

แมกนิลไอคัลใน $C_b^*(E)$ เมื่อ E มีขอบเขต

การศึกษาในบทนี้ จะเริ่มด้วยการพิสูจน์บทกลับของทฤษฎี 3.3.3 เพื่อเป็น
หลักฐานว่า ถ้า E ไม่เป็นคอมแพกต์สเปซของ $\mathbb{R}$ แล้ว จะมีแมกนิลไอคัล A
ใน $C(E)$ โดยที่ $A \neq A_p$ สำหรับทุก $p \in E$

4.1 บทกลับของทฤษฎี 3.3.3

ทฤษฎี 4.1.1 ให้ $E \subseteq \mathbb{R}$ ถ้าแต่ละแมกนิลไอคัล A ของ $C(E)$ มี $p \in E$
ที่ทำให้ $A = A_p$ แล้ว E เป็นคอมแพกต์สเปซของ $\mathbb{R}$

พิสูจน์

ตอนที่ 1 จะพิสูจน์ว่า E เป็นเซตปิด

ให้ $p \in E'$

และ $\{p_n\}$ เป็นลำดับใน E ซึ่ง $p_i \neq p_j$ เมื่อ $i \neq j$ และ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$$

โดยไม่เสียความเป็นทั่วไป ให้ $p_i < p_j$ เมื่อ $i < j$

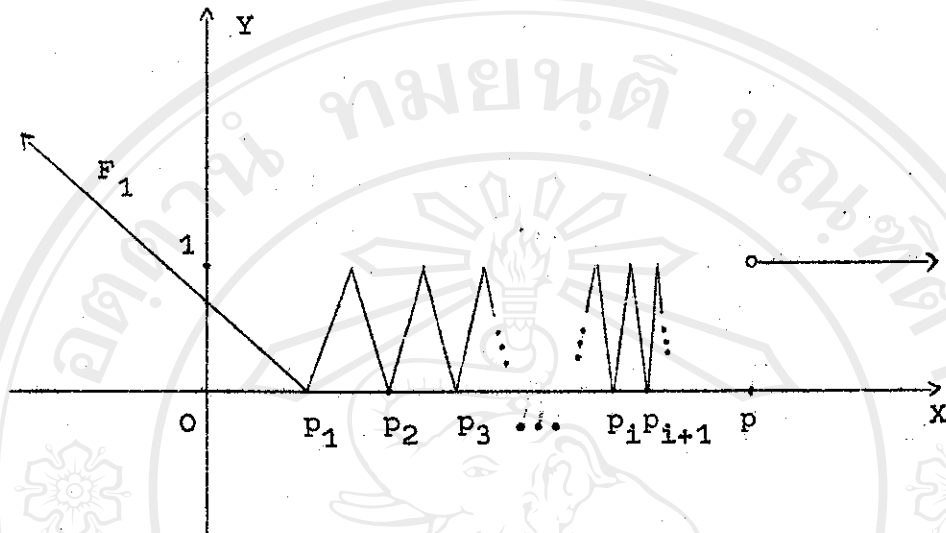
(ถ้า $p_i > p_j$ เมื่อ $i < j$ สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน)

สมมติว่า $p \notin E$

กำหนด $F_1 : \mathbb{R} - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}$ โดย

$$F_1(x) = \begin{cases} -x + p_1 & \text{เมื่อ } x < p_1 \\ \frac{2}{p_{i+1} - p_i} (x - p_i) & \text{เมื่อ } p_i \leq x < \frac{p_i + p_{i+1}}{2} \\ & \text{โดยที่ } i = 1, 2, \dots \\ \frac{2}{p_i - p_{i+1}} (x - p_{i+1}) & \text{เมื่อ } \frac{p_i + p_{i+1}}{2} \leq x < p_{i+1} \\ & \text{โดยที่ } i = 1, 2, \dots \\ 1 & \text{เมื่อ } x > p \end{cases}$$

(ดังรูปข้างล่าง)



เห็นได้ว่า F_1 เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R} - \{p\}$

เนื่องจาก $E \subseteq \mathbb{R} - \{p\}$

โดยทฤษฎี 2.4.14 จะได้ว่า

$F_1|_E$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน E

ให้ $f_1 = F_1|_E$

จะเห็นว่า $f_1 \in C(E)$ และ

$f_1(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = p_1, p_2, p_3, \dots$ เท่านั้น

โดยวิธีการข้างต้น สามารถเลือก $f_2, f_3, f_4, \dots \in C(E)$ โดยที่

$f_2(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = p_2, p_3, p_4, \dots$ เท่านั้น

$f_3(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = p_3, p_4, p_5, \dots$ เท่านั้น

$\vdots$

$f_i(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = p_i, p_{i+1}, p_{i+2}, \dots$ เท่านั้น

$\vdots$

$$\begin{aligned} \text{ให้ } A_1 &= \{ff_1 \mid f \in C(E)\} \\ A_2 &= \{ff_2 \mid f \in C(E)\} \\ &\vdots \\ A_i &= \{ff_i \mid f \in C(E)\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

และ $A^* =$ เซตของผลบวกแบบจำกัดของสมาชิกใน $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

ต่อไปจะแสดงว่า A^* เป็นไคลด์แหวนของ $C(E)$

(1) ให้ $a_1^*, a_2^* \in A^*$

จะได้ว่า $a_1^* = \sum_{i=1}^n f'_{\alpha_i} f_{\alpha_i}$ สำหรับ α_i และ $f'_{\alpha_i} (i = 1, 2, \dots, n)$
บางตัวใน I^+ และ $C(E)$ ตามลำดับ

และ $a_2^* = \sum_{j=1}^m f'_{\alpha_j} f_{\alpha_j}$ สำหรับ α_j และ $f'_{\alpha_j} (j = 1, 2, \dots, m)$
บางตัวใน I^+ และ $C(E)$ ตามลำดับ

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } a_1^* - a_2^* &= \sum_{i=1}^n f'_{\alpha_i} f_{\alpha_i} - \sum_{j=1}^m f'_{\alpha_j} f_{\alpha_j} \\ &= \text{ผลบวกแบบจำกัดของสมาชิกใน } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \end{aligned}$$

แสดงว่า $a_1^* - a_2^* \in A^*$

(2) ให้ $a^* \in A^*$ และ $g \in C(E)$

จะได้ว่า $a^* = \sum_{i=1}^n f'_{\alpha_i} f_{\alpha_i}$ สำหรับ α_i และ $f'_{\alpha_i} (i = 1, 2, \dots, n)$
บางตัวใน I^+ และ $C(E)$
ตามลำดับ

ดังนั้น $ga^* = g \sum_{i=1}^n f'_{\alpha_i} f_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^n (gf'_{\alpha_i}) f_{\alpha_i}$
 = ผลบวกแบบจำกัดของสมาชิกใน $\bigcup_{i=1}^n A_i$

ทำให้ $ga^* \in A^*$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า

A^* เป็นไอคีดของ $C(E)$

สมมติว่า $1 \in A^*$

แสดงว่า $1 = \sum_{i=1}^k f'_{\alpha_i} f_{\alpha_i}$ สำหรับ α_i และ f'_{α_i} ($i = 1, 2, \dots, k$)

บางตัวใน I^+ และ $C(E)$ ตามลำดับ

ให้ $k^* = \max(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$

จากนิยามของ f_i เมื่อ $i \in I^+$ จะเห็นได้ชัดว่า

$f_i(p_j) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $i \leq j$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^k (f'_{\alpha_i} f_{\alpha_i})(p_{k^*}) = 0$

ขัดแย้งที่ว่า $1 = \sum_{i=1}^k f'_{\alpha_i} f_{\alpha_i}$

จึงทำให้ $1 \notin A^*$

ดังนั้น A^* เป็นไอคีดแท้ ของ $C(E)$

โดยทฤษฎี 2.1.6 จะได้ว่า

มี แวกซ์มิดไอคีด M ซึ่ง $A^* \subseteq M$

ดังนั้น $M = A_{p^*}$ สำหรับ p^* บางตัวใน E

สำหรับแต่ละ $n \in I^+$ จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^n f_i^2 \in A^* \subseteq A_{p^*}$$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^n f_i^2(p^*) = 0$

ทำให้ $f_i^2(p^*) = 0$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, n$

ดังนั้น $f_i(p^*) = 0$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, n$

นั่นคือ $f_n(p^*) = 0$ สำหรับทุก $n \in I^+$

ดังนั้น $p_n \leq p^*$ สำหรับทุก $n \in I^+$

และถ้า $p^* > p$

จะทำให้ $f_n(p^*) \neq 0$ สำหรับทุก $n \in I^+$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $p^* \leq p$

นั่นคือ สำหรับทุก $n \in I^+$ จะได้ว่า

$$p_n \leq p^* \leq p$$

เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$

โดยทฤษฎี 2.3.4 จะได้ว่า

$$p^* = p$$

จึงทำให้ $p \in E$

โดยนิยาม 2.2.4 จะได้ว่า

E เป็นเซตปิด

ตอนที่ 2 จะพิสูจน์ว่า E เป็นคอมแพกต์เชตของ $\mathbb{R}$

ให้ $\{F_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ เป็นคลาสของเชตปิดใน E ซึ่งมีคุณสมบัติ

f.i.p. สำหรับแต่ละ $\alpha \in \Lambda$

เนื่องจาก F_α เป็นเชตปิดใน E

และ E เป็นเชตปิดใน $\mathbb{R}$ (จากตอนที่ 1)

จึงทำให้ F_α เป็นเชตปิดใน $\mathbb{R}$

โดยอาศัย Tietze's Extension Theorem สามารถสร้างเชต

$$B_\alpha = \{f \in C(E) \mid f(x) = 0 \text{ เมื่อ } x \in F_\alpha\}$$

ต่อไปจะพิสูจน์ว่า B_α เป็นไอดัลเชตของ $C(E)$

ถ้า $f_1, f_2 \in B_\alpha$ สำหรับแต่ละ $x \in F_\alpha$

จะได้ว่า $f_1(x) = f_2(x) = 0$

ดังนั้น $(f_1 - f_2)(x) = f_1(x) - f_2(x) = 0$

แสดงว่า $f_1 - f_2 \in B_\alpha$

และถ้า $f \in B_\alpha$ และ $g \in C(E)$

สำหรับแต่ละ $x \in F_\alpha$

จะได้ว่า $f(x) = 0$

ดังนั้น $(fg)(x) = f(x)g(x) = 0 \cdot g(x) = 0$

แสดงว่า $fg \in B_\alpha$

โดยนิยาม 2.1.6 จะได้ว่า

$$B_\alpha \text{ เป็นไอดัลเชตของ } C(E)$$

สมมติว่า $1 \in B_\alpha$

จะทำให้ $F_\alpha = \emptyset$

ซึ่งขัดแย้งที่ว่า $\{F_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ มีคุณสมบัติ f.i.p.

ดังนั้น $1 \notin B_\alpha$

แสดงว่า B_α เป็นไอคิธของ $C(E)$

ให้ $B^* =$ เซตของสมาชิกแบบจำกัดของสมาชิกใน $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$

โดยทฤษฎี 2.1.3 จะได้ว่า

B^* เป็นไอคิธของ $C(E)$

(ต่อไปจะแสดงว่า B^* เป็นไอคิธแท้ของ $C(E)$)

สมมติว่า มี $1 \in B^*$

ดังนั้น $1 = \sum_{i=1}^n a_{\alpha_i}$ สำหรับ $a_{\alpha_i} \in B_{\alpha_i}$ ($i=1,2,\dots,n$)
บางตัว

เนื่องจาก $a_{\alpha_i}(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in F_{\alpha_i}$

และ $\bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i} \neq \emptyset$

ให้ $p^* \in \bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i}$

จะได้ว่า $a_{\alpha_i}(p^*) = 0$ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^n a_{\alpha_i}(p^*) = 0$

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1$$

ดังนั้น $1 \notin B^*$

แสดงว่า B^* เป็นไอเดิลแทนของ $C(E)$

และเนื่องจาก $C(E)$ เป็นริงที่มีเอกลักษณ์

โดยทฤษฎี 2.1.6 จะได้ว่า มีแมกซิมัลไอเดิล M ซึ่ง $B^* \subseteq M$

จากสิ่งกำหนดให้ จะได้ว่า

มี $p \in E$ ซึ่งทำให้ $M = A_p$

สำหรับแต่ละ $\alpha \in \wedge$ กำหนด $f'_\alpha : F_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่ $f'_\alpha = 0$

จากทฤษฎี 2.4.8 จะได้ว่า f'_α ต่อเนื่องบน F_α

โดยนัยเหตุหลัง Tietze's Extension Theorem จะได้ว่า

มีฟังก์ชันต่อเนื่อง $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ซึ่ง $h(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} - F_\alpha$

$$\text{และ } h|_{F_\alpha} = f'_\alpha$$

$$\text{ให้ } f_\alpha = h|_E$$

จะได้ว่า $f_\alpha \in C(E)$ ซึ่ง $f_\alpha^{-1}(0) = F_\alpha$

เห็นได้ชัดว่า $f_\alpha \in B_\alpha$

ดังนั้น $f_\alpha \in B^* \subseteq M = A_p$

จึงทำให้ $f_\alpha(p) = 0$

แสดงว่า $p \in f_\alpha^{-1}(0)$ สำหรับทุก $\alpha \in \wedge$

ดังนั้น $p \in \bigcap_{\alpha \in \wedge} f_\alpha^{-1}(0) = \bigcap_{\alpha \in \wedge} F_\alpha$

แสดงว่า $\bigcap_{\alpha \in \wedge} F_\alpha \neq \emptyset$

โดยทฤษฎี 2.2.5 จะได้ว่า E เป็นคอมแพกต์สับเซตของ $\mathbb{R}$ □

4.2 สับริงของ $C(E)$

โดยทั่วไปแล้ว ถ้า E เป็นสับเซตใด ๆ ของ $\mathbb{R}$ และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน E f อาจจะเป็นฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขต (ทฤษฎี 2.4.13) และถึงแม้ว่า f จะเป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต f อาจจะไม่มีความต่อเนื่องที่จุดบางจุดใน $E' - E$ ก็ได้ ซึ่งจะเห็นได้จากตัวอย่างต่อไป แต่เพื่อความสะดวกในการศึกษา จะตกลงสัญลักษณ์ดังต่อไปนี้

สัญลักษณ์

ให้ $E \subseteq \mathbb{R}$

$$(1) C_b(E) = \{f \in C(E) \mid f \text{ มีขอบเขตบน } E\}$$

$$(2) C_b^*(E) = \{f \in C_b(E) \mid \lim_{x \rightarrow q} f(x)$$

มีจริงสำหรับทุก $q \in E' - E\}$

จากความหมายตามสัญลักษณ์ข้างบน โดยทฤษฎี 2.4.5 และ 2.4.12 ถ้า E เป็นคอมแพกต์สับเซตของ $\mathbb{R}$ แล้วจะได้ว่า $C(E) = C_b(E) = C_b^*(E)$ แต่ในกรณีทั่วไปจะไม่จริง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.2.1 ให้ $E = (0, 1)$ จะได้ว่า $C((0, 1)) \neq C_b((0, 1))$

โดยพิจารณาจากฟังก์ชัน $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

เห็นได้ชัดว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(0, 1)$

แต่ f เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขตบน $(0, 1)$

ดังนั้น $C((0, 1)) \neq C_b((0, 1))$

□

ตัวอย่าง 4.2.2 ให้ $E = (0, 1)$ จะได้ว่า $C_b((0, 1)) \neq C_b^*((0, 1))$

โดยพิจารณาจากฟังก์ชัน $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ กำหนดโดย

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและมีขอบเขตบน E

แสดงว่า $f \in C_b((0, 1))$

แต่ $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ ไม่มี

แสดงว่า $f \notin C_b^*((0, 1))$

นั่นคือ $C_b((0, 1)) \neq C_b^*((0, 1))$

จากสัจพจน์ข้างบนเห็นได้ว่า $C_b^*(E) \subseteq C_b(E) \subseteq C(E)$
และทฤษฎีบท 2 ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะประกันว่า $C_b^*(E)$ และ $C_b(E)$ ต่างก็เป็น
ริง และในหัวข้อต่อไปนี้จะเริ่มศึกษาถึงลักษณะของแมกซ์มัลไอส์ในริงทั้งสาม

ทฤษฎีบท 4.2.1 ถ้า $E \subseteq \mathbb{R}$ แล้ว $C_b(E)$ เป็นสับริงของ $C(E)$

พิสูจน์

(1) เนื่องจาก $1 \in C(E)$

และ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน E

แสดงว่า $1 \in C_b(E)$

นั่นคือ $C_b(E) \neq \emptyset$

(2) ให้ $f, g \in C_b(E)$

โดยทฤษฎี 2.4.9 จะได้ว่า

$$f - g \in C(E)$$

สำหรับทุก $x \in E$ จะมี $M, N \in I^+$ ซึ่ง

$$|f(x)| \leq M$$

และ $|g(x)| \leq N$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } (f-g)(x) &= |f(x) - g(x)| \\ &\leq |f(x)| + |g(x)| \\ &\leq M + N \end{aligned}$$

แสดงว่า $f-g$ มีขอบเขตบน E

ดังนั้น $f-g \in C_b(E)$

(3) ให้ $f, g \in C_b(E)$

โดยทฤษฎี 2.4.9 จะได้ว่า

$$fg \in C(E)$$

สำหรับทุก $x \in E$ จะมี $M, N \in I^+$ ซึ่ง

$$|f(x)| \leq M$$

และ $|g(x)| \leq N$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } |fg(x)| &= |f(x)g(x)| \\ &= |f(x)| |g(x)| \\ &\leq MN \end{aligned}$$

แสดงว่า fg มีขอบเขตบน E

นั่นคือ $fg \in C_b(E)$

จาก (1) ถึง (3) โดยทฤษฎี 2.1.1 จะได้ว่า

$C_b(E)$ เป็นสับริงของ $C(E)$ □

ทฤษฎีบท 4.2.2

ถ้า $E \subseteq \mathbb{R}$ แล้ว $C_b^*(E)$ เป็นสับริงของ $C_b(E)$

พิสูจน์

(1) เนื่องจาก $1 \in C_b(E)$

และ $\lim_{x \rightarrow q} 1 = 1$ สำหรับทุก $q \in E' - E$

ดังนั้น $1 \in C_b^*(E)$

นั่นคือ $C_b^*(E) \neq \emptyset$

(2) ให้ $f, g \in C_b^*(E)$

จากทฤษฎีบท 4.2.1 จะได้ว่า

$$f - g \in C_b(E)$$

$$\text{และ } fg \in C_b(E)$$

สำหรับแต่ละ $g \in E' - E$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow q} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow q} g(x)$ มีจริง

โดยทฤษฎี 2.4.3 จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow q} (f - g)(x) \text{ และ } \lim_{x \rightarrow q} fg(x) \text{ มีจริง}$$

ดังนั้น $f - g \in C_b^*(E)$ และ $fg \in C_b^*(E)$

จาก (1) และ (2) โดยทฤษฎี 2.1.1 จะได้ว่า

$C_b^*(E)$ เป็นสับริงของ $C_b(E)$ □

4.3 แมกนิลไอส์ที่มีลักษณะคล้ายกันใน $C(E)$, $C_b(E)$ และ $C_b^*(E)$

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราทราบว่า $C(E)$, $C_b(E)$ และ $C_b^*(E)$ ต่างก็เป็นริง และจากการศึกษาพบว่า ในริงทั้งสามดังกล่าว จะมีแมกนิลไอส์ล่อยุ่กลุ่มหนึ่ง ที่มีลักษณะคล้ายกัน ดังรายละเอียดที่จะกล่าวต่อไป

สัญลักษณ์

ให้ $E \in \mathbb{R}$ และ $p \in E$

$$(1) \quad A_p = \{f \in C(E) \mid f(p) = 0\}$$

$$(2) \quad A_p^b = \{f \in C_b(E) \mid f(p) = 0\}$$

$$(3) \quad A_p^* = \{f \in C_b^*(E) \mid f(p) = 0\}$$

จากความหมายของสัญลักษณ์ข้างบน ทฤษฎีที่จะกล่าวในหัวข้อนี้ จะชี้ให้เห็นว่า A_p , A_p^b และ A_p^* เป็นแมกนิลไอส์ลของ $C(E)$, $C_b(E)$ และ $C_b^*(E)$ ตามลำดับ

ทฤษฎี 4.3.1 ให้ $E \subseteq \mathbb{R}$ และ $p \in E$ แล้ว A_p เป็นแมกนิลไอส์ลใน $C(E)$

พิสูจน์

$$(1) \quad \text{ให้ } f_1, f_2 \in A_p$$

โดยทฤษฎี 2.4.9 จะได้ว่า

$$f_1 - f_2 \in C(E)$$

$$\text{และ } (f_1 - f_2)(p) = f_1(p) - f_2(p) = 0 - 0 = 0$$

$$\text{แสดงว่า } f_1 - f_2 \in A_p$$

$$(2) \quad \text{ให้ } f \in C(E) \text{ และ } g \in A_p$$

โดยทฤษฎี 2.4.9 จะได้ว่า

$$fg \in C(E)$$

$$\text{และ } (fg)(p) = f(p)g(p) = f(p) \cdot 0 = 0$$

$$\text{แสดงว่า } fg \in A_p$$

(3) จากทฤษฎี 2.4.8 เราทราบว่า

$$1 \in C(E)$$

และเห็นได้ชัดว่า

$$1 \notin A_p$$

$$\text{ดังนั้น } A_p \subset C(E)$$

(4) สมมติว่า มีไอเดิล M โดยที่ $A_p \subset M$

จะมี $f \in M$ แต่ $f \notin A_p$

$$\text{แสดงว่า } f(p) \neq 0$$

$$\text{ให้ } f(p) = r$$

สำหรับทุก $x \in E$ กำหนดฟังก์ชัน g โดยที่

$$g(x) = f(x) - r$$

โดยทฤษฎี 2.4.8 และ 2.4.9 จะได้ว่า

$$g \in C(E)$$

$$\text{และเนื่องจาก } g(p) = f(p) - r = r - r = 0$$

$$\text{ดังนั้น } g \in A_p$$

$$\text{แสดงว่า } g \in M$$

$$\text{ดังนั้น } f - g \in M$$

สำหรับทุก $x \in E$

โดยนิยามของ g จะได้ว่า

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = r$$

และกำหนดฟังก์ชัน h โดยที่

$$h(x) = \frac{1}{r} \quad \text{สำหรับทุก } x \in E$$

โดยทฤษฎี 2.4.8 จะได้ว่า

$$h \in C(E)$$

$$\text{ดังนั้น } 1 = r \cdot \frac{1}{r} = (f - g)h \in M$$

โดยทฤษฎี 2.1.2 จะได้ว่า

$$M = C(E)$$

จาก (1) ถึง (4) โดยนิยาม 2.1.8 จะได้ว่า

A_p เป็นแมกซิมัลไอดัลของ $C(E)$ □

ทฤษฎี 4.3.2 ให้ $E \in \mathbb{R}$ และ $p \in E$ แล้ว A_p^b เป็นแมกซิมัลไอดัล
ของ $C_b(E)$

พิสูจน์

(1) ให้ $f_1, f_2 \in A_p^b$

จะได้ว่า $f_1 - f_2 \in C_b(E)$

$$\text{และ } (f_1 - f_2)(p) = f_1(p) - f_2(p) = 0 - 0 = 0$$

แสดงว่า $f_1 - f_2 \in A_p^b$

(2) ให้ $f \in C_b(E)$ และ $g \in A_p^b$

จะได้ว่า $fg \in C_b(E)$

$$\text{และ } (fg)(p) = f(p)g(p) = f(p) \cdot 0 = 0$$

แสดงว่า $fg \in A_p^b$

(3) เนื่องจาก $1 \in C_b(E)$

แต่ $1 \notin A_p^b$

แสดงว่า $A_p^b \subset C_b(E)$

(4) สมมติว่ามีไอคิ็ด M ซึ่ง $A_p^b \subset M$

จะมี $f \in M$ แต่ $f \notin A_p^b$

แสดงว่า $f(p) \neq 0$

ให้ $f(p) = r$

สำหรับทุก $x \in E$ กำหนดฟังก์ชัน g โดยที่

$$g(x) = f(x) - r$$

เนื่องจาก $C_b(E)$ เป็นริง และ $f, r \in C_b(E)$

ดังนั้น $g = f - r \in C_b(E)$

$$\text{และ } g(p) = f(p) - r = r - r = 0$$

ดังนั้น $g \in A_p^b$

แสดงว่า $g \in M$

ดังนั้น $f - g \in M$

และสำหรับทุก $x \in E$ จะได้ว่า

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = r$$

กำหนดฟังก์ชัน h บน E โดยที่

$$h(x) = \frac{1}{r} \quad \text{สำหรับทุก } x \in E$$

โดยทฤษฎี 2.4.8 จะได้ว่า

$$h \in C(E)$$

และเห็นได้ชัดว่า h เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต

$$\text{แสดงว่า } h \in C_b(E)$$

$$\text{ดังนั้น } 1 = r \cdot \frac{1}{r} = (f-g)h \in M$$

โดยทฤษฎี 2.1.2 จะได้ว่า

$$M = C_b(E)$$

จาก (1) ถึง (4) โดยนิยาม 2.1.8 จะได้ว่า

$$A_p^b \text{ เป็นแมกซิมัลไอดัล ของ } C_b(E)$$

□

ทฤษฎี 4.3.3 ให้ $E \in \mathbb{R}$ และ $p \in E$ แล้ว A_p^* เป็นแมกซิมัลไอดัล
ของ $C_b^*(E)$

พิสูจน์

$$(1) \text{ ให้ } f_1, f_2 \in A_p^*$$

$$\text{จะได้ว่า } f_1 - f_2 \in C_b^*(E)$$

$$\text{และ } (f_1 - f_2)(p) = f_1(p) - f_2(p) = 0 - 0 = 0$$

$$\text{แสดงว่า } f_1 - f_2 \in A_p^*$$

(2) ให้ $f \in C_b^*(E)$ และ $g \in A_p^*$

จะได้ว่า $fg \in C_b^*(E)$

$$\text{และ } fg(p) = f(p)g(p) = f(p) \cdot 0 = 0$$

แสดงว่า $fg \in A_p^*$

(3) เนื่องจาก $1 \in C_b^*(E)$

และสำหรับทุก $q \in E - E$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow q} 1 = 1$$

แสดงว่า $1 \in C_b^*(E)$

และเห็นได้ชัดว่า $1 \notin A_p^*$

ดังนั้น $A_p^* \subset C_b^*(E)$

(4) สมมติว่า มีไอคีด M ซึ่ง $A_p^* \subset M$

จะมี $f \in M$ แต่ $f \notin A_p^*$

แสดงว่า $f(p) \neq 0$

ให้ $f(p) = r$

กำหนด $g : E \rightarrow R$ โดยที่

$$g(x) = f(x) - r$$

เนื่องจาก $f, r \in C_b^*(E)$

ดังนั้น $g = f - r \in C_b^*(E)$

$$\text{และ } g(p) = f(p) - r = r - r = 0$$

แสดงว่า $g \in A_p^* \subset M$

ดังนั้น $f - g \in M$

และสำหรับทุก $x \in E$ จะได้ว่า

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = r$$

กำหนด $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่

$$h(x) = \frac{1}{r}$$

โดยทฤษฎี 2.4.3 และ 2.4.8 จะได้ว่า

$$h \in C_b(E)$$

และสำหรับทุก $g \in E' \subset E$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow q} h(x) = \frac{1}{r}$$

แสดงว่า $h \in C_b^*(E)$

ดังนั้น $1 = r \cdot \frac{1}{r} = (f - g)h \in M$

โดยทฤษฎี 2.1.2 จะได้ว่า

$$M = C_b^*(E)$$

จาก (1) ถึง (4) โดยนิยาม 2.1.8 จะได้ว่า

A_p^* เป็น เมกซ์มัลไอคีด ของ $C_b^*(E)$ $\square$

Copyright© by Chiang Mai University

All rights reserved

4.4 แมกนิตไอคัลทั้งหมดใน $C_b^*(E)$ เมื่อ E มีขอบเขต

ในหัวข้อ 4.3 ที่ผ่านมา เราทราบว่า แมกนิตไอคัลอยู่กลุ่มหนึ่งใน $C(E)$, $C_b(E)$ และ $C_b^*(E)$ ที่มีลักษณะคล้ายกัน แต่จากการศึกษาในหัวข้อนี้ ได้พบลักษณะของแมกนิตไอคัลใน $C_b^*(E)$ อีกลักษณะหนึ่ง แต่ไม่เป็นไอคัลของ $C(E)$ และเป็นไอคัลแท้ของ $C_b(E)$ แต่ไม่เป็นแมกนิตไอคัลของ $C_b(E)$ และในทฤษฎีสุดท้ายของหัวข้อนี้ จะสามารถบอกลักษณะของแมกนิตไอคัลทั้งหมดใน $C_b^*(E)$ เมื่อ E มีขอบเขต

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า ถ้า $E \subseteq \mathbb{R}$ และ $q \in E' - E$ แล้วเซต $\tilde{A}_q = \{f \in C(E) \mid \lim_{x \rightarrow q} f(x) = 0\}$ ไม่จำเป็นต้องเป็นไอคัลของ $C(E)$

ตัวอย่าง 4.4.1 $\tilde{A}_0$ ไม่เป็นไอคัลของ $C((0, 1))$

พิสูจน์

พิจารณา $C((0, 1))$

จะเห็นว่า 0 เป็นจุดลิมิตของ $(0, 1)$ และ $0 \notin (0, 1)$

กำหนด $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่

$$f(x) = x$$

เห็นได้ชัดว่า $f \in C((0, 1))$

และ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

ทำให้ $f \in \tilde{A}_0$

โดยทฤษฎี 2.4.9 จะได้ว่า

$$\frac{1}{f} \in C((0, 1))$$

เนื่องจาก $f \cdot \frac{1}{f} = 1$

แต่ $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \neq 0$

แสดงว่า $1 \notin \tilde{A}_0$ ซึ่งทำให้

$$f \cdot \frac{1}{f} \notin \tilde{A}_0$$

โดยนิยาม 2.1.6 จะได้ว่า

$\tilde{A}_0$ ไม่เป็นไอดัลของ $C((0, 1))$ □

ข้อสังเกต

ให้ $E \subseteq \mathbb{R}$ และ $q \in E' - E$ จะได้ว่า

$\tilde{A}_q = \{f \in C_b(E) \mid \lim_{x \rightarrow q} f(x) = 0\}$ เป็นไอดัลแท้

ของ $C_b(E)$

พิสูจน์

(1) เนื่องจาก $1 \in C_b(E)$

แต่ $\lim_{x \rightarrow q} 1 = 1 \neq 0$

แสดงว่า $1 \notin \tilde{A}_q$

ดังนั้น $\tilde{A}_q \subset C_b(E)$

(2) ให้ $f_1, f_2 \in \tilde{A}_q$

โดยทฤษฎี 2.4.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow q} (f_1 - f_2)(x) &= \lim_{x \rightarrow q} f_1(x) - \lim_{x \rightarrow q} f_2(x) \\ &= 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

แสดงว่า $f_1 - f_2 \in \tilde{A}_q$

(3) ให้ $f \in C_b(E)$ และ $g \in \tilde{A}_q$

โดยทฤษฎี 2.4.4 จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow q} (fg)(x) = 0$$

ดังนั้น $fg \in \tilde{A}_q$

จาก (1) ถึง (3) โดยนิยาม 2.1.6 จะได้ว่า

$\tilde{A}_q$ เป็นไอคีดแทนของ $C_b(E)$ □

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า ถ้า $E \subseteq \mathbb{R}$ และ $q \in E' - E$
แล้วเซต $\tilde{A}_q = \{f \in C_b(E) \mid \lim_{x \rightarrow q} f(x) = 0\}$ ไม่จำเป็นต้องเป็น

แมกซิมัลไอคีดของ $C_b(E)$

ตัวอย่าง 4.4.2 $\tilde{A}_0$ ไม่เป็นแมกซิมัลไอคีดของ $C_b((0,1))$

พิสูจน์

กำหนด $f : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ ไม่มีจริง

ดังนั้น $f \notin \tilde{A}_0$

ต่อไปจะแสดงว่า $(\tilde{A}_0, f) \neq C_b((0,1))$

เมื่อ $(\tilde{A}_0, f) = \{a + rf \mid a \in \tilde{A}_0 \text{ และ } r \in C_b((0,1))\}$

สมมติว่า $(\tilde{A}_0, f) = C_b((0,1))$

เนื่องจาก $1 \in C_b((0,1))$

ดังนั้น $1 \in (\tilde{A}_0, f)$

แสดงว่ามี $r \in C_b((0,1))$ และ $a \in \tilde{A}_0$ ซึ่งทำให้

$$1 = a + rf$$

ดังนั้น $rf = 1 - a$

นั่นคือ สำหรับทุก $x \in (0,1)$ จะได้ว่า

$$r(x) \sin \frac{1}{x} = 1 - a(x)$$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - a(x) = 1 - 0 = 1$

แสดงว่า $\lim_{x \rightarrow 0} r(x) \sin \frac{1}{x} = 1$

กำหนด $\epsilon = \frac{1}{2}$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$|r(x) \sin \frac{1}{x} - 1| < \frac{1}{2} \quad \text{เมื่อ } 0 < x < \delta$$

เลือก $n \in \mathbb{I}^+$ ซึ่งทำให้

$$n\delta > \frac{1}{2\pi}$$

นั่นคือ $0 < \frac{1}{2n\pi} < \delta$

ทำให้ $|r(\frac{1}{2n\pi}) \sin \frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} - 1| < \frac{1}{2}$

$$|r(\frac{1}{2n\pi}) \sin 2n\pi - 1| < \frac{1}{2}$$

เนื่องจาก $\sin 2n\pi = 0$

ดังนั้น $|r(\frac{1}{2n\pi}) \cdot 0 - 1| < \frac{1}{2}$

ทำให้ $1 < \frac{1}{2}$

ซึ่งเป็นไปได้

ดังนั้น $(\tilde{A}_0, f) \neq C_b((0, 1))$

โดยทฤษฎี 2.1.5 จะได้ว่า

$\tilde{A}_0$ ไม่เป็น เมกซ์มัลไอทีลของ $C_b((0, 1))$ $\square$

ตัวอย่างข้างบน แสดงให้เห็นว่า ถ้า $E \subseteq \mathbb{R}$ และ $q \in E' - E$ แล้ว $\tilde{A}_q$ ไม่จำเป็นต้องเป็นไอทีลของ $C(E)$ และ ถึงแม้ $\tilde{A}_q$ จะเป็นไอทีลแท้ของ $C_b(E)$ แต่ก็ไม่จำเป็นต้องเป็นเมกซ์มัลไอทีลของ $C_b(E)$ แต่ลักษณะของไอทีลชนิดนี้ จะเป็นเมกซ์มัลไอทีลของ $C_b^*(E)$ ดังทฤษฎีต่อไป

ทฤษฎี 4.4.1 ให้ $E \subseteq \mathbb{R}$ และ $q \in E'$ แล้ว

$\tilde{A}_q = \{f \in C_b^*(E) \mid \lim_{x \rightarrow q} f(x) = 0\}$ เป็นเมกซ์มัลไอทีลของ $C_b^*(E)$

พิสูจน์

กรณีที่ 1 ถ้า $q \in E$

ให้ $f \in \tilde{A}_q$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow q} f(x) = 0$

แต่ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด q

โดยทฤษฎี 2.4.5 จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow q} f(x) = f(q)$$

แสดงว่า $f(q) = 0$

ทำให้ $\tilde{A}_q \subseteq A_q^*$

และ ถ้า $f \in A_q^*$

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow q} f(x) = f(q) = 0$

แสดงว่า $f \in \tilde{A}_q$

ทำให้ $A_q^* \subseteq \tilde{A}_q$

ดังนั้น $\tilde{A}_q = A_q^*$

โดยทฤษฎี 4.3.3 จะได้ว่า

$\tilde{A}_q$ เป็นเมกซ์มัลไอทีลของ $C_b^*(E)$

กรณี 2 ถ้า $q \in E' - E$

(1) ให้ $f_1, f_2 \in \tilde{A}_q$

ดังนั้น $f_1 - f_2 \in C_b^*(E)$

และ $\lim_{x \rightarrow q} (f_1 - f_2)(x) = \lim_{x \rightarrow q} f_1(x) - \lim_{x \rightarrow q} f_2(x) = 0 - 0 = 0$

แสดงว่า $f_1 - f_2 \in \tilde{A}_q$

(2) ให้ $f \in C_b^*(E)$ และ $g \in \tilde{A}_q$

จะได้ว่า f มีขอบเขต และ $\lim_{x \rightarrow q} g(x) = 0$

โดยทฤษฎี 2.4.4 จะได้ว่า

$\lim_{x \rightarrow q} (fg)(x) = 0$

แสดงว่า $fg \in \tilde{A}_q$

(3) เนื่องจาก $1 \in C_b^*(E)$

แต่ $\lim_{x \rightarrow q} 1 = 1 \neq 0$

แสดงว่า $1 \notin \tilde{A}_q$

นั่นคือ $\tilde{A}_q \subset C_b^*(E)$

(4) สมมุติว่า มีไอเดิล M ซึ่ง $\tilde{A}_q \subset M$

จะมี $f \in M$ แต่ $f \notin \tilde{A}_q$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow q} f(x) \neq 0$

แต่ $\lim_{x \rightarrow q} f(x)$ มีจริง

ให้ $\lim_{x \rightarrow q} f(x) = r$

กำหนด $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่

$$g(x) = f(x) - r$$

เนื่องจาก $f, r \in C_b^*(E)$

ดังนั้น $g = f - r \in C_b^*(E)$

โดยทฤษฎี 2.4.3 จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow q} g(x) = \lim_{x \rightarrow q} f(x) - \lim_{x \rightarrow q} r$$

$$= r - r$$

$$= 0$$

แสดงว่า $g \in \tilde{A}_q \subset M$

ดังนั้น $f - g \in M$

และสำหรับทุก $x \in E$ จะได้ว่า

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = r$$

กำหนด $h : E \rightarrow R$ โดยที่

$$h(x) = \frac{1}{r}$$

โดยทฤษฎี 2.4.8 จะได้ว่า

$$h \in C_b^*(E)$$

$$\text{ดังนั้น } 1 = r \cdot \frac{1}{r} = (f-g)h \in M$$

โดยทฤษฎี 2.1.2 จะได้ว่า

$$M = C_b^*(E)$$

จาก (1) ถึง (4) โดยนิยาม 2.1.8 จะได้ว่า

$\tilde{A}_q$ เป็นแมกนิมัลไอคัลของ $C_b^*(E)$ □

จากทฤษฎี 4.3.3 และทฤษฎี 4.4.1 ทำให้ทราบลักษณะของแมกนิมัลไอคัล
อยู่ 2 ลักษณะ คือ ถ้า $p \in E$ จะได้ว่า A_p^* เป็นแมกนิมัลไอคัลของ $C_b^*(E)$
และถ้า $q \in E' - E$ แล้ว $\tilde{A}_q$ เป็นแมกนิมัลไอคัลของ $C_b^*(E)$ ในทฤษฎี
4.4.2 ที่จะกล่าวต่อไป จะประกันว่า แมกนิมัลไอคัลทั้งหมดใน $C_b^*(E)$ เมื่อ
มีขอบเขต จะอยู่ในสองลักษณะนี้เท่านั้น

ทฤษฎี 4.4.2 ให้ E เป็นสับเซตที่มีขอบเขตของ R จะได้ว่า M เป็น
แมกนิมัลไอคัลของ $C_b^*(E)$ ก็ต่อเมื่อ $M = A_p^*$ สำหรับ p
บางตัวใน E หรือ $M = \tilde{A}_q$ สำหรับ q บางตัวใน $E' - E$

พิสูจน์ ($\Leftarrow$) เป็นผลโดยตรงจากทฤษฎี 4.3.3 และ 4.4.1

($\Rightarrow$) สำหรับแต่ละ $f \in C_b^*(E)$

สร้าง $F : E \rightarrow R$ โดย

$$\bar{f}(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) & \text{เมื่อ } \bar{x} \in E \\ \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) & \text{เมื่อ } \bar{x} \in E' - E \end{cases}$$

จะแสดงว่า $\bar{f}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน E

กรณีที่ 1 จะแสดงว่า $\bar{f}$ มีความต่อเนื่องที่จุดทุกจุดใน $E' - E$

ให้ $q \in E' - E$

ถ้า $(\bar{x}_n)$ เป็นลำดับใน E ซึ่ง

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = q$$

กรณีที่ 1 ถ้า $(\bar{x}_n)$ เป็นลำดับใน E

$$\text{จะได้ว่า } \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}(\bar{x}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\bar{x}_n) = \bar{f}(q)$$

กรณีที่ 2 ถ้า $(\bar{x}_n)$ เป็นลำดับใน $E' - E$

กำหนด $\varepsilon > 0$

$$\text{เนื่องจาก } \lim_{x \rightarrow q} f(x) = \bar{f}(q)$$

จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$|f(x) - \bar{f}(q)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ เมื่อ } x \in E \text{ และ } 0 < |x - q| < \delta \dots (1)$$

$$\text{เนื่องจาก } \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = q$$

จะมี $N \in \mathbb{I}^+$ ซึ่งทำให้

$$|\bar{x}_n - q| < \frac{\delta}{2} \text{ สำหรับทุก } n \geq N$$

ให้ $n \geq N$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow \bar{x}_n} f(x) = \bar{f}(\bar{x}_n)$

เลือก $x'_n \in E$ ซึ่งทำให้

$$|x'_n - \bar{x}_n| < \frac{\delta}{2} \quad \text{และ} \quad |\bar{f}(\bar{x}_n) - f(x'_n)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \dots(2)$$

จึงทำให้

$$\begin{aligned} 0 < |x'_n - q| &= |x'_n - \bar{x}_n + \bar{x}_n - q| \\ &\leq |x'_n - \bar{x}_n| + |\bar{x}_n - q| \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \\ &= \delta \end{aligned}$$

ดังนั้น จาก (1) จะได้ว่า

$$|f(x'_n) - \bar{f}(q)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \dots(3)$$

จาก (2) และ (3) ทำให้

$$|\bar{f}(\bar{x}_n) - f(x'_n)| + |f(x'_n) - \bar{f}(q)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} |\bar{f}(\bar{x}_n) - \bar{f}(q)| &= |\bar{f}(\bar{x}_n) - f(x'_n) + f(x'_n) - \bar{f}(q)| \\ &\leq |\bar{f}(\bar{x}_n) - f(x'_n)| + |f(x'_n) - \bar{f}(q)| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

แสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}(\bar{x}_n) = \bar{f}(q)$

จากที่แสดงมาทั้งหมดในตอนต้น จะเห็นว่า ถ้า $(\bar{x}_n)$ เป็น
ลำดับใน E และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = q$ แล้ว
ทำให้ได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\bar{x}_n) = f(q)$$

โดยทฤษฎี 2.4.6 จะได้ว่า

f มีความต่อเนื่องที่จุด q

ตอนที่ 2 จะแสดงว่า f มีความต่อเนื่องที่จุดทุกจุดใน E
ให้ $p \in E$

และ $(\bar{x}_n)$ เป็นลำดับใน E โดยที่

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = p$$

กรณีที่ 1 ถ้า $(\bar{x}_n)$ เป็นลำดับใน E

เห็นได้ชัดว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\bar{x}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\bar{x}_n) = f(p) = f(p)$

กรณีที่ 2 ถ้า $(\bar{x}_n)$ เป็นลำดับใน $E' - E$

กำหนด $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$

จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$|f(x) - f(p)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{สำหรับทุก } x \in E \text{ ซึ่ง}$$

$$0 < |x - p| < \delta \quad \dots (a)$$

เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = p$

จะมี $N \in \mathbb{I}^+$ ซึ่งทำให้

$$0 < |p - \bar{x}_n| < \frac{\delta}{2} \quad \text{สำหรับทุก } n \geq N$$

และเนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow \bar{x}_n} f(x) = f(\bar{x}_n)$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{I}^+$

สำหรับแต่ละ $n \geq N$

เลือก $x'_n \in E$ ซึ่งทำให้

$$0 < |\bar{x}_n - x'_n| < \frac{\delta}{2} \quad \text{และ} \quad |\bar{f}(\bar{x}_n) - f(x'_n)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \dots (b)$$

$$\begin{aligned} \text{ซึ่งทำให้ } 0 < |x'_n - p| &\leq |x'_n - \bar{x}_n| + |\bar{x}_n - p| \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \end{aligned}$$

จาก (a) จะได้ว่า

$$|f(x'_n) - f(p)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \dots (c)$$

จาก (b) และ (c) จะได้ว่า

$$|\bar{f}(\bar{x}_n) - f(x'_n)| + |f(x'_n) - f(p)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\text{ดังนั้น } |\bar{f}(\bar{x}_n) - f(p)| = |\bar{f}(\bar{x}_n) - f(x'_n) + f(x'_n) - f(p)|$$

$$\leq |\bar{f}(\bar{x}_n) - f(x'_n)| + |f(x'_n) - f(p)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon$$

$$\text{แสดงว่า } \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}(\bar{x}_n) = f(p) = \bar{f}(p)$$

จากที่แสดงมาทั้งหมดในตอนต้นที่ 2 นี้ จะเห็นว่า ถ้า $(\bar{x}_n)$ เป็นลำดับใน E และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = q$ แล้ว
ทำให้ได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\bar{x}_n) = \bar{f}(p)$$

โดยทฤษฎี 2.4.6 จะได้ว่า

$\bar{f}$ มีความต่อเนื่องที่จุด p

จากตอนที่ 1 และตอนที่ 2 โดยนิยาม 2.4.5 จะได้ว่า

$\bar{f}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน E

ต่อไปจะแสดงว่า มีไอโซมอร์ฟิซึม จาก $C_b^*(E)$ ไปบน $C(\bar{E})$

กำหนด $\phi : C_b^*(E) \rightarrow C(\bar{E})$ โดยที่

$$\phi(f) = \bar{f}$$

(1) ถ้า $f_1 = f_2 \in C_b^*(E)$

สำหรับทุก $\bar{x} \in \bar{E}$ จะได้ว่า

$$\bar{f}_1(\bar{x}) = \begin{cases} f_1(\bar{x}) & \text{เมื่อ } \bar{x} \in E \\ \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f_1(x) & \text{เมื่อ } \bar{x} \in \bar{E} - E \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{cases} f_2(\bar{x}) & \text{เมื่อ } \bar{x} \in E \\ \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f_2(x) & \text{เมื่อ } \bar{x} \in E' - E \end{cases} \\
 &= \bar{f}_2(\bar{x})
 \end{aligned}$$

แสดงว่า $\bar{f}_1 = \bar{f}_2$

นั่นคือ $\phi(f_1) = \phi(f_2)$

ดังนั้น ϕ เป็นฟังก์ชันจาก $C_b^*(E)$ ไป $C(E)$

(2) ให้ $g \in C(E)$

เนื่องจาก E เป็นเซตปิด และมีขอบเขต

โดยทฤษฎี 2.2.6 จะได้ว่า

E เป็น คอมแพคตัสเซตของ $\mathbb{R}$

โดยทฤษฎี 2.4.12 จะได้ว่า

g เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต บน E

พิจารณาฟังก์ชัน $g|_E$ จะเห็นว่า

$g|_E$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต บน E (ก)

และโดยทฤษฎี 2.4.14 จะได้ว่า

$g|_E$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง บน E (ข)

และสำหรับแต่ละ $q \in E' - E$

ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับใน E และ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = q$

จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(q)$

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} g|_E(x_n) = g(q)$

โดยทฤษฎี 2.4.2 จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow q} g|_E(x) = g(q) \quad \dots\dots\dots (ก)$$

จาก (ก), (ข) และ (ค) ทำให้

$$g|_E \in C_b^*(E)$$

สำหรับทุก $\bar{x} \in \bar{E}$ ให้

$$\bar{g}|_E(\bar{x}) = \begin{cases} g|_E(\bar{x}) & \text{เมื่อ } \bar{x} \in E \\ \lim_{x \rightarrow \bar{x}} g|_E(x) & \text{เมื่อ } \bar{x} \in E' - E \end{cases}$$

จาก นิยามของ $\bar{g}|_E$ และข้อ (ค) จะได้ว่า

$$\bar{g}|_E(\bar{x}) = \begin{cases} g(\bar{x}) & \text{เมื่อ } \bar{x} \in E \\ g(\bar{x}) & \text{เมื่อ } \bar{x} \in E' - E \end{cases}$$

$$= g(\bar{x}) \quad \text{เมื่อ } \bar{x} \in \bar{E}$$

แสดงว่า $\bar{g}|_E = g$

ดังนั้น $\phi(g|_E) = \bar{g}|_E = g$

แสดงว่า ϕ เป็นฟังก์ชันจาก $C_b^*(E)$ ไปบน $C(\bar{E})$

(3) ให้ $f_1, f_2 \in C_b^*(E)$

สำหรับทุก $\bar{x} \in E$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (\overline{f_1+f_2})(\bar{x}) &= \begin{cases} (f_1+f_2)(\bar{x}) & \text{เมื่อ } \bar{x} \in E \\ \lim_{x \rightarrow \bar{x}} (f_1+f_2)(x) & \text{เมื่อ } \bar{x} \in E' - E \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) & \text{เมื่อ } \bar{x} \in E \\ \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f_2(x) & \text{เมื่อ } \bar{x} \in E' - E \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } (\overline{f_1+f_2})(\bar{x}) &= \overline{f_1}(\bar{x}) + \overline{f_2}(\bar{x}) \\ &= \begin{cases} f_1(\bar{x}) + \overline{f_2}(\bar{x}) & \text{เมื่อ } \bar{x} \in E \\ \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \overline{f_2}(x) & \text{เมื่อ } \bar{x} \in E' - E \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{แสดงว่า } \overline{f_1+f_2} = \overline{f_1} + \overline{f_2}$$

$$\text{นั่นคือ } \phi(f_1+f_2) = \overline{f_1+f_2} = \overline{f_1} + \overline{f_2}$$

$$= \phi(f_1) + \phi(f_2)$$

และ อาศัยการพิสูจน์ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\phi(f_1 f_2) = \phi(f_1) \phi(f_2)$$

จาก (1) ถึง (3) จะได้ว่า

ϕ เป็นโฮโมมอร์ฟิซึมจาก $C_b^*(E)$ ไปบน $C(E)$

พิจารณา $\ker(\phi) = \{f \in C_b^*(E) \mid \phi(f) = 0\}$

สำหรับแต่ละ $f \in C_b^*(E)$

เนื่องจาก $\phi(f) = \bar{f}$

ดังนั้น $\bar{f} = 0$ สำหรับ $f \in \ker(\phi)$

แสดงว่า $f = \bar{f}|_E = 0$

นั่นคือ $\ker(\phi) = \{0\}$

ดังนั้น ถ้า M เป็นเมกซิมัลไอดัลของ $C_b^*(E)$

จะได้ว่า $\ker(\phi) \subseteq M$

โดยทฤษฎี 2.1.10 จะได้ว่า

$\phi(M)$ เป็นเมกซิมัลไอดัลของ $C(E)$

ให้ $M = \{f_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$

จะได้ว่า $\phi(M) = \{\bar{f}_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$

เนื่องจาก E เป็นคอมแพคตัสเซตของ $\mathbb{R}$

โดยทฤษฎี 3.3.3 จะได้ว่า

$\phi(M) = A_p^*$ สำหรับ p บางตัวใน E

แสดงว่าสำหรับแต่ละ $\alpha \in \Lambda$

$\bar{f}_\alpha(p) = 0$

กรณีที่ 1 ถ้า $p \in E$

จะได้ว่า $f_\alpha(p) = \bar{f}_\alpha(p) = 0$

แสดงว่า $M \subseteq A_p^*$

จากทฤษฎี 4.3.3 และนิยาม 2.1.8

จะได้ว่า $M = A_p^*$

กรณีที่ 2 ถ้า $p \in E' - E$

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow p} f_\alpha(x) = \bar{f}_\alpha(p) = 0$

แสดงว่า $M \subseteq \tilde{A}_p$

จากทฤษฎี 4.4.1 และนิยาม 2.1.8

จะได้ว่า $M = \tilde{A}_p$ □

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright© by Chiang Mai University

All rights reserved