บทที่ 2
ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้ จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐาน ที่จะนำไปใช้ในการศึกษา บทที่ 3 และบทที่ 4 โดยกล่าวถึงนิยามทฤษฎี และตัวอย่างประกอบพอสังเขป

สำหรับการพิสูจน์ ทฤษฎีต่างๆ ในบทนี้จะไม่แสดงไว้ ผู้ที่สนใจสามารถศึกษาได้จากเอกสารอ้างอิง ที่ระบุไว้ท้ายเล่ม

และเพื่อป้องกันความสับสนที่อาจจะเกิดขึ้นเกี่ยวกับการใช้สัญลักษณ์ จึงขอตกลงเกี่ยวกับสัญลักษณ์ ที่จะใช้ดังต่อไปนี้

I^+	หมายถึง	เซตของจำนวนเต็มบวก
R	หมายถึง	เซตของจำนวนจริง
$f : A \dashrightarrow B$	หมายถึง	f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B
$\{s_n\}$	หมายถึง	ลำดับ (sequence)
(a, b)	หมายถึง	$\{x \in R \ / \ a < x < b\}$
$[a, b]$	หมายถึง	$\{x \in R \ / \ a \leq x \leq b\}$
XY	หมายถึง	ความยาวจาก X ถึง Y เมื่อ X, Y เป็นจุดในระนาบ
$\overline{XY}$	หมายถึง	ส่วนของเส้นตรง XY เมื่อ X, Y เป็นจุดในระนาบ
$\parallel$	หมายถึง	ขนาน
$\log x$	หมายถึง	ลอการิทึมฐาน e ของ x

เนื่องจากงานวิจัยนี้อาศัยความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิตวิเคราะห์ระดับอุดมศึกษาปีที่ 1 ดังนั้นคำศัพท์ และสัญลักษณ์ต่างๆ จะเป็นที่รู้จักและนิยมใช้กันในระดับนั้น

2.1 ลำดับ และลิมิตของลำดับ (Sequences and Limits of Sequences)

นิยาม 2.1.1 ให้ A และ B เป็นเซตสองเซตใดๆ ที่ไม่เป็นเซตว่าง ผลคูณคาร์ทีเซียน (cartesian product) ของ A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$ คือ เซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมด เมื่อ $a \in A$ และ $b \in B$

นั่นคือ $A \times B = \{(a, b) / a \in A$ และ $b \in B\}$

นิยาม 2.1.2 ให้ A และ B เป็นเซตสองเซตใดๆ ที่ไม่เป็นเซตว่าง

(1) จะเรียก f ว่าเป็น ฟังก์ชัน (function) ก็ต่อเมื่อ f เป็นสับเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง ของ $A \times B$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า ถ้า (x, y_1) และ $(x, y_2) \in f$ แล้วจะได้ว่า $y_1 = y_2$

(2) เรียก y ที่ $(x, y) \in f$ ว่า ค่าของ f ที่ x (the value of f at x) และนิยมเขียนแทนด้วย $y = f(x)$

(3) เรียก $\{x \in A$ / มี $y \in B$ ที่ทำให้ $(x, y) \in f\}$ ว่าเป็น โดเมน (domain) ของ f เขียนแทนด้วย D_f

(4) เรียก $\{y \in B$ / มี $x \in A$ ที่ทำให้ $(x, y) \in f\}$ ว่าเป็น เรนจ์ (range) ของ f เขียนแทนด้วย R_f

<u>นิยาม</u> 2.1.3 จะเรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็น <u>ฟังก์ชันจาก A ไป B</u> (f is a function from A into B) ก็ต่อเมื่อ $D_f = A$ และ $R_f \subseteq B$

<u>นิยาม</u> 2.1.4 ให้ A และ B เป็นเซตสองเซตใดๆ ที่ไม่เป็นเซตว่าง และ $f : A \longrightarrow B$

(1) เรียก f ว่าเป็น <u>ฟังก์ชันจาก A ไปบน B</u> (f is a function from A onto B) ก็ต่อเมื่อ $R_f = B$
นั่นคือสำหรับทุกๆ $y \in B$ จะมี $x \in A$ โดยที่ $f(x) = y$

(2) เรียก f ว่าเป็น <u>ฟังก์ชัน 1-1</u> (one to one function) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ $a_1, a_2 \in A$ ถ้า $f(a_1) = f(a_2)$ แล้วจะได้ว่า $a_1 = a_2$

(3) เรียก f ว่าเป็น <u>ฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไปบน B</u> (one to one function from A onto B) ก็ต่อเมื่อ ฟังก์ชัน f มี คุณสมบัติครบตามข้อ (1) และข้อ (2)

<u>นิยาม</u> 2.1.5 ให้ P และ P' เป็นเซตของจุดในระนาบ เรียก J ว่าเป็น <u>การเลื่อนทางขนาน</u> (Translation) จาก P ไปบน P' ก็ต่อเมื่อ

(1) J เป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก P ไปบน P' และ

(2) สำหรับทุกๆ จุด $X, Y \in P$ ถ้า $J(X) = X'$ และ $J(Y) = Y'$

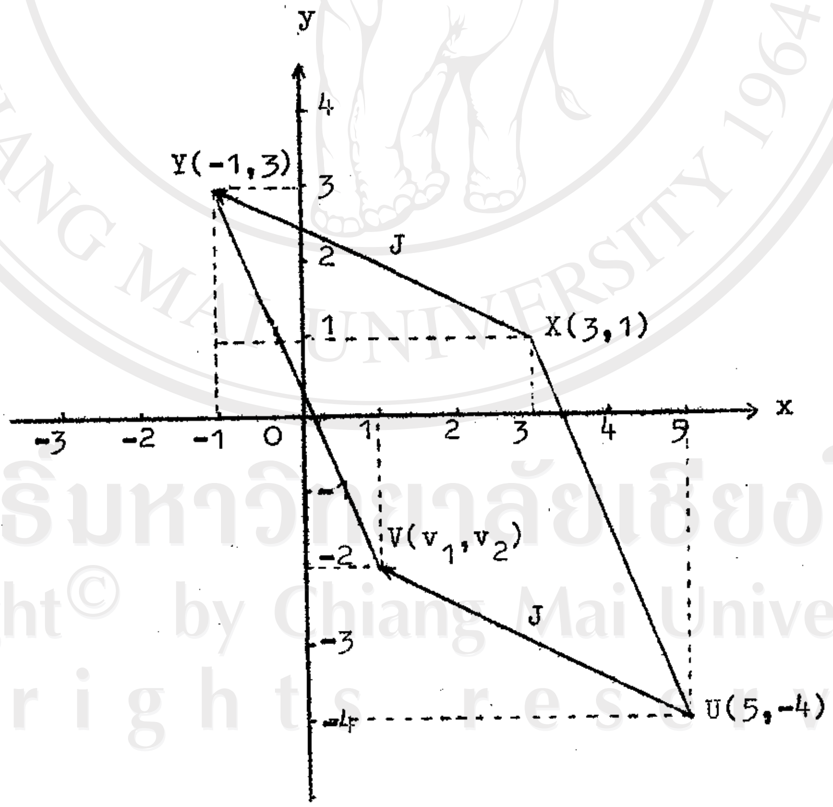
เมื่อ $X', Y' \in P'$ แล้วจะได้ว่า $XX' = YY'$,

$\overline{XX'} \parallel \overline{YY'}$ และ $\overline{XY} \parallel \overline{X'Y'}$

<u>หมายเหตุ</u> $J(X) = X'$ หมายถึง J <u>ส่ง</u> (map) จุด X ไปที่จุด X'

<u>ตัวอย่าง</u> 2.1.1 ให้จุด X และ Y มีพิกัดเป็น (3,1) และ (-1,3) ตามลำดับ
และ J เป็นการเลื่อนทางขนาน ซึ่ง $J(X) = Y$
ถ้าจุด U มี พิกัด เป็น (5, -4) จะหาพิกัดของจุด V
เมื่อ $J(U) = V$ ได้ดังนี้

<u>วิธีทำ</u>



รูป 2.1.1

สมมุติให้จุด V มีพิกัดเป็น $V(v_1, v_2)$

โดยนิยาม 2.1.5 ทำให้ $XY = UV$, $\overline{XY} \parallel \overline{UV}$

และ $\overline{XU} \parallel \overline{YV}$

ดังนั้นจะเห็นได้ชัดว่า $v_1 = 1$ และ $v_2 = -2$

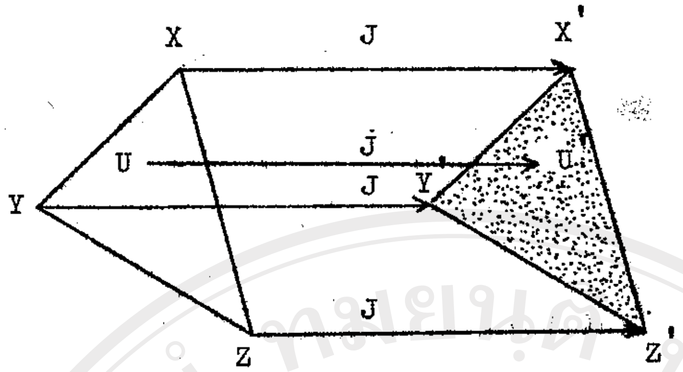
นั่นคือจุด V มีพิกัดเป็น (1, -2)

<u>ข้อสังเกต</u> ถ้าให้ J เป็นการเลื่อนทางขนาน ของรูปเรขาคณิต สมมุติ เป็นสามเหลี่ยม XYZ

โดยให้ $J(X) = X'$, $J(Y) = Y'$ และ $J(Z) = Z'$

การเลื่อนทางขนานของสามเหลี่ยม XYZ ไม่ได้ส่งเฉพาะจุดยอดของสามเหลี่ยม XYZ ไปที่จุด X', Y' และ Z' เท่านั้น แต่ทุกๆ จุดใน สามเหลี่ยม XYZ จะถูกส่งไปที่จุดในสามเหลี่ยม $X'Y'Z'$ ทั้งหมด โดยมีคุณสมบัติตามนิยาม 2.1.5

ดังนั้น การเลื่อนทางขนานรูปเรขาคณิต ถ้าเราทราบจุดที่ส่งไปเพียงจุดเดียว เช่น $J(X) = X'$ ก็สามารถส่งจุดที่เหลือไปได้ทั้งหมด โดยมีคุณสมบัติในการรักษาขนาดและรูปทรงของรูป เรขาคณิต ที่ถูกเลื่อนไปไว้ตามเดิม



รูป 2.1.2

<u>นิยาม</u> 2.1.6 ให้ $f : A \dashrightarrow B$

(1) เรียก f ว่าเป็น <u>ฟังก์ชันค่าจริง</u> (real function) ก็ต่อเมื่อ $R_f \subsetneq R$

(2) เรียก f ว่าเป็น <u>ฟังก์ชันของจำนวนจริง</u> (function of a real variable) ก็ต่อเมื่อ $D_f \subsetneq R$

(3) เรียก f ว่าเป็น <u>ฟังก์ชันค่าจริงของจำนวนจริง</u> (real function of a real variable) ก็ต่อเมื่อ $D_f \subseteq R$ และ $R_f \subseteq R$ นั่นคือ $f \subseteq R \times R$

<u>หมายเหตุ</u> ฟังก์ชันที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันค่าจริงของจำนวนจริง ยกเว้นฟังก์ชันการเลื่อนทางขนาน

<u>นิยาม</u> 2.1.7 ให้ A เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง <u>ฟังก์ชันเอกลักษณ์บน A</u> (identity function on A) I_A หมายถึงฟังก์ชัน $I_A : A \dashrightarrow A$ โดยที่ $I_A(x) = x$ สำหรับทุกๆ $x \in A$

<u>นิยาม</u> 2.1.8 ให้ A และ B เป็นเซตสองเซตใดๆ ที่ไม่เป็นเซตว่าง โดยที่ $c \in B$ <u>ฟังก์ชันคงที่</u> (constant function) K_c หมายถึง ฟังก์ชัน $K_c : A \dashrightarrow B$ โดยที่

$$K_c(x) = c \text{ สำหรับทุกๆ } x \in A$$

<u>นิยาม</u> 2.1.9 จะเรียก S ว่าเป็น <u>ลำดับ</u> (sequence) ของจำนวนจริงก็ต่อเมื่อ $S : I^+ \dashrightarrow R$

<u>ข้อสังเกต</u> ถ้า S เป็นลำดับ โดยที่ $S(n) = s_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ แล้วจะได้ว่า $S = \{(1, s_1), (2, s_2), (3, s_3), \ldots\}$

โดยทั่วไปการศึกษาเรื่องลำดับ จะศึกษาเฉพาะสมาชิกที่อยู่ในเรนจ์ของ S จึงนิยมเขียนแทนลำดับ S ด้วย $s_1, s_2, s_3, \ldots$ หรือเขียนสั้นๆ เป็น $\{s_n\}$

<u>นิยาม</u> 2.1.10 ให้ $\{s_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะเรียกจำนวนจริง L ว่าเป็น <u>ลิมิต</u> (Limit) ของลำดับ $\{s_n\}$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก ε ใดๆ จะมีจำนวนเต็มบวก M (ขึ้นอยู่กับ ε) ซึ่งทำให้อสมการ $|s_n - L| < \varepsilon$ เป็นจริง

สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n ที่ $n \geq M$

ในกรณีที่ L เป็นลิมิตของลำดับ $\{s_n\}$ จะกล่าวว่า ลำดับ $\{s_n\}$ ลู่เข้าสู่ L และจะเรียกลำดับ $\{s_n\}$ ว่าเป็น <u>ลำดับที่ลู่เข้า</u> (convergent sequence)

<u>นิยาม</u> 2.1.11 ถ้าลำดับ $\{s_n\}$ ของจำนวนจริง เป็นลำดับที่ไม่มีลิมิต จะเรียกลำดับ $\{s_n\}$ ว่า <u>ลำดับที่ลู่ออก</u> (divergent sequence)

<u>ทฤษฎี</u> 2.1.1 ให้ $\{s_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ถ้า L_1 และ L_2 เป็นลิมิตของลำดับ $\{s_n\}$ แล้วจะได้ว่า $L_1 = L_2$

<u>พิสูจน์</u> ดู [1] หน้า 24

<u>สัญลักษณ์</u> จากผลของทฤษฎี 2.1.1 ทำให้เราเขียนแทนข้อความที่กล่าวว่า " L เป็นลิมิตของลำดับ $\{s_n\}$ หรือ ลำดับ $\{s_n\}$ ลู่เข้าสู่ L " ได้ดังนี้

$$\lim_{n \to \infty} s_n = L$$

หรือ $$s_n \to L$$

<u>นิยาม</u> 2.1.12 ให้ $\{s_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง

(1) จะเรียก $\{s_n\}$ ว่าเป็น <u>ลำดับที่มีขอบเขตล่าง</u> (bounded below) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง v ซึ่ง $v \le s_n$, $\forall n \in I^+$

(2) จะเรียก $\{s_n\}$ ว่าเป็น <u>ลำดับที่มีขอบเขตบน</u> (bounded above) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง u ซึ่ง $s_n \le u$, $\forall n \in I^+$

<u>นิยาม</u> 2.1.13 ให้ $\{s_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะเรียก $\{s_n\}$ ว่าเป็น <u>ลำดับที่มีขอบเขต</u> (bounded sequence) ก็ต่อเมื่อ $\{s_n\}$ เป็นลำดับที่มีทั้งขอบเขตล่าง และขอบ-เขตบน

<u>นิยาม</u> 2.1.14 (1) จะเรียกจำนวนจริง g ว่าเป็น<u>ขอบเขตล่างค่ามากสุดของลำดับ</u> $\{s_n\}$ (greatest lower bound of sequence $\{s_n\}$) ก็ต่อเมื่อ g เป็นขอบ-เขตล่างของ $\{s_n\}$ และสำหรับทุกขอบเขตล่าง v ใดๆ ของ $\{s_n\}$ จะได้ว่า $v \leq g$

(2) จะเรียกจำนวนจริง l ว่าเป็น <u>ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของลำดับ</u> $\{s_n\}$ (least upper bound of sequence $\{s_n\}$) ก็ต่อเมื่อ l เป็นขอบ-เขตบนของ $\{s_n\}$ และสำหรับทุกขอบเขตบน u ใดๆ ของ $\{s_n\}$ จะได้ว่า $l \leq u$

<u>สัญลักษณ์</u> (1) ในกรณีที่จำนวนจริง a เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของลำดับ $\{s_n\}$ จะเขียนแทนด้วย

$$a = g.l.b.\{s_n\} \text{ หรือ } a = \inf.\{s_n\}$$

(2) ในกรณีที่จำนวนจริง b เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของลำดับ $\{s_n\}$ จะเขียนแทนด้วย

$$b = l.u.b.\{s_n\} \text{ หรือ } b = \sup.\{s_n\}$$

<u>หมายเหตุ</u> เนื่องจากเซตของจำนวนจริง มี<u>คุณสมบัติของความบริบูรณ์</u> (The completeness property) ซึ่งกล่าวว่า ถ้า $S \subseteq R$, $S \neq \emptyset$ และ S **มีขอบเขตบน แล้วจะได้ว่า** S มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด เป็นสมาชิกของเซต R และ ถ้า S มีขอบเขตล่าง แล้วจะได้ว่า S มีขอบเขตล่างค่ามากสุด เป็นสมาชิกของเซต R ด้วย

<u>ทฤษฎี</u> 2.1.2 ถ้า $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L_1 \text{ และ } \lim_{n\to\infty} b_n = L_2$$

แล้วจะได้ว่า

(1) $$\lim_{n\to\infty} k.a_n = k.\lim_{n\to\infty} a_n = k.L_1 \text{ เมื่อ } k \in R$$

(2) $$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = L_1 \pm L_2$$

(3) $$\lim_{n\to\infty} (a_n . b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n = L_1 . L_2$$

(4) $$\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n / \lim_{n\to\infty} b_n = L_1/L_2 \text{ เมื่อ } L_2 \neq 0$$

<u>พิสูจน์</u> ดู [2] หน้า 77 - 78

นิยาม 2.1.15 ให้ $\{s_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง

(1) จะเรียกลำดับ $\{s_n\}$ ว่าเป็น ลำดับไม่ลดลง (nondecreasing sequence) ก็ต่อเมื่อ

$s_n \leq s_{n+1}$, $\forall n \in I^+$

(2) จะเรียกลำดับ $\{s_n\}$ ว่าเป็น ลำดับไม่เพิ่มขึ้น (nonincreasing sequence) ก็ต่อเมื่อ

$s_n \geq s_{n+1}$, $\forall n \in I^+$

นิยาม 2.1.16 ให้ $\{s_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะเรียกลำดับ $\{s_n\}$ ว่า เป็น ลำดับโมโนโทน (monotone sequence) ก็ต่อเมื่อ $\{s_n\}$ เป็นลำดับไม่ลดลง หรือ เป็นลำดับไม่เพิ่มขึ้นเพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง

ข้อสังเกต (1) ถ้า $\{s_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และเป็นลำดับไม่ลดลง แล้วลำดับ $\{s_n\}$ จะมีขอบเขตล่างเสมอ

(2) ถ้า $\{s_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และเป็นลำดับไม่เพิ่มขึ้น แล้วลำดับ $\{s_n\}$ จะมีขอบเขตบนเสมอ

ทฤษฎี 2.1.3 (1) ถ้าลำดับ $\{s_n\}$ ของจำนวนจริง เป็นลำดับไม่ลดลง และมีขอบเขตบน แล้วจะได้ว่า ขอบเขตบนค่าน้อยสุด (l.u.b.$\{s_n\}$) คือ ลิมิตของลำดับ $\{s_n\}$

(2) ถ้าลำดับ $\{s_n\}$ ของจำนวนจริง เป็นลำดับไม่เพิ่ม-ขึ้น และมีขอบเขตล่าง แล้วจะได้ว่า ขอบเขตล่างค่ามากสุด $(g.l.b.\{s_n\})$ คือ ลิมิตของลำดับ $\{s_n\}$

พิสูจน์ ดู [2] หน้า 71-72

2.2 อนุกรม และการลู่เข้าของอนุกรม (Series and Convergence of Series)

นิยาม 2.2.1 ให้ $\{s_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง อนุกรม (Series) ที่เกิดจากลำดับ $\{s_n\}$ คือลำดับ $\{S_n\}$ โดยที่

$$
\begin{aligned}
S_1 &= s_1 \\
S_2 &= s_1 + s_2 \\
S_3 &= s_1 + s_2 + s_3 \\
&\vdots \\
S_n &= s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

เรียก s_n ว่า พจน์ที่ n ของอนุกรม (The n - th term of the series)

และเรียก S_n ว่า ผลบวกย่อยพจน์ที่ n ของอนุกรม (The n - th partial sum of the series)

<u>สัญลักษณ์</u> จะเขียนแทนอนุกรม (S_n) ด้วย $s_1 + s_2 + s_3 + \ldots$

หรือ $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ และมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

ถ้าให้ (s_i) และ (t_i) เป็นลำดับของจำนวนจริง

แล้วจะได้ว่า

(1) $\sum_{i=1}^{n} (s_i \pm t_i) = \sum_{i=1}^{n} s_i \pm \sum_{i=1}^{n} t_i$

(2) $\sum_{i=1}^{n} cs_i = c \sum_{i=1}^{n} s_i$ เมื่อ $c \in R$

<u>นิยาม</u> 2.2.2 (1) อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ จะเรียกว่าเป็น <u>อนุกรมที่ลู่เข้า</u> (convergent series) ก็ต่อเมื่อลำดับของผลบวกย่อย (S_n) เป็นลำดับที่ลู่เข้า

(2) อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ จะเรียกว่าเป็น <u>อนุกรมที่ลู่ออก</u> (divergent series) ก็ต่อเมื่อลำดับของผลบวกย่อย (S_n) เป็นลำดับที่ลู่ออก

<u>หมายเหตุ</u> จากนิยาม 2.2.2(1) ถ้า (S_n) เป็นลำดับที่ลู่เข้า แล้ว จะเรียกลิมิตของ (S_n) ว่า <u>ผลบวก</u> (sum) ของอนุกรม

<u>ทฤษฎี</u> 2.2.1 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{n \to \infty} s_n = 0$$

<u>พิสูจน์</u> ดู [4] หน้า 161

<u>ทฤษฎี</u> 2.2.2 อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ ซึ่ง $s_n \geq 0$, $\forall n \in I^+$ จะเป็นอนุกรมที่ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อลำดับของผลบวกย่อย $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตบน

<u>พิสูจน์</u> ดู [2] หน้า 97-98

<u>ทฤษฎี</u> 2.2.3 ถ้า $0 \leq s_n \leq t_n$, $\forall n \in I^+$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้าด้วย

<u>พิสูจน์</u> ดู [4] หน้า 161

2.3 <u>ลิมิต และความต่อเนื่องของฟังก์ชัน</u> (Limit and Continuity of Function)

<u>นิยาม</u> 2.3.1 ให้จำนวนจริง $\delta > 0$ และ $a \in R$ จะเรียกช่วงเปิด $(a - \delta, a + \delta)$ ว่า <u>เนเบอร์ฮูดของ</u> a (neighborhood of a) <u>ที่มีรัศมี</u> δ

<u>ข้อสังเกต</u>. ถ้า $\delta > 0$ จะเห็นได้ชัดว่า

$$(a - \delta, a + \delta) = \{x \in R \ / \ |x - a| < \delta\}$$

<u>นิยาม</u> 2.3.2 เรียก $a \in R$ ว่าเป็น <u>จุดลิมิต</u> (limit point) ของเซต $D \subseteq R$ ก็ต่อเมื่อ

$$(a - \delta, a + \delta) - \{a\} \cap D \neq \emptyset \text{ สำหรับทุก } \delta > 0$$

<u>นิยาม</u> 2.3.3 ให้ $f : D \dashrightarrow R$ และ x_o เป็นจุดลิมิตของ D จะกล่าวว่า <u>ลิมิตของ f ที่จุด x_o เท่ากับ L</u> ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง ถ้า $0 < |x - x_o| < \delta$ และ $x \in D$ แล้ว

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

<u>ทฤษฎี</u> 2.3.1 ให้ $f : D \dashrightarrow R$ และ x_o เป็นจุดลิมิตของ D ถ้า L_1 และ L_2 เป็นลิมิตของ f ที่จุด x_o แล้ว จะได้ว่า $L_1 = L_2$

<u>พิสูจน์</u> ดู [1] หน้า 68

<u>สัญลักษณ์</u> จากผลของทฤษฎี 2.3.1 ทำให้เราเขียนแทน ข้อความที่กล่าวว่า "ลิมิตของ f ที่จุด x_o เท่ากับ L" ได้ดังนี้

$$\lim_{x \dashrightarrow x_o} f(x) = L \text{ หรือ}$$

$$f(x) \dashrightarrow L \text{ เมื่อ } x \dashrightarrow x_o$$

<u>นิยาม</u> 2.3.4 ให้ $f : D \dashrightarrow R$ และ x_0 เป็นจุดลิมิตของ D

จะกล่าวว่า

(1) <u>ลิมิตของ f เท่ากับ L ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้</u> x_0 <u>ทางขวามือ</u>

ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $x_0 < x < x_0 + \delta$ และ $x \in D$ แล้ว

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

(2) <u>ลิมิตของ f เท่ากับ L ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้</u> x_0 <u>ทางซ้ายมือ</u>

ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $x_0 - \delta < x < x_0$ และ $x \in D$ แล้ว

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

<u>ทฤษฎี</u> 2.3.2 ให้ $f : D \dashrightarrow R$ และ x_0 เป็นจุดลิมิตของ D

(1) ถ้า L_1 และ L_2 เป็นลิมิตของ f ในขณะที่ x เข้าใกล้ x_0 ทางขวามือ แล้ว จะได้ว่า $L_1 = L_2$

(2) ถ้า L_3 และ L_4 เป็นลิมิตของ f ในขณะที่ x เข้าใกล้ x_0 ทางซ้ายมือ แล้ว จะได้ว่า $L_3 = L_4$

<u>พิสูจน์</u> พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ทฤษฎี 2.3.1

<u>สัญลักษณ์</u> จากผลของทฤษฎี 2.3.2 ทำให้เราเขียนแทนข้อความที่กล่าวว่า
" ลิมิตของ f เท่ากับ L ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ x_o ทางขวามือ " ได้ดังนี้

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = L$$

และเขียนแทน " ลิมิตของ f เท่ากับ L ในขณะที่ x เข้าใกล้ x_o ทางซ้ายมือ " ได้ดังนี้

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = L$$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.3.1 กำหนดให้ $f : R - \{0\} \to R$

โดยที่ $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{|x|}$

จะแสดงว่า $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

และ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$

<u>วิธีทำ</u> <u>กรณีที่</u> 1 ถ้า $x > 0$ จะได้ $f(x) = x + 1$

ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ จะต้องหาจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$|(x + 1) - 1| < \varepsilon$ เมื่อ $0 < x < \delta$

ดังนั้น $|x| < \varepsilon$ เมื่อ $0 < x < \delta$

จะได้ว่า $x < \varepsilon$ เมื่อ $0 < x < \delta$ (1)

จากอสมการ (1) เลือก $\delta = \varepsilon$ ดังนั้น

ถ้า $0 < x < \delta$ แล้วจะได้ $0 < x < \varepsilon$

$$|x| < \varepsilon$$

$$|(x + 1) - 1| < \varepsilon$$

แสดงว่า $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

<u>กรณีที่</u> 2 ถ้า $x < 0$ จะได้ $f(x) = -x - 1$

ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ จะต้องหาจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$|(-x - 1) - (-1)| < \varepsilon \text{ เมื่อ } -\delta < x < 0$$

ดังนั้น $|-x| < \varepsilon$ เมื่อ $-\delta < x < 0$

จะได้ว่า $-x < \varepsilon$ เมื่อ $-\delta < x < 0$ (2)

จากอสมการ (2) เลือก $\delta = \varepsilon$ ดังนั้น

ถ้า $-\delta < x < 0$ แล้วจะได้ว่า $0 < -x < \delta$

$$0 < -x < \varepsilon$$

$$|-x| < \varepsilon$$

$$|(-x - 1) - (-1)| < \varepsilon$$

แสดงว่า $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$

<u>ทฤษฎี</u> 2.3.3 ให้ $f : D \to R$ และ x_o เป็นจุดลิมิตของ D

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L$$

ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to x_o^+} f(x) = L = \lim\limits_{x \to x_o^-} f(x)$

<u>พิสูจน์</u> ดู [1] หน้า 76-77

<u>ข้อสังเกต</u> $\lim_{x \to 0} f(x)$ ในตัวอย่าง 2.3.1 ไม่มี เพราะว่า

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

<u>ทฤษฎี</u> 2.3.4 ให้ $f : D \to R$ และ x_o เป็นจุดลิมิตของ D จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) $\lim_{x \to x_o} f(x) = L$

(2) กำหนด $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

สำหรับทุกๆ $x \in D$ ที่ $0 < |x - x_o| < \delta$

(3) ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับใน D

และ $\lim_{n \to \infty} x_n = x_o$

แล้ว จะได้ว่า $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$

<u>พิสูจน์</u> ดู [3] หน้า 153

<u>นิยาม</u> 2.3.5 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก D ไป R กำหนด <u>การบวก</u> <u>การลบ</u> <u>การคูณด้วยสเกลาร์</u> <u>การคูณ</u> และ<u>การหาร</u> ของฟังก์ชันสำหรับแต่ละ $x \in D$ ตามลำดับ ดังต่อไปนี้

(1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

(2) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

(3) $(c.f)(x) = c.f(x)$ เมื่อ $c \in R$

(4) $(f.g)(x) = f(x).g(x)$

(5) $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$

เมื่อ $g(x) \neq 0$

ทฤษฎี 2.3.5 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก D ไป R และ x_o เป็นจุดลิมิตของ D

ถ้า $\lim_{x \to x_o} f(x) = L_1$ และ $\lim_{x \to x_o} g(x) = L_2$

แล้ว จะได้ว่า ข้อความแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริง

(1) $\lim_{x \to x_o} (f+g)(x) = L_1 + L_2$

(2) $\lim_{x \to x_o} (f-g)(x) = L_1 - L_2$

(3) $\lim_{x \to x_o} (c.f)(x) = c.L_1$ เมื่อ $c \in R$

(4) $\lim_{x \to x_o} (f.g)(x) = L_1 . L_2$

(5) $\lim_{x \to x_o} (f/g)(x) = L_1 / L_2$ เมื่อ $L_2 \neq 0$

พิสูจน์ ดู [1] หน้า 69-70

<u>ทฤษฎี</u> 2.3.6 ให้ f, g และ h เป็นฟังก์ชันจาก D ไป R และ x_o เป็นจุดลิมิตของ D

ถ้า $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ สำหรับแต่ละ $x \in D$

และ $\lim_{x \to x_o} f(x) = L = \lim_{x \to x_o} g(x)$

แล้วจะได้ว่า $\lim_{x \to x_o} h(x) = L$

<u>พิสูจน์</u> ดู [1] หน้า 73

<u>นิยาม</u> 2.3.6 ให้ $f : D \to R$ จะกล่าวว่า f เป็น<u>ฟังก์ชันที่มีขอบเขต</u> (bounded function) บน D ก็ต่อเมื่อมี M เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่งทำให้

$$|f(x)| < M \quad \text{สำหรับทุก } x \in D$$

<u>ทฤษฎี</u> 2.3.7 ให้ $f : D \to R$, $g : D \to R$ และ x_o เป็นจุดลิมิตของ D

ถ้า $\lim_{x \to x_o} f(x) = 0$ และ g เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต แล้วจะได้ว่า $\lim_{x \to x_o} (f.g)(x) = 0$

<u>พิสูจน์</u> ดู [8] หน้า 71

<u>นิยาม</u> 2.3.7 ให้ $f : D \dashrightarrow R$ และ $a \in D$ จะกล่าวว่า f <u>มีความต่อเนื่องที่จุด</u> a (f is countinuous at a) ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

ถ้า $|x - a| < \delta$ และ $x \in D$

แล้ว $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

<u>นิยาม</u> 2.3.8 ให้ $f : D \dashrightarrow R$ จะกล่าวว่า f เป็น <u>ฟังก์ชันต่อเนื่องบน</u> D (f is continuous on D) ก็ต่อเมื่อ f มีความต่อเนื่อง ที่จุดทุกจุดใน D

<u>ทฤษฎี</u> 2.3.8 ให้ $f : D \dashrightarrow R$

ถ้า x_o เป็นจุดลิมิตของ D และ $x_o \in D$ แล้ว

จะได้ว่า f มีความต่อเนื่องที่จุด x_o

ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$

<u>พิสูจน์</u> ดู [3] หน้า 158

<u>ทฤษฎี</u> 2.3.9 ให้ $f : D \dashrightarrow R$, $g : D \dashrightarrow R$ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $a \in D$ แล้วจะได้ว่า

(1) $f + g$, $f - g$ และ $f.g$ มีความต่อเนื่องที่จุด a

(2) $c.f$ มีความต่อเนื่องที่จุด a สำหรับทุก $c \in R$

(3) f/g มีความต่อเนื่องที่จุด a ถ้า $g(a) \neq 0$

<u>พิสูจน์</u> ดู [3] หน้า 165-166

<u>ทฤษฎี</u> 2.3.10 ให้ $f, g : D \dashrightarrow R$ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน D แล้วจะได้ว่า

(1) $f + g$, $f - g$, $f.g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน D

(2) $c.f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน D สำหรับทุก $c \in R$

(3) f/g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน D ถ้า $g(x) \neq 0$

<u>พิสูจน์</u> เป็นผลโดยตรงจากนิยาม 2.3.8 และทฤษฎี 2.3.9

2.4 <u>การหาอนุพันธ์ และการอินทิเกรต</u> (Differentiation and Integration)

<u>นิยาม</u> 2.4.1 ให้ $f : D \dashrightarrow R$ และ $x \in D$ <u>อนุพันธ์ของ f ที่ x</u> (The derivative of f at x) ซึ่งเขียนแทนด้วย $f'(x)$ หมายถึง

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ เมื่อลิมิตนี้หาค่าได้ (exist)

<u>หมายเหตุ</u> (1) ถ้า $f'(c)$ สำหรับ $c \in D$ ตามนิยาม 2.4.1 หาค่าได้ เรากล่าวว่า f <u>มีอนุพันธ์ที่</u> c (f is differentiable at c)

(2) เรียก f ว่าไม่มีอนุพันธ์ที่จุด c ถ้า $\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ ไม่มี

(3) สำหรับแต่ละฟังก์ชัน f ถ้ามีฟังก์ชัน f'
ที่โดเมนเป็นเซต ซึ่งประกอบด้วยจุด $c \in D$
จะเรียกฟังก์ชัน f' ว่า ฟังก์ชันอนุพันธ์ของ f
(The derivative of f)

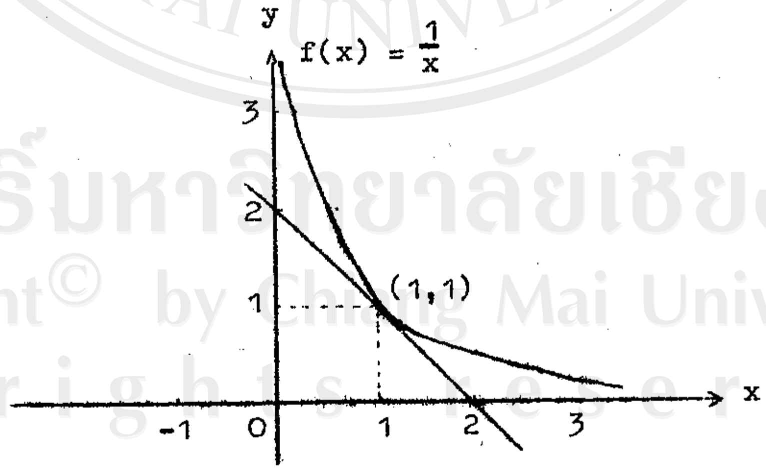
(4) ถ้าโดเมนของ f' ในข้อ (3) คือ เซต D
เรากล่าวว่า f มีอนุพันธ์บน D (f is differentiable on D)

นิยาม 2.4.2 ให้ $f : D \longrightarrow R$ และ $a \in D$
จะเรียกเส้นตรงที่ผ่านจุด P(a, f(a)) ว่า เส้นสัมผัส (tangent line) กราฟของฟังก์ชัน f ที่จุด P ก็ต่อเมื่อ ความชัน (slope) ของเส้นตรงนี้มีค่าเท่ากับ

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ เมื่อลิมิตหาค่าได้

ตัวอย่าง 2.4.1 กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x}$ จะหาความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน f ที่จุด (1, 1) ได้ดังนี้

วิธีทำ



รูป 2.4.1

เนื่องจาก $f(x) = \frac{1}{x}$

ดังนั้น $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \frac{-h}{xh(x+h)}$$

$$= \frac{-1}{x(x+h)} \quad , \; h \neq 0$$

โดยนิยาม 2.4.1 จะได้ว่า

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ดังนั้น $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)}$$

$$= \frac{-1}{x^2}$$

นั่นคือ ความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน f ที่จุด $(1, 1) = f'(1) = -1$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.4.2 ให้ K_c เป็นฟังก์ชันคงที่ ซึ่ง $K_c(x) = c$

สำหรับทุกๆ $x \in R$

จะหาค่าของ $K_c'(a)$ เมื่อ $a \in R$ ได้ดังนี้

<u>วิธีทำ</u> โดยนิยาม 2.4.1 จะได้ว่า

$$K_c'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{K_c(a+h) - K_c(a)}{h}$$

ดังนั้น $K_c'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.4.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น

ซึ่ง $f(x) = mx + c$ เมื่อ $m, c \in R$

จะหาค่าของ $f'(x)$ ได้ดังนี้

<u>วิธีทำ</u> โดยนิยาม 2.4.1 จะได้ว่า

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ดังนั้น $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{m(x+h) + c - (mx+c)}{h}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{mh}{h} = m$$

นั่นคือ ฟังก์ชันอนุพันธ์ของ ฟังก์ชันเชิงเส้น เป็นฟังก์ชันคงที่ .

ทฤษฎี 2.4.1 ถ้า f มีอนุพันธ์ที่จุด c แล้ว จะได้ว่า f มีความต่อเนื่องที่จุด c

พิสูจน์ ดู [3] หน้า 199

ข้อสังเกต บทกลับของทฤษฎี 2.4.1 ไม่เป็นความจริง

ให้ $f(x) = |x|$

เพราะว่า $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ โดยทฤษฎี 2.3.8

จะได้ว่า f มีความต่อเนื่องที่ 0

แต่เนื่องจาก $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{h}{h} = 1$

และ $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{-h}{h} = -1$

แสดงว่า f ไม่มีอนุพันธ์ที่ $x = 0$

เพราะว่า $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0 + h) - f(0)}{h}$ ไม่มี

ทฤษฎี 2.4.2 (Mean Value Theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ f มี อนุพันธ์ บน (a, b) แล้วจะมีจุด $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

พิสูจน์ ดู [1] หน้า 109-110

<u>นิยาม</u> 2.4.3 ให้ $f : D \dashrightarrow R$

(1) จะกล่าวว่า f เป็น<u>ฟังก์ชันไม่ลดลง</u> (nondecreasing function) บน D ก็ต่อเมื่อ $f(x_1) \leq f(x_2)$ สำหรับทุกๆ $x_1 < x_2$ ที่อยู่ในโดเมนของ f

(2) จะกล่าวว่า f เป็น<u>ฟังก์ชันไม่เพิ่มขึ้น</u> (nonincreasing function) บน D ก็ต่อเมื่อ $f(x_1) \geq f(x_2)$ สำหรับทุกๆ $x_1 < x_2$ ที่อยู่ในโดเมนของ f

(3) จะกล่าวว่า f เป็น<u>ฟังก์ชันโมโนโทน</u> (monotone function) บน D ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันไม่ลดลงบน D หรือ f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มขึ้นบน D เพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบน $[a, b]$ และมีฟังก์ชันอนุพันธ์บน (a, b)

(1) ถ้า $f'(x) = 0$ สำหรับ $x \in (a, b)$ แล้วจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันคงที่

(2) ถ้า $f'(x) \geq 0$ สำหรับ $x \in (a, b)$ แล้วจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันไม่ลดลง

(3) ถ้า $f'(x) \leq 0$ สำหรับ $x \in (a, b)$ แล้วจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มขึ้น

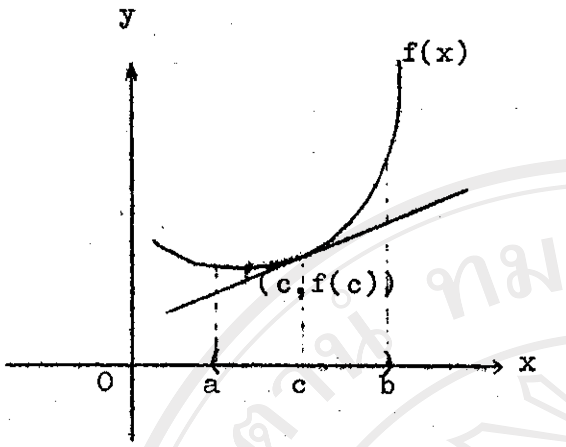
<u>พิสูจน์</u> ดู [1] หน้า 111-112

<u>นิยาม</u> 2.4.4 สมมุติว่า f มีฟังก์ชันอนุพันธ์ f' บนเซต D ถ้าฟังก์ชัน f' มีอนุพันธ์ที่จุด $c \in D$ เรียกอนุพันธ์ของ f' ที่ c ว่า <u>อนุพันธ์อันดับสอง</u> (The second derivatives) ของ f ที่ c และนิยมเขียนแทนค่าอนุพันธ์นี้ว่า $f''(c)$

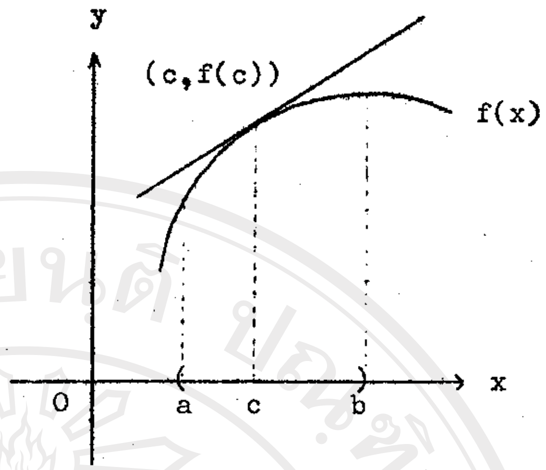
<u>หมายเหตุ</u> เราสามารถให้นิยาม <u>อนุพันธ์อันดับสาม</u> (The third derivative) ของ f ที่ c (เขียนแทนด้วย $f'''(c)$) และอนุพันธ์อันดับอื่นๆ ไปจนกระทั่งถึง <u>อนุพันธ์อันดับที่ n</u> (The n-th derivative) ของ f ที่ c (เขียนแทนด้วย $f^{(n)}(c)$ สำหรับ $n \geq 4$) ตราบเท่าที่อนุพันธ์เหล่านี้หาค่าได้

<u>นิยาม</u> 2.4.5 (1) เรียกกราฟของฟังก์ชัน f ว่า <u>มีความเว้าอยู่ข้างบน</u> (concave upward) ที่จุด $(c, f(c))$ ก็ต่อเมื่อ f มีอนุพันธ์ที่จุด c โดยมีช่วง (a, b) ซึ่ง $a < c < b$ และทำให้จุด $(x, f(x)$ อยู่เหนือเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน f ที่จุด $(c, f(c))$ ทั้งหมด สำหรับทุก $x \in (a,b)$ (รูป 2.4.2)

(2) เรียกกราฟของฟังก์ชัน f ว่ามี <u>ความเว้าอยู่ข้างล่าง</u> (concave downward) ที่จุด $(c, f(c))$ ก็ต่อเมื่อ f มีอนุพันธ์ที่จุด c โดยมีช่วง (a, b) ซึ่ง $a < c < b$ และทำให้จุด $(x, f(x))$ อยู่ใต้เส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน f ที่จุด $(c, f(c))$ ทั้งหมด สำหรับทุก $x \in (a, b)$ (รูป 2.4.3)



รูป 2.4.2



รูป 2.4.3

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.4 ให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีอนุพันธ์บนช่วง (a, b) และมี $c \in (a, b)$

(1) ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว จะได้ว่ากราฟของฟังก์ชัน f มีความเว้าอยู่ข้างบนที่จุด $(c, f(c))$

(2) ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว จะได้ว่ากราฟของฟังก์ชัน f มีความเว้าอยู่ข้างล่างที่จุด $(c, f(c))$

<u>พิสูจน์</u> ดู [7] หน้า 123-124

<u>นิยาม</u> 2.4.6 ให้ $[a, b]$ เป็นช่วงที่กำหนดให้ เรียก P ว่าเป็น <u>พาร์ติชั่น</u> (partition) ของ $[a, b]$ ถ้า P เป็นเซตจำกัดของจุด $x_o, x_1, \ldots, x_n$ โดยที่

$$a = x_o < x_1 < \ldots < x_n = b$$

<u>นิยาม</u> 2.4.7 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต บน $[a, b]$ และ $P = \{x_o, x_1, \ldots, x_n\}$ เป็นพาร์ติชั่นของ $[a, b]$ กำหนดให้ m_i, M_i มีค่า ดังต่อไปนี้

$$m_i = \inf. \{f(x) / x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

$$M_i = \sup. \{f(x) / x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

<u>นิยาม</u> 2.4.8 (จากนิยาม 2.4.7) กำหนดให้ <u>ผลบวกด้านบน</u> (upper sum) ของ f ซึ่งเขียนแทนด้วย $U (f,P)$ มีค่าดังนี้

$$U (f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

และกำหนดให้ <u>ผลบวกด้านล่าง</u> (lower sum) ของ f ซึ่งเขียนแทนด้วย $L(f, P)$ มีค่าดังนี้

$$L (f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

<u>ข้อสังเกต</u> ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ แล้วจะได้ว่า $U (f,P)$ ก็คือผลรวมของพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าแนบนอก (circumscribed rectangles) รูปกราฟของฟังก์ชัน f บน $[a, b]$

และ $L(f, P)$ ก็คือ ผลรวมของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแนบใน (inscribed rectangles) รูปกราฟของฟังก์ชัน f บน $[a, b]$

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.5 ให้ P เป็นพาร์ติชั่นของ $[a, b]$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตในช่วง $[a, b]$ แล้วจะได้ว่า

$L(f, P) \leq U(f, P)$

<u>พิสูจน์</u> ดู [1] หน้า 126

<u>นิยาม</u> 2.4.9 ให้ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

และ $P' = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$

เป็นพาร์ติชั่นของ $[a, b]$ จะกล่าวว่า P' เป็น <u>รีไฟเมนต์</u> (refinement) ของ P บน $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ $P \subset P'$

<u>หมายเหตุ</u> $P \subset P'$ หมายถึง P เป็น<u>สับเซตแท้</u> (proper subset) ของ P'

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.6 ให้ P' เป็น รีไฟเมนต์ของ P บน $[a, b]$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน $[a, b]$ แล้วจะได้ว่า

$$U(f, P') \leq U(f, P)$$

$$\text{และ} \quad L(f, P') \geq L(f, P)$$

<u>พิสูจน์</u> ดู [1] หน้า 126

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.7 ให้ P_1 และ P_2 เป็นพาร์ติชันใดๆ ของ $[a, b]$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน $[a, b]$ แล้วจะได้ว่า

$L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$

<u>พิสูจน์</u> ดู [1] หน้า 127

<u>ข้อสังเกต</u> จากผลของทฤษฎี 2.4.7 ทำให้ เมื่อกำหนดให้ P เป็นพาร์ติชันใดๆ ของ $[a,b]$ แล้ว จะได้ว่า

$$\sup.\{L(f, P)\} \leq \inf.\{U(f, P)\}$$

<u>สัญลักษณ์</u> เขียนแทน $\sup.\{L(f, P) \mid P$ เป็นพาร์ติชั่นใดๆ ของ $[a, b]\}$ ด้วย $\underline{\int_a^b} f$ เรียกว่า โลเวอร์อินทิกรัล (lower integral)

และเขียนแทน $\inf.\{U(f, P) \mid P$ เป็นพาร์ติชันใดๆ ของ $[a, b]\}$ ด้วย $\overline{\int_a^b} f$ เรียกว่า อัปเปอร์อินทิกรัล (upper integral)

<u>นิยาม</u> 2.4.10 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต บน $[a, b]$ จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชัน ที่มี <u>รีมานน์อินทิกรัล</u> (Riemann integral) บน $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

และเรียกจำนวนจริง $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ ว่ารีมานน์-

อินทิกรัลของ f บน [a, b]

ซึ่งเขียนแทนด้วย $\int_a^b f$ หรือ $\int_a^b f(x)\,dx$

<u>ข้อสังเกต</u> จากนิยาม 2.4.10 เมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน [a, b] และ $f(x) \geq 0$ บน [a, b] แล้ว

จะได้ว่า $\int_a^b f(x)\,dx$ ก็คือ พื้นที่ระหว่างกราฟของ

f(x) และแกน x จาก a ถึง b

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.8 ถ้าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่อง บน [a, b] − A โดยที่ A เป็นเคาเทเบิลสับเซต ของ R แล้วจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่มีรีมานน์อินทิกรัล บน [a, b]

<u>หมายเหตุ</u> A เป็น<u>เคาเทเบิลเซต</u> (countable set) ก็ต่อเมื่อ A สามารถเขียนได้เป็น $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$

เมื่อ $k \in I^+$ หรือ $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$

<u>พิสูจน์</u> ดู [2] หน้า 228

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.9 ถ้าฟังก์ชัน f และ g เป็นฟังก์ชันที่มี รีมานน์อินทิกรัล บน $[a, b]$

และ $f(x) \leq g(x)$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$

แล้ว จะได้ว่า $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$

<u>พิสูจน์</u> ดู [2] หน้า 223

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.10 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบน $[a, b]$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มี รีมานน์อินทิกรัล บน $[a, c]$

และบน $[c, b]$

แล้วจะได้ว่า f มีรีมานน์อินทิกรัล บน $[a, b]$

และ $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)\, dx$

<u>พิสูจน์</u> ดู [2] หน้า 226

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.11 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีรีมานน์อินทิกรัลบน $[a, b]$

และฟังก์ชัน $F : [a, b] \longrightarrow R$

ซึ่งกำหนดโดย $F(x) = \int_a^x f(x)\, dx$

มีความต่อเนื่องบน $[a, b]$ และหาอนุพันธ์บน (a,b) ได้

โดยที่ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุกๆ $x \in (a, b)$

แล้ว จะได้ว่า

$$\int_a^b f(x)\, dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

<u>พิสูจน์</u> ดู [2] หน้า 233

<u>ตัวอย่าง</u> 2.4.4 จะแสดงการหาค่าของ $\int_1^9 \frac{1}{x}\,dx$ โดยใช้ทฤษฎี 2.4.11

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $f(x) = \frac{1}{x}$

ถ้าให้ $F(x) = \log x$

แล้วจะได้ว่า $F'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$

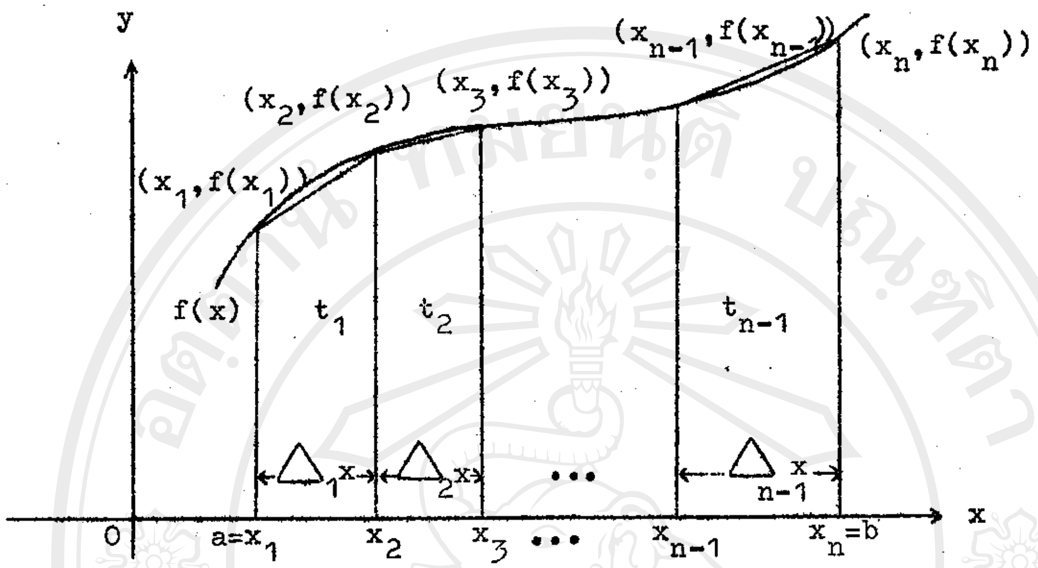
ดังนั้นโดยทฤษฎี 2.4.11 ทำให้ได้ว่า

$$\int_1^9 f(x)\,dx = \Big[\log x\Big]_1^9$$

$$= \log 9 - \log 1$$

$$= 2.1972$$ (จากตาราง-ลอการิทึมใน [7] หน้า 745)

<u>นิยาม</u> 2.4.11 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบน $[a, b]$ และ $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ เรียก T_n เมื่อ $n \in I^+$ ว่าเป็นค่าของพื้นที่ที่ได้จากการประมาณ โดย<u>วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู</u> (Trape zoidal method) บนจุด $a = x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ ของ $\int_a^b f(x)\,dx$ เมื่อ T_n หาได้จากวิธีดังต่อไปนี้



รูป 2.4.4

ให้ $\triangle_i x = x_{i+1} - x_i$ เมื่อ $i=1,2,3,\ldots,n-1$

จากรูป 2.4.4 จะได้ว่า

พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู $t_1 = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \triangle_1 x$

พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู $t_2 = \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} \triangle_2 x$

$\vdots$

พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู $t_{n-1} = \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n) \triangle_{n-1} x}{2}$

ให้ T_n เป็นผลรวมของพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมูทั้งหมด n-1 รูป

ดังนั้น $T_n = \sum_{i=1}^{n-1} t_i$

$$= \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \triangle_1 x + \cdots$$

$$+ \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} \triangle_2 x + \cdots$$

$$+ \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \triangle_{n-1} x$$

นั่นคือ T_n เมื่อ $n \in I^+$ เป็นค่าของพื้นที่ ที่ได้จาก การประมาณโดยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู บนจุด

$a = x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ ของ $\int_a^b f(x)\, dx$

<u>หมายเหตุ</u> โดยทั่วไปแล้ว การหาค่าของพื้นที่ ที่ได้จากการประมาณโดยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู

นิยมให้ $\triangle_i x = \frac{b - a}{n - 1}$ เมื่อ $i=1,2,\ldots,n-1$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.4.5 จะแสดงการหาพื้นที่ ที่ได้จากการประมาณโดยวิธีสี่เหลี่ยม-คางหมู T_9 บนจุด $1,2,3,\ldots,9$ ของ $\int_1^9 \frac{1}{x}\, dx$

<u>วิธีทำ</u> โดยนิยาม 2.4.11

จะได้ $\Delta_i x = x_{i+1} - x_i = 1$

เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, 8$

จากที่กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x}$

ดังนั้นพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู $t_1 = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$

พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู $t_2 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{2} = \frac{5}{12}$

$$\vdots \qquad \vdots = \vdots$$

พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู $t_8 = \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{9}}{2} = \frac{17}{144}$

ดังนั้น $T_9 = \frac{3}{4} + \frac{5}{12} + \cdots + \frac{17}{144}$

$= 2.2735$

<u>ข้อสังเกต</u> (1) เมื่อเปรียบเทียบพื้นที่ ที่หาได้จากตัวอย่าง 2.4.4 และตัวอย่าง 2.4.5 จะพบว่ามีค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการประมาณ โดยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู T_9 บนจุด 1,2,3,...,9 ของ $\int_1^9 f(x)\,dx$

(2) ถ้า f เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น จากนิยาม 2.4.11 จะเห็นได้ชัดว่าไม่มีค่าคลาดเคลื่อน ที่เกิดจากการประมาณโดยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู T_n เมื่อ $n \in I^+$ บนจุด

$a = x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ ของ $\int_a^b f(x)\,dx$

นั่นคือ ค่าของพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมูที่ใช้ประมาณ $\int_a^b f(x)dx$

จะเท่ากับ ค่าอินทิกรัลของ $f(x)$ จาก a ถึง b