## บทที่ 3

## แมกซิมัลไอดีลใน C(E) เมื่อ E เป็นคอมแพคสับเซตของ $\mathbb{R}$

ในบทนี้จะถือว่าผู้อ่านมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับ ริงและไอดีล , โทโพโลยีขั้นพื้นฐานของจำนวนจริง , ลำดับโคชี และ ฟังก์ชันต่อเนื่อง ที่กล่าวไว้ในบทที่ 2 มาแล้ว การศึกษาในบทนี้จะเริ่มจาก ศึกษาลักษณะของแมกซิมัลไอดีลทั้งหมดในริงของฟังก์ชันค่าจริงที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0,1]$ ซึ่งได้มาจากบทความของ Stephan C. Carlson เรื่อง Cauchy Sequence and Function Rings จากวารสาร The American Mathematical Monthly ปี 1981 ต่อจากนั้น ก็จะศึกษาถึงลักษณะของแมกซิมัลไอดีลทั้งหมดในริงของฟังก์ชันค่าจริงที่ต่อเนื่องบน E เมื่อ E เป็นคอมแพคสับเซตใด ๆ ของ

### 3.1 ริงของฟังก์ชันค่าจริงที่ต่อเนื่องบนสับเซตของ $\mathbb{R}$

ในหัวข้อนี้ จะแสดงให้เห็นว่า เซตของฟังก์ชันค่าจริงที่ต่อเนื่องบนสับเซตของ $\mathbb{R}$ พร้อมด้วยการบวก และ การคูณของฟังก์ชันค่าจริง เป็นริงสลับที่ที่มีเอกลักษณ์ เพื่อความสะดวกในการศึกษาหัวข้อนี้ จะเริ่มด้วยการกำหนดสัญลักษณ์ ดังต่อไปนี้

<u>สัญลักษณ์ 3.1.1</u> ให้ $E \subseteq \mathbb{R}$

(1) C(E) หมายถึง เซตของฟังก์ชันค่าจริงทั้งหมดที่ต่อเนื่องบน E

(2) ถ้า $p \in E$

$$A_p = \{f \in C(E) \mid f(p) = 0\}$$

จากความหมายของสัญลักษณ์ข้างต้น เมื่อพิจารณาถึงโครงสร้างทางพีชคณิตของ C(E) พร้อมด้วยการบวก และ การคูณ ดังที่กำหนดในนิยาม 2.4.2 พบว่า C(E) เป็นริงสลับที่ที่มีเอกลักษณ์ ดังทฤษฎีต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 3.1.1</u> ให้ $E \subseteq \mathbb{R}$ จะได้ว่า $C(E)$ พร้อมด้วยการบวก และ การคูณ ดังที่กำหนดในนิยาม 2.4.2 เป็นริงสลับที่ที่มีเอกลักษณ์

<u>พิสูจน์</u> (1) ให้ $f, g \in C(E)$ โดยทฤษฎี 2.4.9 จะได้ว่า

$f+g \in C(E)$ และ $fg \in C(E)$

(2) ให้ $f, g, h \in C(E)$

โดยทฤษฎี 2.4.9 จะได้ว่า

$(f+g)+h \in C(E)$ และ $f+(g+h) \in C(E)$

และสำหรับทุก $x \in E$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}[(f+g)+h](x) &= (f+g)(x) + h(x) \\ &= [f(x) + g(x)] + h(x) \\ &= f(x) + [g(x) + h(x)] \\ &= f(x) + (g+h)(x) \\ &= [f + (g+h)](x)\end{aligned}$$

แสดงว่า $(f+g)+h = f+(g+h)$

(3) พิสูจน์ทำนองเดียวกับข้อ (2) จะได้ว่า

ถ้า $f, g, h \in C(E)$

แล้ว $(fg)h = f(gh)$

(4) พิจารณาฟังก์ชัน $i$ โดยที่ $i(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in E$

โดยทฤษฎี 2.4.8 จะได้ว่า $i \in C(E)$

และสำหรับทุก $f \in C(E)$ และ $x \in E$ จะได้ว่า

$$(f+i)(x) = f(x)+i(x) = f(x) = i(x)+f(x) = (i+f)(x)$$

แสดงว่า $f+i = f = i+f$

นั่นคือ $i$ เป็นเอกลักษณ์การบวกของ $C(E)$

(5) สำหรับแต่ละ $f \in C(E)$

โดยทฤษฎี 2.4.9 จะได้ว่า $-f \in C(E)$

และสำหรับทุก $x \in E$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
[f+(-f)](x) &= f(x) + (-f)(x) \\
&= f(x) - f(x) \\
&= 0 \\
&= (-f)(x) + f(x) \\
&= [(-f)+f](x)
\end{aligned}
$$

แสดงว่า $f+(-f) = i = (-f)+f$

(6) ถ้า $f, g \in C(E)$

โดยนิยาม 3.1.2 และคุณสมบัติของจำนวนจริง จะได้ว่า

$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x)$

และ

$(fg)(x) = f(x)g(x) = g(x)f(x) = (gf)(x)$

แสดงว่า $f+g = g+f$

และ $fg = gf$

(7) พิจารณาฟังก์ชัน $j(x) = 1$ สำหรับ $x \in E$

โดยทฤษฎี 2.4.8 จะได้ว่า $j \in C(E)$

และสำหรับทุก $f \in C(E)$ และ $x \in E$ จะได้ว่า

$$(fj)(x) = f(x)j(x) = f(x)$$

แสดงว่า $fj = f = jf$

นั่นคือ $j$ เป็นเอกลักษณ์การคูณของ $C(E)$

(8) ถ้า $f, g, h \in C(E)$

โดยทฤษฎี 2.4.9 จะได้ว่า

$f(g+h)$ , $fg$ , $fh \in C(E)$

และสำหรับทุก $x \in E$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}[f(g+h)](x) &= f(x)(g+h)(x) \\ &= f(x)[g(x) + h(x)] \\ &= f(x)g(x) + f(x)h(x) \\ &= fg(x) + fh(x) \\ &= (fg+fh)(x)\end{aligned}$$

แสดงว่า $f(g+h) = fg + fh$

และอาศัยข้อ (5) จะได้ว่า

$$(g+h)f = gf + hf$$

จากข้อ (1) ถึง (8) และโดยนิยาม 2.1.2 - 2.1.4 จะได้ว่า $C(E)$ พร้อมด้วยการบวก และ การคูณ เป็นริงสลับที่ที่มีเอกลักษณ์ □

<u>ข้อตกลง</u> "ฟังก์ชันคงที่ $f$ " บน $E$ โดยที่ $f(x) = c$ เมื่อ $c \in R$ และ $x \in E$ จะเขียนแทนด้วย " $c$ "

<u>ข้อสังเกต</u> (1) $0$ เป็นเอกลักษณ์การบวกของ $C(E)$

(2) $1$ เป็นเอกลักษณ์การคูณของ $C(E)$

## 3.2 แมกซิมัลไอดีลใน $C([0, 1])$

ในหัวข้อนี้ จะสามารถบอกลักษณะของแมกซิมัลไอดีลทั้งหมดใน $C([0, 1])$ ได้ ซึ่งจะพิสูจน์ให้สมบูรณ์ใน ทฤษฎี 3.2.3 การพิสูจน์จะอาศัยลำดับโคชี และ คุณสมบัติทางโทโพโลยีของช่วงปิด $[0, 1]$ ดังนั้นก่อนจะพิสูจน์ทฤษฎีดังกล่าว จะเริ่มด้วยทฤษฎีนำ 2 ทฤษฎี ดังต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีนำ 3.2.1</u> ถ้า $A$ เป็นไอดีลแท้ของ $C([0, 1])$ และ $f \in A$ แล้วจะมี $x \in [0, 1]$ ซึ่งทำให้ $f(x) = 0$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $f \in A$

สมมุติว่า $f(x) \neq 0$ สำหรับทุก $x \in [0, 1]$

โดยทฤษฎี 2.4.9 จะได้ว่า

$$\frac{1}{f} \in C([0, 1])$$

เนื่องจาก $A$ เป็นไอดีล

ดังนั้น $1 = f \cdot \frac{1}{f} \in A$

โดยทฤษฎี 2.1.2 จะได้ว่า

$$A = C([0, 1])$$

ซึ่งทำให้ขัดแย้งกับที่กำหนดให้ $A$ เป็นไอดีลแท้

ดังนั้น จะมี $x \in [0, 1]$ ซึ่งทำให้ $f(x) = 0$ □

<u>หมายเหตุ</u> ทฤษฎีนำข้างต้นนี้ เป็นจริงสำหรับ $C(E)$ ทุก $E \subseteq \mathbb{R}$ แต่ไม่เป็นจริงสำหรับบางสับริงของ $C(E)$ ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ในบทที่ 4 (ทฤษฎี 4.4.1)

<u>ทฤษฎีนำ 3.2.2</u> ถ้า $[a_n, b_n] \subseteq [0, 1]$ ซึ่ง $|a_n - b_n| = \frac{1}{n}$ สำหรับทุก $n \in I^+$ และ $[a_n, b_n] \cap [a_m, b_m] \neq \emptyset$ สำหรับทุก $m, n \in I^+$ แล้วลำดับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับโคชี และจะลู่เข้าสู่จุดเดียวกันใน $[0, 1]$

<u>พิสูจน์</u> <u>ตอนที่ 1</u> จะพิสูจน์ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับโคชี

กำหนด $\varepsilon > 0$

เลือก $N \in I^+$ ซึ่งทำให้ $\frac{1}{N} < \varepsilon$

สำหรับทุก $m, n \geq N$ โดยที่ $m \geq n$

เนื่องจาก $[a_n, b_n] \cap [a_m, b_m] \neq \emptyset$

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า $a_n \leq a_m$

จะได้ว่า $a_n \leq a_m \leq b_n$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &\leq |a_n - b_n| \\ &= \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า $a_n > a_m$

จะได้ว่า $a_m < a_n \leq b_m$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &< |a_m - b_m| \\ &= \frac{1}{m} \\ &\leq \frac{1}{n} < \varepsilon \end{aligned}$$

จากที่แสดงมาข้างต้น โดยนิยาม 2.3.3 จะได้ว่า

$\{a_n\}$ เป็นลำดับโคชี

และในทำนองเดียวกัน ก็สามารถพิสูจน์ได้ว่า

$\{b_n\}$ เป็นลำดับโคชี

<u>ตอนที่ 2</u> จะพิสูจน์ว่าลำดับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่จุดเดียวกัน

ใน $[0, 1]$

จากตอนที่ 1 เราทราบว่า $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับโคชี

โดยทฤษฎี 2.3.3 (Cauchy Convergence Criterion)

จะได้ว่า $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับที่ ลู่เข้า

และเนื่องจาก $[0, 1]$ เป็นคอมแพคสับเซตของ $\mathbb{R}$

โดยทฤษฎี 2.3.5 จะได้ว่า

ลำดับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ ลู่เข้าสู่จุดใน $[0, 1]$

ให้ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = p$ สำหรับบาง $p \in [0, 1]$

กำหนด $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in I^+$ ซึ่งทำให้

$$|a_n - p| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ สำหรับทุก } n \geq N$$

เลือก $M \in I^+$ โดยที่ $M = \max(N, \frac{2}{\varepsilon})$

สำหรับทุก $n \geq M$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |b_n - p| &= |b_n - a_n + a_n - p| \\ &\leq |a_n - b_n| + |a_n - p| \\ &= \frac{1}{n} + |a_n - p| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

แสดงว่า $\lim_{n \to \infty} b_n = p$

ดังนั้น $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = p$ □

<u>ทฤษฎี 3.2.3</u> ถ้า A เป็นแมกซิมัลไอดีลใน $C([0,1])$ แล้วจะมี $p \in [0, 1]$ ซึ่งทำให้ $A = A_p$

<u>พิสูจน์</u> กำหนด $n \in I^+$

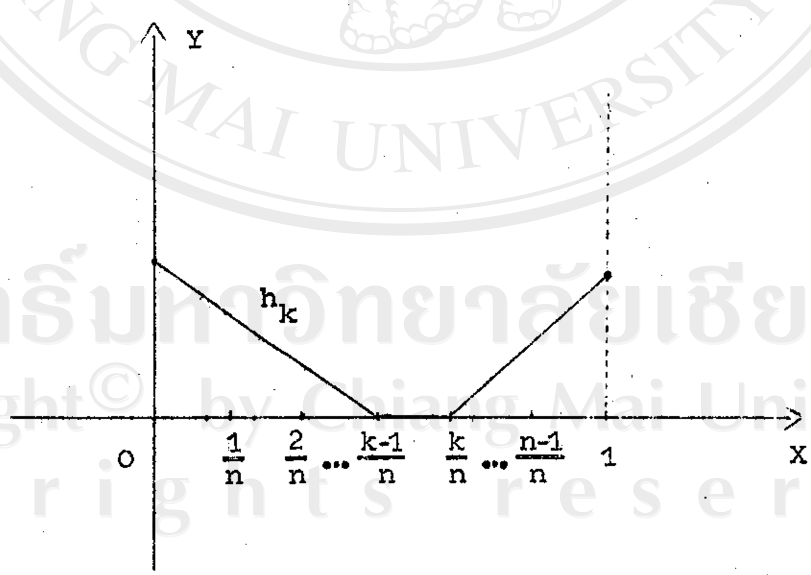
สำหรับแต่ละ $k \in I^+$ ซึ่ง $1 \leq k \leq n$

เลือก $h_k$ $C([0, 1])$ โดยที่

$h_k(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in [0, 1]$

และ $h_k(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n}$

(ดังรูปข้างล่าง)




เห็นได้ชัดว่า $h_1 h_2 \ldots h_n = 0$

แสดงว่า $h_1 h_2 \ldots h_n \in A$

และเนื่องจาก A เป็นแมกซิมัลไอดีล และ $C([0,1])$ เป็นริง
สลับที่ที่มีเอกลักษณ์
โดยทฤษฎี 2.1.7 จะได้ว่า
A เป็นไอดีลเฉพาะ

ดังนั้น $h_{k_n} \in A$ สำหรับ $k_n$ บางตัว ซึ่ง $1 \leq k_n \leq n$

ให้ $f_n = h_{k_n}$ และ $[a_n, b_n] = [\frac{k_n - 1}{n}, \frac{k_n}{n}]$

โดยวิธีการดังกล่าว สำหรับแต่ละ $n \in I^+$

$$\left.\begin{array}{l}\text{จะมี } f_n \in A \text{ ซึ่ง } f_n \geq 0 \text{ และ} \\ f_n(x) = 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } x \in [a_n, b_n] \text{ ซึ่ง } |a_n - b_n| = \frac{1}{n}\end{array}\right\} \cdots (1)$$

ต่อไปจะแสดงว่า สำหรับแต่ละ $m, n \in I^+$ จะทำให้

$$[a_n, b_n] \cap [a_m, b_m] \neq \emptyset$$

สมมุติว่า $[a_n, b_n] \cap [a_m, b_m] = \emptyset$

จะทำให้ $(f_n + f_m)(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in [0,1]$

โดยทฤษฎี 2.4.9 จะได้ว่า

$$\frac{1}{f_n + f_m} \in C([0,1])$$

เนื่องจาก $f_n + f_m \in A$

ดังนั้น $1 = \frac{1}{f_n + f_m} \cdot (f_n + f_m) \in A$

โดยทฤษฎี 2.1.2 จะได้ว่า

$$A = C([0,1])$$

ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ A เป็น แมกซิมัลไอดีล

ดังนั้น $[a_n, b_n] \cap [a_m, b_m] \neq \emptyset$ สำหรับทุก $m, n \in I^+$ ...(2)

จาก (1) และ (2) โดยทฤษฎีนำ 3.2.2 จะได้ว่า

มี $p \in [0, 1]$ ซึ่งทำให้ $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = p$ ...(3)

ต่อไปจะพิสูจน์ว่า $A \subseteq A_p$ .

ให้ $f \in A$

สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ จะได้ว่า

$$f^2 + f_n \in A$$

โดยทฤษฎีนำ 3.2.1 จะได้ว่า

มี $x_n \in [0, 1]$ ซึ่งทำให้

$$(f^2 + f_n)(x_n) = 0$$

$$f^2(x_n) + f_n(x_n) = 0 \qquad \text{...(4)}$$

เนื่องจาก $f^2, f_n \geq 0$

จาก (4) จะได้ว่า

$$f_n(x_n) = 0$$

จึงทำให้ $x_n \in [a_n, b_n]$

นั่นคือ $a_n \leq x_n \leq b_n$ สำหรับทุก $n \in I^+$

เนื่องจาก $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = p$

โดยทฤษฎี 2.3.4 จะได้ว่า

$$\lim_{n \to \infty} x_n = p$$

เนื่องจาก $f^2$ มีความต่อเนื่องที่ $p$
โดยทฤษฎี 2.4.6 จะได้ว่า

$$\lim_{n \to \infty} f^2(x_n) = f^2(p) \qquad \ldots(5)$$

จาก (4) จะได้ว่า

$f^2(x_n) = 0$ สำหรับทุก $n \in I^+$

ดังนั้น $\lim_{n \to \infty} f^2(x_n) = 0$

และจาก (5) จะได้ว่า

$f^2(p) = 0$

ดังนั้น $f(p) = 0$

แสดงว่า $f \in A_p$

จึงทำให้ $A \subseteq A_p$ $\qquad \ldots(6)$

ต่อไปจะแสดงว่า $A_p$ เป็นไอดีลแท้ของ $C([0,1])$

ให้ $f, g \in A_p$

จะได้ว่า $f(p) = g(p) = 0$

ดังนั้น $(f-g)(p) = f(p) - g(p) = 0$

แสดงว่า $f-g \in A_p$

ให้ $f \in A_p$ และ $h \in C([0,1])$

จะได้ว่า $f(p) = 0$

ดังนั้น $(fh)(p) = f(p)h(p) = 0 \cdot h(p) = 0$

แสดงว่า $fh \in A_p$

จึงทำให้ $A_p$ เป็นไอดีลของ $C([0,1])$

และเนื่องจาก $1 \in C([0,1])$ แต่ $1 \notin A_p$

ดังนั้น $A_p$ เป็นไอดีลแท้ของ $C([0,1])$ ...(7)

จาก (6), (7) เนื่องจาก $A$ เป็นแมกซิมัลไอดีล

โดยนิยาม 2.1.8 จะได้ว่า

$$A = A_p$$ □

<u>ข้อสังเกต</u> ถ้า $p \in [0,1]$ จะได้ว่า $A_p$ เป็นแมกซิมัลไอดีลของ $C([0,1])$ ซึ่งจะแสดงการพิสูจน์ในบทที่ 4 (ทฤษฎี 4.3.1) ดังนั้นจึงทำให้สรุปได้ว่า " $A$ เป็นแมกซิมัลไอดีลของ $C([0,1])$ ก็ต่อเมื่อ มี $p \in [0,1]$ ซึ่งทำให้ $A = A_p$ "

## 3.3 <u>แมกซิมัลไอดีลใน $C(E)$ เมื่อ $E$ เป็นคอมแพคสับเซตของ $\mathbb{R}$</u>

จากข้อสังเกตหลังทฤษฎี 3.2.3 ชี้ให้เห็นถึงลักษณะของแมกซิมัลไอดีลทั้งหมดใน $C([0,1])$ และผลสรุปในข้อสังเกตดังกล่าว ยังคงเป็นจริงใน $C(E)$ เมื่อ $E$ เป็นคอมแพคสับเซตของ $\mathbb{R}$ ซึ่งจะพิสูจน์ให้เห็นจริงในทฤษฎี 3.3.3 และข้อสังเกตหลังทฤษฎีนี้ โดยจะเริ่มด้วยทฤษฎีนำ 2 ทฤษฎี ดังต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีนำ 3.3.1</u> ให้ $E$ เป็นคอมแพคสับเซตของ $\mathbb{R}$ และ $A$ เป็นไอดีลแท้ของ $C(E)$ ถ้า $f \in A$ แล้วจะมี $p \in E$ ซึ่งทำให้ $f(p) = 0$

<u>พิสูจน์</u> (พิสูจน์ทำนองเดียวกับทฤษฎีนำ 3.2.1)

<u>ทฤษฎีนำ 3.3.2</u> ถ้า $E$ เป็นคอมแพคสับเซตของ $\mathbb{R}$ และ $p \in E$ แล้ว $A_p$ เป็นไอดีลแท้ของ $C(E)$

<u>พิสูจน์</u> (พิสูจน์ทำนองเดียวกับการพิสูจน์ว่า $A_p$ เป็นไอดีลแท้ของ $C([0,1])$ ในบทพิสูจน์ของทฤษฎี 3.2.3 )

<u>ทฤษฎี 3.3.3</u> ถ้า $E$ เป็นคอมแพกสับเซตของ $\mathbb{R}$ แล้ว แต่ละแมกซิมัลไอดีล $A$ ของ $C(E)$ จะมี $p \in E$ ซึ่งทำให้ $A = A_p$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $A = \{f_\alpha | \alpha \in \wedge\}$ เป็นแมกซิมัลไอดีลของ $C(E)$

ถ้า $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \wedge$ สำหรับ $n \in I^+$

จะได้ว่า $f^2_{\alpha_i} \in A$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \ldots, n$

ดังนั้น $f^2_{\alpha_1} + f^2_{\alpha_2} + \ldots + f^2_{\alpha_n} \in A$

โดยทฤษฎีนำ 3.3.1 จะมี $t \in E$ ซึ่งทำให้

$$(f^2_{\alpha_1} + f^2_{\alpha_2} + \ldots + f^2_{\alpha_n})(t) = 0 \qquad \ldots(1)$$

เนื่องจาก $f^2_{\alpha_i} \geq 0$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \ldots, n$

ดังนั้น จาก (1) จะได้ว่า

$$f^2_{\alpha_i}(t) = 0 \text{ สำหรับทุก } i = 1, 2, \ldots, n$$

ทำให้ $f_{\alpha_i}(t) = 0$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \ldots, n$

แสดงว่า $t \in f^{-1}_{\alpha_i}(0)$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \ldots, n$

ดังนั้น $\bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}_{\alpha_i}(0) \neq \emptyset$ $\qquad \ldots(2)$

เนื่องจาก $f_\alpha$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $E$ สำหรับทุก $\alpha \in \wedge$

โดยทฤษฎี 2.4.10 จะได้ว่า

$f^{-1}_\alpha(0)$ เป็นเซตปิดใน $E$

แสดงว่า $\{f_\alpha^{-1}(0) \mid \alpha \in \wedge\}$ เป็นคลาสของเซตปิดใน $E$

และจาก (2) จะได้ว่า $\{f_\alpha^{-1}(0) \mid \alpha \in \wedge\}$ มีคุณสมบัติ f.i.p.

เนื่องจาก $E$ เป็นคอมแพคเซต

โดยทฤษฎี 2.2.5 จะได้ว่า

$$\bigcap_{\alpha \in \wedge} f_\alpha^{-1}(0) \neq \emptyset$$

แสดงว่ามี $p \in E$ ซึ่งทำให้

$$p \in \bigcap_{\alpha \in \wedge} f_\alpha^{-1}(0)$$

ดังนั้น สำหรับแต่ละ $\alpha \in \wedge$ จะได้ว่า

$$p \in f_\alpha^{-1}(0)$$

นั่นคือ $f_\alpha(p) = 0$

ดังนั้น $A \subseteq A_p$

จากทฤษฎีนำ 3.3.2 ทราบว่า $A_p$ เป็นไอดีลแท้ของ $C(E)$

แสดงว่า $A_p \neq C(E)$

โดยนิยาม 2.1.8 จะได้ว่า

$$A = A_p \qquad \square$$

<u>ข้อสังเกต</u> ถ้า E เป็นคอมแพคสับเซตของ $\mathbb{R}$ และ $p \in E$ จะได้ว่า $A_p$ เป็นแมกซิมัลไอดีลของ C(E) ซึ่งจะแสดงการพิสูจน์ในบทที่ 4 (ทฤษฎี 4.3.1) ดังนั้น จึงทำให้สรุปได้ว่า " ถ้า E เป็นคอมแพคสับเซตของ $\mathbb{R}$ ดังนั้น A จะเป็นแมกซิมัลไอดีลของ C(E) ก็ต่อเมื่อมี $p \in E$ ซึ่งทำให้ $A = A_p$ "

ข้อสังเกตหลังทฤษฎี 3.3.3 ชี้ให้เห็นถึง ลักษณะของแมกซิมัลไอดีลทั้งหมดใน C(E) เมื่อ E เป็นคอมแพคสับเซตของ $\mathbb{R}$ จึงทำให้เกิดความสนใจที่จะศึกษาถึงลักษณะของแมกซิมัลไอดีลใน C(E) เมื่อ E เป็นสับเซตใด ๆ ของ $\mathbb{R}$ ซึ่งเรื่องดังกล่าวจะศึกษาในบทที่ 4 ต่อไป