

5.1 ผลที่ได้จากการวิจัย

สำหรับ E ซึ่งเป็นเมเชอเรเบิลเซตใด ๆ

5.1.1 ให้ $f_n, f: E \rightarrow R_e$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน, $\forall n \geq 1$, f_n และ f ใฝ่ใน $a.e.$ บน E , $\forall n \geq 1$ จะได้ว่า

(ก) ถ้า $\{f_n\}$ ใฝ่ใน $a.e.$ กับ f และ $f_n \chi_A \xrightarrow{L^1} f \chi_A$,

$\forall A \subset E$ ซึ่ง $m(A) < \infty$ แล้ว $f_n \xrightarrow{m} f$

(ข) ถ้า $f_n \chi_A \xrightarrow{L^1} f \chi_A, \forall A \subset E$ ซึ่ง $m(A) < \infty$ แล้ว ไม่จำเป็นที่

$f_n \xrightarrow{m} f$ ดังตัวอย่าง 4.1.1

(ค) ถ้า $\{f_n\}$ ใฝ่ใน $a.e.$ กับ f และ $f_n \chi_A \xrightarrow{L^1} f \chi_A$

$\forall A \subset E$ ซึ่ง $m(A) < \infty$ แล้ว ไม่จำเป็นที่ $f_n \xrightarrow{a.u.} f$

ดังตัวอย่าง 4.1.2

(ง) $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมี $A_\varepsilon \subset E$,

$m(A_\varepsilon) < \varepsilon$ และจะมีจำนวนเต็มบวก N_ε ซึ่ง

$$\sup_{x \in E - A_\varepsilon} |f_n - f| < \varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon$$

5.1.2 (ก) ให้ $f^*: E \times (0,1] \rightarrow R_e$ โดยที่ E เป็นเมเชอเรเบิลสับเซต

ของ R และสำหรับแต่ละ $x \in E$ ถ้า $f_h(x) = f^*(x,h)$ เป็น

ฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับ $h \in (0,1]$, ให้ $f_h, f: E \rightarrow R_e$ เป็น

เมเชอเรเบิลฟังก์ชัน $\forall h \in (0,1]$, f_h, f ใฝ่ใน $a.e.$ บน E

$\forall h \in (0,1]$ ดังนั้นข้อความต่อไปนี้จะสมมูลกัน

(i) $\{f_h\}$ ไล่ในทึนเนสเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f

$$\text{และ } \lim_{h \rightarrow 0^+} f_h(x) = f(x) \text{ a.e. บน } E$$

(ii) $\{f_h\}$ ไล่ในทึนเนสเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f

$$(iii) f_h \xrightarrow[h \rightarrow 0^+]{a.u.} f$$

(ข) ในข้อ (ก) สำหรับ $x \in E$, ถ้า $f_h(x) = f^*(x, h)$ ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง สำหรับ $h \in (0, 1]$ แล้ว โดยทั่วไปทฤษฎีจะไม่เป็นจริง ดังตัวอย่าง 4.3.2

(ค) ในข้อ (ก) ถ้า $\{f_h\}$ ไม่มีคุณสมบัติไล่ในทึนเนสเรสตริกชัน ขึ้นอยู่กับ f แล้ว โดยทั่วไปทฤษฎีจะไม่เป็นจริง ดังตัวอย่าง 4.3.3

5.2 ข้อเสนอแนะสำหรับการขยายงานวิจัยต่อไป

พิจารณา 5.1.2 (ก) และ 5.1.2 (ข) จะเห็นว่าเงื่อนไขความต่อเนื่องของฟังก์ชันดังกล่าวนี้เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับทฤษฎี แต่อย่างไรก็ตาม เมื่อการพิสูจน์ทฤษฎีแล้ว เงื่อนไขดังกล่าวก็นำไปใช้เพียงการพิสูจน์ว่า $E_h^f(\alpha)$ เป็นเมเชอเรเบิลเซตเท่านั้น ฉะนั้นจึงเป็นเรื่องที่น่าสนใจว่าทฤษฎีนี้ยังคงเป็นจริงเมื่อใด ถ้าสำหรับแต่ละ $x \in E$, $f_h(x) = f^*(x, h)$ เป็นเพียงเมเชอเรเบิลฟังก์ชันเท่านั้น

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright© by Chiang Mai University

All rights reserved