin F$ แล้ว $y \in F^c$ จะได้ $y \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (E^f_{n_k}(\frac{1}{k})^*)^c$

ทำให้ $y \in (E^f_{n_{k_o}}(\frac{1}{k_o})^*)^c$ สำหรับ k_o บางตัว

จากพรอพโพซิชัน 4.3.1 ได้ว่า $(E^f_{n_{k_o}}(\frac{1}{k_o})^*)^c \subset (E^f_{n_k}(\frac{1}{k})^*)^c, \forall k \geq k_o$

เลือก $k_1 \geq k_o$ ซึ่ง $\frac{1}{k_1} < \varepsilon$

จะได้ว่า $y \in \bigcap_{i=n_{k_1}}^{\infty} \{x \in E : |f_h(x)-f(x)| < \frac{1}{k_1}, \forall h \in [\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]\}$

ทำให้ $|f_h(y)-f(y)| < \frac{1}{k_1}, \forall h \in [\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}], \forall i \geq n_{k_1}$

ให้ $\delta = \frac{1}{n_{k_1}}$ และ $h \in (0, \frac{1}{n_{k_1}}]$

ดังนั้นจะมี $i \geq n_{k_1}$ ที่ทำให้ $h \in [\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]$

และจะได้ $|f_h(y)-f(y)| < \frac{1}{k_1} < \varepsilon$

นั่นคือ $\lim_{h \to 0^+} f_h(x) = f(x)$ a.e. บน E ☐

<u>พรอพโพซิชัน 4.3.3</u> ให้ $f^* : E \times (0,1] \to R_e$ โดยที่ E เป็นเมเชอเรเบิลสับเซตของ R และสำหรับแต่ละ $x \in E$ ถ้า $f_h(x) = f^*(x,h)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับ $h \in (0,1]$, ให้ $f_h, f : E \to R_e$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน $\forall h \in (0,1]$, f_h, f ไฟไนท์ a.e.บน E $,\forall h \in (0,1]$ ดังนั้นจะได้ว่า $\{f_h\}$ วานิชชิงเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f ก็ต่อเมื่อ $f_h \xrightarrow[h \to 0^+]{a.u.} f$

<u>พิสูจน์</u> ($\Longrightarrow$) ให้ $\delta > 0$

จะหา $F_\delta \subset E$ ที่ $m(F_\delta) < \delta$

และ $f_h \xrightarrow[h \to 0^+]{} f$ แบบยูนิฟอร์ม บน $E - F_\delta$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n \to \infty} m(E_n^f(\frac{1}{k})^*) = 0 \quad , \forall k \geq 1$

เลือก $n_1 < n_2 < \ldots$ ซึ่ง $m(E_{n_k}^f(\frac{1}{k})^*) < \frac{\delta}{2^k} \, , \forall k \geq 1$

ให้ $F_\delta = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_{n_k}^f(\frac{1}{k})^*$

จะได้ $m(F_\delta) < \delta$

และถ้า $z \notin F_\delta$ แล้ว $z \in E_{n_k}^f(\frac{1}{k})^{*c} \, , \forall k \geq 1$

ทำให้ $z \in \bigcap\limits_{i=n_k}^{\infty} \{x \in E : |f_h(x)-f(x)| < \frac{1}{k} \, , \forall h \in [\frac{1}{i+1} \, , \frac{1}{i}]\} , \forall k \geq 1$

จะได้ว่า $|f_h(z)-f(z)| < \frac{1}{k} \, , \forall h \in (0, \frac{1}{n_k}] \, , \forall k \geq 1$

ดังนั้น $f_h \xrightarrow[h \to 0^+]{} f$ แบบยูนิฟอร์ม บน $E - F_\delta$

นั่นคือ $f_h \xrightarrow[h \to 0^+]{a.u.} f$

($\Longleftarrow$) ให้ $\alpha > 0$

สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $B_\varepsilon \subset E$ ซึ่ง $m(B_\varepsilon) < \varepsilon$

และ $f_h \xrightarrow[h \to 0^+]{} f$ แบบยูนิฟอร์ม บน $E - B_\varepsilon$

ทำให้ $\{x \in E : |f_h(x)-f(x)| \geq \alpha$, สำหรับบาง h ใน $[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]\} \subset B_\varepsilon$

สำหรับทุก i เมื่อ i ใหญ่เพียงพอ

ดังนั้นเลือก n_α ซึ่ง

$$\bigcup_{i=n_\alpha}^{\infty} \{x \in E : |f_h(x)-f(x)| \geq \alpha, \text{ สำหรับบาง } h \text{ ใน} [\tfrac{1}{i+1}, \tfrac{1}{i}]\} \subset B_\varepsilon$$

ทำให้ $E_n^f(\alpha)^* \subset B_\varepsilon$, $\forall n \geq n_\alpha$

ซึ่งจะได้ $m(E_n^f(\alpha)^*) < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\alpha$

ดังนั้น $\lim\limits_{n \to \infty} m(E_n^f(\alpha)^*) = 0$

นั่นคือ $\{f_h\}$ วานิชชิงเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f $\square$

<u>ทฤษฎี 4.3.1</u> ให้ $f^* : E \times (0,1] \to R_e$ โดยที่ E เป็นเมเชอเรเบิลสับเซต ของ R และสำหรับแต่ละ $x \in E$ ถ้า $f_h(x) = f^*(x,h)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับ $h \in (0,1]$, ให้ $f_h, f : E \to R_e$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน $\forall h \in (0,1]$, f_h, f ไฟไนท์ a.e. บน E $\forall h \in (0,1]$ ดังนั้นข้อความต่อไปนี้จะสมมูลกัน

(i) $\{f_h\}$ ไฟไนท์เนสเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f

และ $\lim\limits_{h \to 0^+} f_h(x) = f(x)$ a.e. บน E

(ii) $\{f_h\}$ วานิชชิงเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f

(iii) $f_h \xrightarrow[h \to 0^+]{a.u.} f$

จะเห็นได้ว่าทฤษฎี 4.3.1 นี้ เป็นการขยายทฤษฎี 3.2.1 โดยการแทน [0,1] ในทฤษฎี 3.2.1 ด้วยเมเชอเรเบิลเซต E

ต่อไปนี้จะเป็นตัวอย่างที่สอดคล้องกับทฤษฎี 4.3.1

<u>ตัวอย่าง 4.3.1</u> ให้ $f^* : R \times (0,1] \longrightarrow R$ โดยที่

$$f_h(x) = f^*(x,h) = h \quad , \forall x \in R$$

และ $f(x) = 0 \quad , \forall x \in R$

จะได้ว่า $f_h , f : R \longrightarrow R$

และสำหรับแต่ละ $x \in R$, $f_h(x) = f^*(x,h) = h$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(0,1]$

จะเห็นได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้นี้สอดคล้องกับทฤษฎี 4.3.1 กล่าวคือ

สำหรับแต่ละจำนวนจริง $\alpha > 0$

ถ้า $\alpha > 1$ แล้วจะได้ $m(E^f_1(\alpha)^*)$

$= m(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{x \in E: |f_h(x)-f(x)| \geq \alpha$, สำหรับบาง h ใน $[\frac{1}{i+1} , \frac{1}{i}]\})$

$= m(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{x \in E: h \geq \alpha$, สำหรับบาง h ใน $[\frac{1}{i+1} , \frac{1}{i}]\})$

$= m(\emptyset) = 0 < \infty$ .... (1)

ถ้า $0 < \alpha \leq 1$ แล้ว เลือก $n_\alpha' \geq 1$ และ $\frac{1}{n_\alpha'} < \alpha$ จะได้

$m(E^f_{n_\alpha'}(\alpha)^*) = m(\bigcup_{i=n_\alpha'}^{\infty}\{x \in E: |f_h(x)-f(x)| \geq \alpha$, สำหรับบาง h ใน $[\frac{1}{i+1},\frac{1}{i}]\})$

$= m(\bigcup_{i=n_\alpha'}^{\infty}\{x \in E: h \geq \alpha$, สำหรับบาง h ใน $[\frac{1}{i+1} , \frac{1}{i}]\})$

$= m(\emptyset) = 0 < \infty$ .... (2)

จาก (1) และ (2), สำหรับแต่ละจำนวนจริง $\alpha > 0$, เลือก $n_\alpha = n'_\alpha$

ซึ่งจะทำให้ $m(E^f_{n_\alpha}(\alpha)^*) < \infty$

ดังนั้น $\{f_h\}$ ไฟไนท์เนสเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f

และจะเห็นว่า $m(E^f_n(\alpha)^*) = 0 , \forall n \geq n'_\alpha$

ซึ่งจะได้ว่า $\lim\limits_{n \to \infty} m(E^f_n(\alpha)^*) = 0$

นั่นคือ $\{f_h\}$ วานิชชิงเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f

และจะได้ $f_h \xrightarrow[h \to 0^+]{a.u.} f$

จากทฤษฎี 4.3.1 นั้น มีเงื่อนไขที่สำคัญอันหนึ่งคือ สำหรับแต่ละ $x \in E$ เรากำหนดให้ $f_h(x) = f^*(x,h)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับ $h \in (0,1]$ ตัวอย่างต่อไปนี้จะเป็นการแสดงว่าความต่อเนื่องของฟังก์ชัน $f_h(x)$ บน $(0,1]$ ดังกล่าว เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับทฤษฎี 4.3.1 ซึ่งตัวอย่างนี้นำมาจาก แบบฝึกหัดข้อ 3 หน้า 172 ใน [7]

<u>ตัวอย่าง 4.3.2</u> กำหนดให้ E_i เป็น เซตในหัวข้อ 2.2

สำหรับ $i = 0,1,2,...$(<u>หมายเหตุ</u>, $\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i = [0,1)$)

ให้ $f_h, f : [0,1] \to R$ โดยที่สำหรับแต่ละ $h \in (0,1)$

ซึ่ง $h \in [\frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^i})$ สำหรับ i บางตัวใน $\{0,1,2,...\}$

กำหนด

$$f_h(x) = \begin{cases} 1 , & \text{ถ้า } x \in E_i \text{ และ } x = 2^{i+1}h - 1 \\ 0 , & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

$$f_1(x) = 0 \quad ; \forall x \in [0,1]$$

และ $f(x) = 0 \quad ; \forall x \in [0,1]$

(ในที่นี้ $f^* : [0,1] \times (0,1] \longrightarrow R$ และสำหรับแต่ละ $x \in [0,1]$

$f_h(x) = f^*(x,h)$ เป็นฟังก์ชัน บน $(0,1]$)

สำหรับแต่ละ $x' \in [0,1)$ จะเห็นว่า $x' \in E_{i_o}$ สำหรับ i_o บางตัว

เลือก $h_{x'} = \frac{x'+1}{2^{i_o+1}}$ จะได้ว่า $f_{h_{x'}}(x') = 1$

แต่สำหรับทุก ๆ $h \in (0,1]$ ที่ $0 < |h_{x'} - h| < \frac{1}{2^{i_o+3}}$ นั้น $f_h(x')=0$

ดังนั้นที่จุด x', $f_h(x')$ ไม่ต่อเนื่องที่ $h_{x'}$

ซึ่งจะได้ว่า สำหรับ $x \in [0,1)$, $f_h(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(0,1]$

สำหรับแต่ละจำนวนจริง $r \in R$ และแต่ละ $h \in (0,1)$

พิจารณา

$$\{x \in [0,1] : f_h(x) \geq r\} = \begin{cases} \emptyset & \text{,ถ้า } r > 1 \\ \emptyset \text{ หรือ } \{2^{i+1}h-1\} \text{ สำหรับ } i \text{ บางตัว} & \text{,ถ้า } 0<r\leq 1 \\ [0,1] & \text{,ถ้า } r \leq 0 \end{cases}$$

ทำให้ $\{x \in [0,1] : f_h(x) \geq r\} \in \mathcal{M}$

ดังนั้น f_h เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน $\forall h \in (0,1]$

สำหรับ $x \in [0,1)$ จะได้ว่า $x \in E_{i_x}$ สำหรับ i_x บางตัว

เลือก $0 < \delta < \frac{1}{2^{i_x+1}}$, ดังนั้นสำหรับจำนวนจริง $\alpha > 0$

จะได้ว่า $|f_h(x)-f(x)| = f_h(x) = 0 < \alpha, \forall h \in (0,\delta]$

ทำให้ $\lim\limits_{h \to 0^+} f_h(x) = f(x) \quad , \forall x \in [0,1)$

นอกจากนี้จะเห็นว่า สำหรับแต่ละจำนวนจริง $\alpha > 0$ และสำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n จะได้

$E_n^f(\alpha)^* \subset [0,1]$ ซึ่งจะได้ว่า $m(E_n^f(\alpha)^*) \leq 1 < \infty$

ทำให้ $\{f_h\}$ ไฟไนท์เนสเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f

ต่อไปจะแสดงว่า $f_h \xrightarrow[h \to 0^+]{a.u.}\!\!\!\!\!\!/\;\; f$

สำหรับแต่ละ $F \subset [0,1]$ ซึ่ง $m([0,1] - F) < \frac{1}{2}$

ทำให้ $m(F) > 0$

โดยพรอพโพซิชัน 2.2.3 จะได้ $F \cap E_i \neq \emptyset$ แบบอนันต์

สำหรับแต่ละ j จะมี i ซึ่ง $i \geq j$ และ $F \cap E_i \neq \emptyset$

เลือก $x \in F \cap E_i$ และให้ $h_x = \frac{x+1}{2^{i+1}}$ จะได้

$|f_{h_x}(x) - f(x)| = f_{h_x}(x) = 1 > \frac{1}{2}$

ทำให้ $f_h \xrightarrow[h \to 0^+]{}\!\!\!\!\!\!/\;\; f$ แบบยูนิฟอร์ม บน F

นั่นคือ $f_h \xrightarrow[h \to 0^+]{a.u.}\!\!\!\!\!\!/\;\; f$

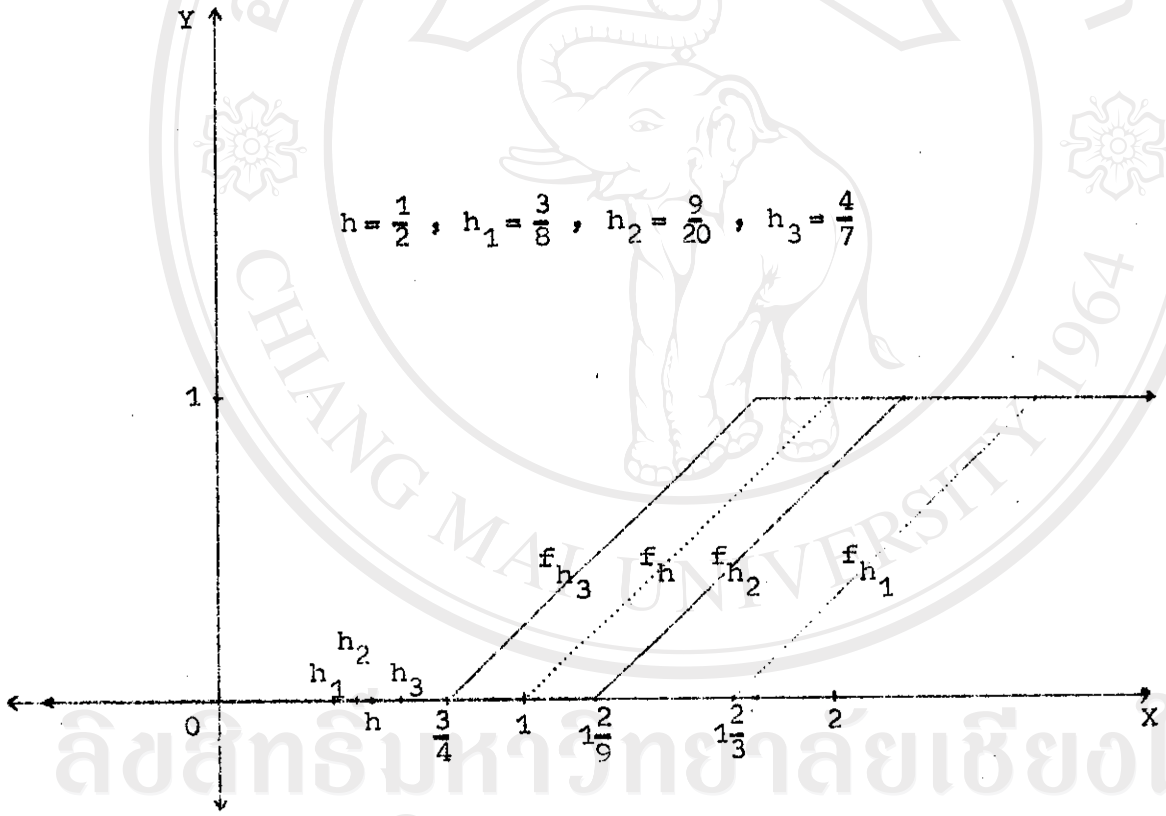
จากการศึกษาการขยายทฤษฎีอีเกอรอฟออกไปในกรณีที่ E เป็นเมเชอเรเบิลเซตใด ๆ สำหรับระบบแบบต่อเนื่องของเมเชอเรเบิลฟังก์ชันนั้น จะเห็นได้ว่าทำได้โดยการสร้างคุณสมบัติสำหรับเมเชอเรเบิลฟังก์ชันดังกล่าวขึ้นมาอันหนึ่งคือ ให้ฟังก์ชันมีคุณสมบัติไฟไนท์เนสเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f ตัวอย่างต่อไปนี้จะเป็นการแสดงว่าเงื่อนไขนี้มีความจำเป็นสำหรับการขยายทฤษฎีอีเกอรอฟ

<u>ตัวอย่าง 4.3.3</u> ให้ $f_h , f : R \longrightarrow R$, $h \in (0,1]$ โดยที่

$$f_h(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ถ้า } x \in (\frac{1}{h}, \infty) \\ x - (\frac{1}{h} - 1) & , \text{ถ้า } x \in [\frac{1}{h} - 1, \frac{1}{h}] \\ 0 & , \text{ถ้า } x \in (-\infty, \frac{1}{h} - 1) \end{cases}$$

และ $f(x) = 0 , \forall x \in R$

(ในที่นี้ $f^* : R \times (0,1] \longrightarrow R$, และสำหรับแต่ละ $x \in R$
$f_h(x) = f^*(x,h)$ เป็นฟังก์ชัน บน $(0,1]$)



จะเห็นว่าสำหรับแต่ละ $x \in R$ จะได้ว่า $f_h(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับ $h \in (0,1]$

และ $\lim_{h \to 0^+} f_h(x) = f(x) , \forall x \in R$

ถ้าให้ $\alpha = \frac{1}{2}$ จะได้ว่า

$$\bigcup_{i=n}^{\infty}\{x\in R: |f_h(x)-f(x)| \geq \tfrac{1}{2}, \text{สำหรับบาง } h \text{ ใน } [\tfrac{1}{i+1}, \tfrac{1}{i}]\} = [n-\tfrac{1}{2}, \infty), \forall n \geq 1$$

ดังนั้น $m(E_n^f(\alpha)^*) = \infty, \forall n \geq 1$

ซึ่งทำให้ $\{f_h\}$ ไม่ไฟไนท์เนสเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f

สำหรับแต่ละ $F \subseteq R$ ซึ่ง $m(R-F) < \frac{1}{2}$

จะได้ว่า $F \cap (\frac{1}{h}, \infty) \neq \emptyset, \forall h \in (0,1]$

ให้ $x \in F \cap (\frac{1}{h}, \infty)$ จะได้

$|f_h(x)-f(x)| = f_h(x) = 1 > \frac{1}{2}$

ทำให้ $f_h \underset{h\to 0^+}{\not\longrightarrow} f$ แบบยูนิฟอร์ม บน F

นั่นคือ $f_h \xrightarrow[h\to 0^+]{a.u.}\!\!\!\!\!\!\!/\;\; f$

ดังนั้นคุณสมบัติไฟไนท์เนสเรตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f ของ $\{f_h\}$ มีความจำเป็นสำหรับทฤษฎี 4.3.1