บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

ความรู้พื้นฐานที่จะนำมากล่าวในบทนี้ เป็นเพียงนิยาม , ทฤษฎีและคุณสมบัติต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับริง (ring) , โทโพโลยีของจำนวนจริง (topology of the real numbers) , และการวิเคราะห์จำนวนจริง (real analysis) ที่เห็นว่ามีความจำเป็นที่จะนำไปใช้อ้างอิงในการศึกษาบทที่ 3 และบทที่ 4 ต่อไป

สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีต่าง ๆ ในบทนี้ จะไม่แสดงไว้ แต่ผู้สนใจสามารถศึกษาได้จากเอกสารอ้างอิงที่ระบุไว้ท้ายเล่ม

หนังสือแต่ละเล่มอาจจะใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์แตกต่างกัน เพื่อป้องกันความสับสนที่อาจจะเกิดขึ้น จึงขอตกลงสัญลักษณ์ที่จะใช้ดังต่อไปนี้

I	หมายถึง	เซตของจำนวนเต็ม
I^+	หมายถึง	เซตของจำนวนเต็มบวก
$\mathbb{R}$	หมายถึง	เซตของจำนวนจริง
$\mathbb{R}^+$	หมายถึง	เซตของจำนวนจริงบวก
$f : A \longrightarrow B$	หมายถึง	f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B
$\subseteq$	หมายถึง	สับเซต (subset)
$\subset$	หมายถึง	สับเซตแท้ (proper subset)
$\wedge$	หมายถึง	เซตดัชนี (index set)
$\{x_n\}$	หมายถึง	ลำดับ (sequence)
$\max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$	หมายถึง	จำนวนที่มากที่สุดระหว่าง a_1 ถึง a_n
$\min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$	หมายถึง	จำนวนที่น้อยที่สุดระหว่าง a_1 ถึง a_n

$A - B$	หมายถึง	$\{x \mid x \in A$ แต่ $x \notin B\}$
E^c	หมายถึง	คอมพลีเมนต์ของ E
E'	หมายถึง	เซตของจุดลิมิตทั้งหมดของ E
$\bar{E}$	หมายถึง	โคลเชอร์ของ E

2.1 ริงและไอดีล (Rings and Ideals)

<u>นิยาม 2.1.1</u> ให้ X เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง จะเรียก $*$ ว่าเป็น <u>การดำเนินการทวิภาคบน X</u> (binary operation on X) ก็ต่อเมื่อ

$$* : X \times X \longrightarrow X$$

<u>หมายเหตุ</u> ต่อไปจะเขียน $x * y$ แทน $*((x,y))$ สำหรับ $x, y \in X$

<u>นิยาม 2.1.2</u> ให้ R เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง ที่มี $+$ และ $\cdot$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน R จะเรียกเซต R พร้อมด้วยการดำเนินการทวิภาค $+$ และ $\cdot$ ว่า <u>ริง</u> (ring) ก็ต่อเมื่อ แต่ละสมาชิก $a, b, c \in R$ มีคุณสมบัติครบทุกข้อ ดังต่อไปนี้

(1) $a + b = b + a$

(2) $a + (b + c) = (a + b) + c$

(3) มี $0 \in R$ ซึ่งทำให้

$$0 + r = r + 0 = r \text{ สำหรับทุก } r \in R$$

และเรียก 0 ว่า <u>เอกลักษณ์การบวก</u> ของ R

(4) มี $-a \in R$ ซึ่งทำให้

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

(5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(6) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ และ

$(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$

<u>ข้อตกลง</u> จากนิยามข้างต้น มีข้อตกลงบางประการดังนี้

(1) " การดำเนินการทวิภาค + " จะเรียกว่า " การบวก "

(2) " การดำเนินการทวิภาค $\cdot$ " จะเรียกว่า " การคูณ " และในบางครั้งจะเขียน ab แทน $a \cdot b$

(3) " R เป็นริง " ให้หมายความว่า " R พร้อมด้วยการบวก และ การคูณ เป็นริง "

<u>นิยาม 2.1.3</u> ให้ R เป็นริง จะเรียก R ว่าเป็น <u>ริงที่มีเอกลักษณ์</u> (ring with identity) ก็ต่อเมื่อ มี $1 \in R$ ซึ่งทำให้ $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ สำหรับทุก $a \in R$ และเรียก 1 ว่า <u>เอกลักษณ์การคูณ</u> ของ R

<u>นิยาม 2.1.4</u> ให้ R เป็นริง จะเรียก R ว่าเป็น <u>ริงสลับที่</u> (commutative ring) ก็ต่อเมื่อ $ab = ba$ สำหรับทุก $a, b \in R$

<u>นิยาม 2.1.5</u> ให้ R เป็นริง และ $S \subseteq R$ จะเรียก S ว่าเป็น <u>สับริง</u> (subring) ของ R ก็ต่อเมื่อ S พร้อมด้วยการบวก และการคูณของ R เป็นริง

<u>ทฤษฎี 2.1.1</u> ให้ R เป็นริง และ $\emptyset \neq S \subseteq R$ จะได้ว่า S เป็นสับริงของ R ก็ต่อเมื่อ $a - b \in S$ และ $ab \in S$ สำหรับทุก $a, b \in S$

<u>พิสูจน์</u> ดู [3] หน้า 8

<u>นิยาม 2.1.6</u> ให้ R เป็นริง และ $\emptyset \neq A \subseteq R$ จะเรียก A ว่าเป็น <u>ไอดีล</u> (ideal) ของ R ก็ต่อเมื่อ คุณสมบัติทั้ง 2 ข้อ ต่อไปนี้เป็นจริง

(1) ถ้า $a, b \in A$ แล้ว $a-b \in A$

(2) ถ้า $r \in R$ และ $a \in A$ แล้ว $ar \in A$ และ $ra \in A$ ในกรณีที่ A เป็นไอดีลของ R และ $A \subset R$ จะเรียก A ว่าเป็น <u>ไอดีลแท้</u> (proper ideal) ของ R

<u>ทฤษฎี 2.1.2</u> ให้ R เป็นริงที่มีเอกลักษณ์ และ A เป็นไอดีลของ R จะได้ว่า $A = R$ ก็ต่อเมื่อ $1 \in A$

<u>พิสูจน์</u> ดู [3] หน้า 17 - 18

<u>นิยาม 2.1.7</u> ถ้า $\{B_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ เป็นคลาส (class) ของไอดีลของริง R ให้ ΣB_α มีความหมายดังนี้

ΣB_α = เซตของผลบวกแบบจำกัดของสมาชิกใน $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$

<u>ทฤษฎี 2.1.3</u> ถ้า R เป็นริง และ $\{B_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ เป็นคลาสของไอดีลของ R แล้ว ΣB_α เป็นไอดีลของ R

<u>พิสูจน์</u> ดู [3] หน้า 21

<u>นิยาม 2.1.8</u> ให้ M เป็นไอดีลของริง R จะเรียก M ว่าเป็น <u>แมกซิมัลไอดีล</u> (maximal ideal) ของ R ก็ต่อเมื่อ $M \subset R$ และ ถ้ามี N เป็นไอดีลของ R ซึ่ง $M \subseteq N \subseteq R$ แล้ว $N = R$ หรือ $M = N$

<u>นิยาม 2.1.9</u> ให้ R เป็นริงสลับที่ที่มีเอกลักษณ์ A เป็นไอดีลของ R และ $r \in R$ กำหนด $(A, r) = \{a+sr \mid a \in A \text{ และ } s \in R\}$

<u>ทฤษฎี 2.1.4</u> ให้ R เป็นริงสลับที่ที่มีเอกลักษณ์ A เป็นไอดีลของ R ถ้า $r \in R$ แล้ว (A, r) เป็นไอดีลของ R

<u>พิสูจน์</u> ดู [3] หน้า 71

<u>ทฤษฎี 2.1.6</u> (Krull - Zorn) ให้ R เป็นริงที่มีเอกลักษณ์ จะได้ว่า แต่ละไอดีลแท้ A ของ R มีแมกซิมัลไอดีล M ซึ่ง $A \subseteq M$

<u>พิสูจน์</u> ดู [3] หน้า 74

<u>นิยาม 2.1.10</u> ให้ A เป็นไอดีลของริง R จะเรียก A ว่าเป็น <u>ไอดีลเฉพาะ</u> (prime ideal) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $a, b \in R$ ถ้า $ab \in A$ แล้ว $a \in A$ หรือ $b \in A$

<u>ทฤษฎี 2.1.7</u> สำหรับริงสลับที่ที่มีเอกลักษณ์ จะได้ว่า ทุกแมกซิมัลไอดีลเป็นไอดีลเฉพาะ

<u>พิสูจน์</u> ดู [3] หน้า 77

<u>นิยาม 2.1.11</u> ให้ R และ R' เป็นริง จะเรียก $f : R \to R'$ ว่าเป็น <u>โฮโมมอร์ฟิสซึม</u> (homomorphism) <u>จาก R ไป R'</u> ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $a, b \in R$ มีคุณสมบัติครบ 2 ข้อ ต่อไปนี้

(1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$

(2) $f(ab) = f(a)f(b)$

<u>หมายเหตุ</u> ในที่นี้การบวกและการคูณ ทางซ้ายมือและขวามือเป็นการบวก และการคูณของ R และ R' ตามลำดับ

<u>นิยาม 2.1.12</u> ให้ f เป็นโฮโมมอร์ฟิสซึมจาก R ไป R' <u>เคอร์เนล</u> (kernel) <u>ของ f</u> เขียนแทนด้วย ker(f) มีความหมายดังนี้

$$\ker(f) = \{r \in R \mid f(r) = 0\}$$

<u>ทฤษฎี 2.1.8</u> ให้ f เป็นโฮโมมอร์ฟิสซึมจาก R ไป R' จะได้ว่า ker(f) เป็นไอดีลของ R

<u>พิสูจน์</u> ดู [3] หน้า 28

<u>ทฤษฎี 2.1.9</u> (Correspondence Theorem) ให้ f เป็นโฮโมมอร์ฟิสซึมจาก R ไปบน R' , $A = \{X \mid X$ เป็นไอดีลของ R และ $\ker(f) \subseteq X\}$ และ $A' = \{X \mid X$ เป็นไอดีลของ R' $\}$ จะได้ว่า

(1) มีฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไปบน A'

(2) ถ้า A เป็นไอดีลของ R และ $\ker(f) \subseteq A$ แล้ว f(A) เป็นไอดีลของ R'

<u>พิสูจน์</u> ดู [3] หน้า 30-31

<u>ทฤษฎี 2.1.10</u> ให้ f เป็นโฮโมมอร์ฟิสซึมจาก R ไปบน R' จะได้ว่า

(1) ถ้า M เป็น แมกซิมัลไอดีลของ R ซึ่ง $\ker(f) \subseteq M$ แล้ว f(M) เป็นแมกซิมัลไอดีลของ R'

(2) ถ้า M' เป็น แมกซิมัลไอดีลของ R' แล้ว $f^{-1}(M')$ เป็นแมกซิมัลไอดีลของ R

(3) ถ้า $A = \{M \mid M$ เป็นแมกซิมัลไอดีลของ R และ $\ker(f) \subseteq M\}$ และ $A' = \{M' \mid M'$ เป็นแมกซิมัลไอดีลของ $R'\}$ แล้ว ฟังก์ชัน $\mu : A \longrightarrow A'$ กำหนดโดย $\mu(M) = f(M)$ เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 จาก A ไปบน A'

<u>พิสูจน์</u> ดู [3] หน้า 86

<u>2.2 โทโพโลยีขั้นพื้นฐานของจำนวนจริง</u> (Basic Topology of The Real Numbers)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงเฉพาะโทโพโลยีขั้นพื้นฐานของจำนวนจริง ดังนั้น ถ้ากล่าวถึงจุดให้หมายถึง สมาชิกของ $\mathbb{R}$ และ ถ้ากล่าวถึงเซต ให้หมายถึงสับเซตของ $\mathbb{R}$

<u>นิยาม 2.2.1</u> <u>เนเบอร์ฮูด</u> (neighborhood) <u>ของจุด x</u> หมายถึง ช่วงเปิดใด ๆ ของ $\mathbb{R}$ ที่มี x เป็นจุดกึ่งกลาง

<u>ข้อตกลง</u> ให้ $r > 0$ จะเรียกช่วงเปิด $(x-r, x+r)$ ว่า <u>เนเบอร์ฮูด</u> <u>ของ x ที่มีรัศมี r</u> และจะเขียนแทนด้วย $N_r(x)$

<u>ข้อสังเกต</u> ถ้า $r > 0$ จะเห็นได้ชัดว่า

$$N_r(x) = (x-r, x+r) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x-y| < r\}$$

<u>นิยาม 2.2.2</u> เรียกจุด x ว่าเป็น <u>จุดลิมิต</u> (limit point) <u>ของเซต E</u> ก็ต่อเมื่อ $[N_r(x) - \{x\}] \cap E \neq \emptyset$ สำหรับทุก $r > 0$

<u>นิยาม 2.2.3</u> ถ้า $x \in E$ จะเรียก x ว่าเป็น <u>จุดเอกเทศ</u> (isolated point) ของ E ก็ต่อเมื่อ x ไม่เป็นจุดลิมิตของ E

<u>นิยาม 2.2.4</u> เซต E จะเป็น <u>เซตปิด</u> (closed set) ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ จุดลิมิตของ E อยู่ใน E

<u>นิยาม 2.2.5</u> จุด x จะเป็น <u>จุดภายใน</u> (interior point) ของ E ก็ต่อเมื่อ มี $r > 0$ ซึ่งทำให้ $N_r(x) \subseteq E$

<u>นิยาม 2.2.6</u> เซต E จะเป็น<u>เซตเปิด</u> (open set) ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ จุดของ E เป็นจุดภายในของ E

<u>นิยาม 2.2.7</u> เซต E จะเป็น<u>เซตที่มีขอบเขต</u> (bounded set) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง M ซึ่งทำให้ $|x| \leq M$ สำหรับทุก $x \in E$

<u>ทฤษฎี 2.2.1</u> ถ้า x เป็นจุดลิมิตของ E และ $r > 0$ แล้ว $N_r(x) \cap E$ เป็นเซตอนันต์

<u>พิสูจน์</u> ดู [2] หน้า 41 - 42

<u>บทแทรก 2.2.2</u> ถ้า E เป็นเซตจำกัด แล้ว E จะไม่มีจุดลิมิต

<u>ทฤษฎี 2.2.3</u> แต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริง

(1) ถ้า $\{G_\alpha \mid \alpha \in \wedge\}$ เป็นคลาสของเซตเปิดใน $\mathbb{R}$ แล้ว $\bigcup_{\alpha \in \wedge} G_\alpha$ เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{R}$

(2) ถ้า $\{F_\alpha \mid \alpha \in \wedge\}$ เป็นคลาสของเซตปิดใน $\mathbb{R}$ แล้ว $\bigcap_{\alpha \in \wedge} F_\alpha$ เป็นเซตปิดใน $\mathbb{R}$

(3) ถ้า $G_1, G_2, \ldots, G_n$ เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{R}$ ซึ่ง $n \in I^+$

แล้ว $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{R}$

(4) ถ้า $F_1, F_2, \ldots, F_n$ เป็นเซตปิดใน $\mathbb{R}$ ซึ่ง $n \in I^+$

แล้ว $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ เป็นเซตปิดใน $\mathbb{R}$

<u>พิสูจน์</u> ดู [2] หน้า 45

<u>นิยาม 2.2.8</u> ให้ $E \subsetneq \mathbb{R}$ และ E' เป็นเซตของจุดลิมิตทั้งหมดของ E <u>โคลเชอร์</u> (Closure) <u>ของ E</u> หมายถึง เซต $\bar{E}$ ซึ่ง

$\bar{E} = E' \cup E$

<u>ทฤษฎี 2.2.4</u> ให้ $E \subseteq \mathbb{R}$ จะได้ว่า แต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริง

(1) $\bar{E}$ เป็นเซตปิด

(2) $E = \bar{E}$ ก็ต่อเมื่อ E เป็นเซตปิด

(3) ถ้า F เป็นเซตปิด และ $E \subsetneq F$ แล้ว $\bar{E} \subsetneq F$

<u>พิสูจน์</u> ดู [2] หน้า 46

<u>นิยาม 2.2.9</u> ให้ $\{G_\alpha \mid \alpha \in \wedge\}$ เป็นคลาสของเซตเปิดใน $\mathbb{R}$ จะเรียก $\{G_\alpha \mid \alpha \in \wedge\}$ ว่าเป็น <u>คัพเวอร์เปิด</u> (open cover) <u>ของ E</u> ก็ต่อเมื่อ $E \subsetneq \bigcup_{\alpha \in \wedge} G_\alpha$

นิยาม 2.2.10 ให้ $K \subseteq \mathbb{R}$ จะเรียก K ว่าเป็น คอมแพคสับเซต (compact subset) ของ $\mathbb{R}$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละคัฟเวอร์เปิด $\{G_\alpha \mid \alpha \in \wedge\}$ ของ K มี $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \wedge$ ซึ่งทำให้ $K \subsetneq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$ สำหรับบาง $n \in I^+$

ข้อสังเกต จากนิยาม 2.2.10 เห็นได้ชัดว่า ทุกสับเซตจำกัดของ $\mathbb{R}$ จะเป็นคอมแพคเซตเสมอ

นิยาม 2.2.11 ให้ $\{E_\alpha \mid \alpha \in \wedge\}$ เป็นคลาสของสับเซตของ $\mathbb{R}$ จะกล่าวว่า คลาสนี้มี คุณสมบัติอินเตอร์เซคชันแบบจำกัด (finite intersection property) ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ อินเตอร์เซคชันแบบจำกัดของสมาชิกในคลาสดังกล่าว ไม่เป็นเซตว่าง

ข้อตกลง "คุณสมบัติอินเตอร์เซคชันแบบจำกัด" จะกล่าวย่อ ๆ ว่า "คุณสมบัติ f.i.p."

ทฤษฎี 2.2.5 E จะเป็นคอมแพคสับเซตของ $\mathbb{R}$ ก็ต่อเมื่อ $\bigcap_{\alpha\in\wedge} F_\alpha \neq \emptyset$ สำหรับทุก $\{F_\alpha \mid \alpha\in\wedge\}$ ที่เป็นคลาสของเซตปิดใน E ซึ่งมีคุณสมบัติ f.i.p.

พิสูจน์ ดู [9] หน้า 61

ทฤษฎี 2.2.6 ให้ $E \subseteq \mathbb{R}$ จะได้ว่า ข้อความต่อไปนี้สมมูล (equivalent) กัน

(1) E เป็นคอมแพคเซต

(2) E เป็นเซตปิด และมีขอบเขต

(3) ทุกสับเซตอนันต์ของ E จะมีจุดลิมิตใน E เสมอ

พิสูจน์ ดู [2] หน้า 55 - 56

2.3 ลำดับโคชี (Cauchy Sequences)

นิยาม 2.3.1 ให้ $E \subseteq \mathbb{R}$ จะเรียกว่า f เป็น ลำดับ (sequence) ใน E ก็ต่อเมื่อ $f : I^+ \rightarrow E$

สัญลักษณ์ จากนิยามข้างต้น จะเห็นว่าลำดับเป็นฟังก์ชันชนิดหนึ่ง แต่โดยทั่วไปแล้ว การศึกษาเรื่องลำดับ มักศึกษาแต่เฉพาะอิเมจ (image) ของมัน ดังนั้นกรณีที่ f เป็นลำดับ โดยที่ $f(i) = x_i$ เมื่อ $i = 1,2,3,\ldots$ จึงนิยมเขียนแทนลำดับ f ด้วย

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

หรือเขียนสั้น ๆ เป็น $\{x_n\}$

นิยาม 2.3.2 ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับใน $E (\subseteq \mathbb{R})$ จะเรียก $x \in \mathbb{R}$ ว่าเป็น ลิมิต (limit) ของลำดับ $\{x_n\}$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in I^+$ ซึ่งทำให้ $|x_n - x| < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geq N$

ในกรณีที่ x เป็นลิมิตของลำดับ $\{x_n\}$ จะกล่าวว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ x และจะเรียกลำดับ $\{x_n\}$ ว่าเป็น ลำดับที่ลู่เข้า (convergent sequence)

ทฤษฎี 2.3.1 ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับใน $\mathbb{R}$ จะได้ว่า ถ้า x และ y เป็นลิมิตของลำดับ $\{x_n\}$ แล้ว $x = y$

พิสูจน์ ดู [2] หน้า 78

<u>สัญลักษณ์</u> ถ้า $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ x หรือ x เป็นลิมิตของลำดับ $\{x_n\}$ จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$x_n \dashrightarrow x$$

หรือ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$

<u>ทฤษฎี 2.3.2</u> ถ้า $E \subseteq \mathbb{R}$ และ a เป็นจุดลิมิตของ E แล้วจะมีลำดับ $\{a_n\}$ ใน E ซึ่ง $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

<u>พิสูจน์</u> ดู [2] หน้า 79

<u>นิยาม 2.3.3</u> ลำดับ $\{x_n\}$ ใน $\mathbb{R}$ จะเป็น<u>ลำดับโคชี</u> (Cauchy sequence) ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in I^+$ ซึ่งถ้า $m \geq N$ และ $n \geq N$ แล้ว $|x_m - x_n| < \varepsilon$

<u>ทฤษฎี 2.3.3</u> (Cauchy Convergence Criterion)
ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับใน $\mathbb{R}$ จะได้ว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับโคชี ก็ต่อเมื่อ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่ลู่เข้า

<u>พิสูจน์</u> ดู [2] หน้า 90

<u>ทฤษฎี 2.3.4</u> ให้ $\{a_n\}, \{b_n\}$ และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับใน $\mathbb{R}$ ถ้า $a_n \leq c_n \leq b_n$ สำหรับทุก $n \in I^+$ และ $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n = A$ แล้ว $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = A$

<u>พิสูจน์</u> ดู [7] หน้า 64

<u>ทฤษฎี 2.3.5</u> ถ้า E เป็นคอมแพคสับเซตของ $\mathbb{R}$ แล้ว แต่ละลำดับใน E ที่ลู่เข้า จะลู่เข้าสู่จุดใน E

<u>พิสูจน์</u> ดู [9] หน้า 119

2.4 ฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous Functions)

ในหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงเฉพาะฟังก์ชันค่าจริง (real valued function) ที่มีโดเมน (domain) เป็นสับเซตของ $\mathbb{R}$ เท่านั้น ซึ่งจะนำไปใช้โดยตรงในบทที่ 3 และบทที่ 4

<u>นิยาม 2.4.1</u> ให้ $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ และ x_0 เป็นจุดลิมิตของ E จะกล่าวว่า <u>ลิมิตของ f ที่จุด x_0 เท่ากับ L</u> ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $x \in E$ ซึ่ง $0 < |x - x_0| < \delta$

<u>ทฤษฎี 2.4.1</u> ให้ $f : E \to \mathbb{R}$ และ x_0 เป็นจุดลิมิตของ E ถ้า L_1 และ L_2 เป็นลิมิตของ f ที่จุด x_0 แล้ว $L_1 = L_2$

<u>พิสูจน์</u> ดู [2] หน้า 153

<u>สัญลักษณ์</u> ถ้าลิมิตของ f ที่จุด x_0 เท่ากับ L จะเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

<u>หมายเหตุ</u> สัญลักษณ์ข้างต้นกำหนดได้โดยอาศัย ทฤษฎี 2.4.1

<u>ทฤษฎี 2.4.2</u> ให้ $E \subseteq \mathbb{R}$ และ x_o เป็นจุดลิมิตของ E จะได้ว่า ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = L$

(2) กำหนด $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $x \in E$ ซึ่ง $0 < |x - x_o| < \delta$

(3) ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับใน E และ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_o$

แล้ว $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$

<u>พิสูจน์</u> ดู [2] หน้า 153

<u>นิยาม 2.4.2</u> ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก E ไปยัง $\mathbb{R}$ กำหนดการบวก , ลบ, คูณด้วยสเกลาร์ (scalar) , คูณ และ หาร ตามลำดับดังต่อไปนี้ สำหรับแต่ละ $x \in E$

(1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

(2) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

(3) $(cf)(x) = c \cdot f(x)$ เมื่อ $c \in \mathbb{R}$

(4) $(fg)(x) = f(x)g(x)$

(5) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $g(x) \neq 0$

สำหรับทุก $x \in E$

<u>ทฤษฎี 2.4.3</u> ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก E ไปยัง $\mathbb{R}$ และ x_o เป็นจุดลิมิตของ E ถ้า $\lim_{x \to x_o} f(x) = A$ และ $\lim_{x \to x_o} g(x) = B$ แล้ว จะได้ว่าแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริง เมื่อ $A, B \in \mathbb{R}$

(1) $\lim_{x \to x_o} (f+g)(x) = A+B$

(2) $\lim_{x \to x_o} (f-g)(x) = A-B$

(3) $\lim_{x \to x_o} (cf)(x) = cA$ เมื่อ $c \in \mathbb{R}$

(4) $\lim_{x \to x_o} (fg)(x) = AB$

(5) $\lim_{x \to x_o} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{A}{B}$ เมื่อ $B \neq 0$

<u>พิสูจน์</u> ดู [2] หน้า 155

<u>นิยาม 2.4.3</u> ให้ $f : E \to \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า f <u>เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต</u> (bounded function) <u>บน E</u> ก็ต่อเมื่อ มี $M \in I^+$ ซึ่งทำให้

$$|f(x)| \leq M$$

สำหรับทุก $x \in E$

<u>ทฤษฎี 2.4.4</u> ให้ $f, g : E \to \mathbb{R}$ และ x_o เป็นจุดลิมิตของ E ถ้า $\lim_{x \to x_o} f(x) = 0$ และ g เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตแล้ว

$$\lim_{x \to x_o} (fg)(x) = 0$$

<u>พิสูจน์</u> ดู [7] หน้า 79

<u>นิยาม 2.4.4</u> ให้ $f : E \to \mathbb{R}$ และ $a \in E$ จะกล่าวว่า f <u>มีความต่อเนื่องที่จุด a</u> ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $x \in E$ ซึ่ง $|x - a| < \delta$

<u>นิยาม 2.4.5</u> ให้ $f : E \to \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน E ก็ต่อเมื่อ f มีความต่อเนื่องที่จุดทุกจุดใน E

<u>ทฤษฎี 2.4.5</u> ให้ $f : E \to \mathbb{R}$

(1) ถ้า a เป็นจุดเอกเทศของ E แล้ว f มีความต่อเนื่องที่จุด a

(2) ถ้า x_o เป็นจุดลิมิตของ E และ $x_o \in E$ แล้ว f มีความต่อเนื่องที่จุด x_o ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$

<u>พิสูจน์</u> ดู [2] หน้า 128

<u>ทฤษฎี 2.4.6</u> ให้ $f : E \to \mathbb{R}$ และ $a \in E$ จะได้ว่า f มีความต่อเนื่องที่จุด a ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละลำดับ $\{x_n\}$ ใน E ถ้า $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ แล้ว $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$

<u>พิสูจน์</u> ดู [2] หน้า 159

<u>นิยาม 2.4.6</u> ให้ $f : E \to \mathbb{R}$ กำหนดนิยามของ $|f|$ ดังนี้

$$|f|(x) = |f(x)| \quad \text{สำหรับทุก } x \in E$$

<u>ทฤษฎี 2.4.7</u> ให้ $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ ถ้า f และ g มีความต่อเนื่องที่จุด a จะได้ว่า

(1) $f+g$, fg, $f-g$ และ $|f|$ มีความต่อเนื่องที่จุด a

(2) cf มีความต่อเนื่องที่จุด a สำหรับทุก $c \in \mathbb{R}$

(3) $\frac{f}{g}$ มีความต่อเนื่องที่จุด a ถ้า $g(a) \neq 0$

<u>พิสูจน์</u> ดู [2] หน้า 165 - 166

<u>ทฤษฎี 2.4.8</u> ฟังก์ชันคงที่บน E ทุกฟังก์ชัน เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน E

<u>พิสูจน์</u> เป็นผลโดยตรงจากนิยาม 2.4.4 และ 2.4.5

<u>ทฤษฎี 2.4.9</u> ให้ $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน E จะได้ว่า

(1) $f+g$, $f-g$, fg และ $|f|$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน E

(2) cf เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน E สำหรับทุก $c \in \mathbb{R}$

(3) $\frac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน E ถ้า $g(x) \neq 0$ สำหรับทุก $x \in E$

<u>พิสูจน์</u> เป็นผลโดยตรงจากทฤษฎี 2.4.7 และนิยาม 2.4.5

<u>ทฤษฎี 2.4.10</u> ให้ $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ จะได้ว่า ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน E

(2) $f^{-1}(V)$ เป็นเซตเปิดใน E สำหรับทุกเซตเปิด V ของ $\mathbb{R}$

(3) $f^{-1}(F)$ เป็นเซตปิดใน E สำหรับทุกเซตปิด F ของ $\mathbb{R}$

<u>พิสูจน์</u> ดู [2] หน้า 167 - 168

<u>ทฤษฎี 2.4.11</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน E ถ้า E เป็นคอมแพคเซต แล้ว f(E) เป็น คอมแพคเซต

<u>พิสูจน์</u> ดู [2] หน้า 171

<u>ทฤษฎี 2.4.12</u> ให้ $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน E ถ้า E เป็นคอมแพคเซต แล้ว f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต

<u>พิสูจน์</u> ดู [2] หน้า 172

<u>ทฤษฎี 2.4.13</u> ถ้า E เป็นสับเซตที่ไม่คอมแพคของ $\mathbb{R}$ แล้วจะมีฟังก์ชันต่อเนื่องบน E แต่ไม่มีขอบเขต

<u>พิสูจน์</u> ดู [2] หน้า 176

<u>นิยาม 2.4.7</u> ให้ $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ และ $E^* \subseteq E$

$$f|_{E^*} : E^* \longrightarrow \mathbb{R} \text{ โดยที่ } f|_{E^*}(x) = f(x)$$

สำหรับทุก $x \in E^*$

<u>ทฤษฎี 2.4.14</u> ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน E และ $E^* \subseteq E$ แล้ว $f|_{E^*}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน E^*

<u>พิสูจน์</u> เป็นผลโดยตรงจากนิยาม 2.4.5 และ 2.4.7

<u>ทฤษฎี 2.4.15</u> (Tietze's Extention Theorem) ถ้า F เป็นเซตปิดใน $\mathbb{R}$ และ $f : F \longrightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน F แล้วจะมีฟังก์ชันต่อเนื่อง $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ โดยที่ $h|_F = f$

<u>พิสูจน์</u> ดู [1] หน้า 52

<u>หมายเหตุ</u> ให้ F เป็นเซตปิดใน $\mathbb{R}$ และ $f : F \longrightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง บน F และ $f \geqslant 0$ โดยอาศัยบทพิสูจน์ของ Teitze's Extension Theorem ใน [1] หน้า 52 เราสามารถสร้าง ฟังก์ชันต่อเนื่อง $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ โดยที่ $h|_F = f$ และ $h(x) \neq 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R} - F$