บทที่ 3

ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณพื้นที่ใต้เส้นโค้งเว้าโดยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (I)

การศึกษาในบทนี้ เป็นการศึกษาจากบทความของ Stein, S.K. [10] เรื่อง The Error of the Trapezoidal Method for a Concave curve จากวารสาร The American Mathematical Monthly เดือนตุลาคม ปี 1976 ซึ่งกล่าวถึงการหาผลรวม ของพื้นที่ คลาดเคลื่อนทั้งหมด จากการประมาณพื้นที่ใต้เส้นโค้งเว้า โดยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู และแสดงว่าผลรวมนี้มีขอบเขตจำกัด อยู่ภายในพื้นที่สามเหลี่ยมรูปหนึ่ง จากนั้นนำผลที่ได้ไปใช้ในการประมาณค่าของ $n!$

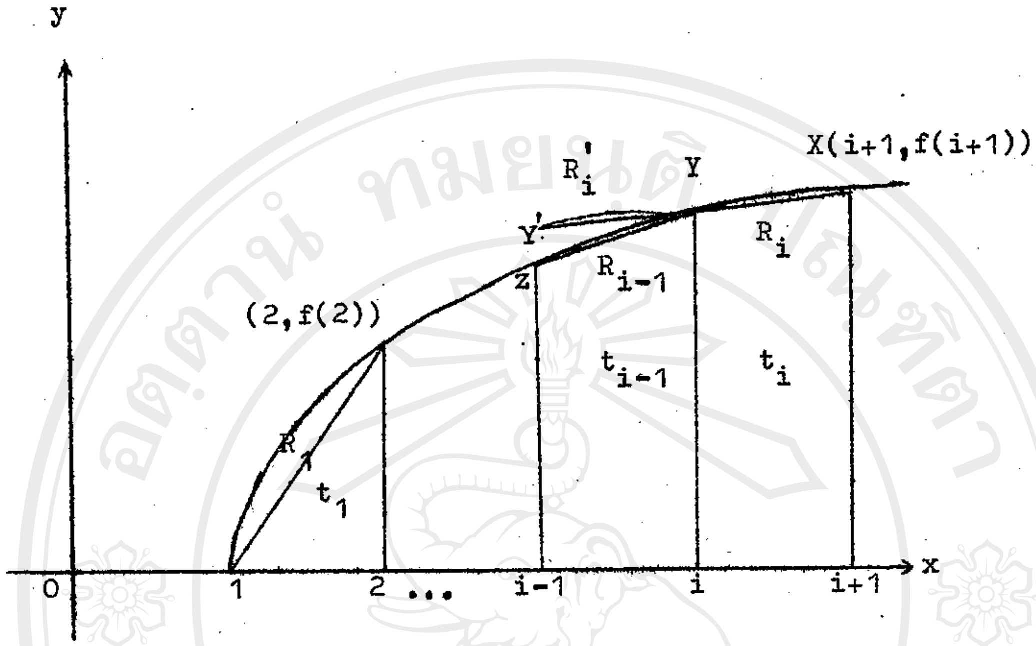
<u>ทฤษฎี</u> 3.1.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามสำหรับ $x \geq 1$ โดยที่ $f(x) \geq 0$, $f'(x) \geq 0$ และ $f''(x) \leq 0$ ถ้า T_n เมื่อ $n \in I^+$ เป็นค่าของพื้นที่ ที่ได้จากการประมาณโดยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู บนจุด $1, 2, 3, \ldots, n$ ของ $\int_1^n f(x)\,dx$

แล้วจะได้ว่า $\int_1^n f(x)\,dx - T_n \leq \dfrac{f(2) - f(1)}{2}$

<u>หมายเหตุ</u> โดยไม่เสียความเป็นทั่วๆ ไป ที่จะสมมุติให้ $f(1) = 0$ เพราะเราอาจจะพิจารณาฟังก์ชัน $F(x) = f(x) - f(1)$ ซึ่งมีคุณสมบัติเหมือนฟังก์ชัน f ในสมมุติฐาน และ $\int_1^n f(x)dx - T_n = \int_1^n F(x)dx - \bar{T}_n$, ซึ่งเท่ากับ $\dfrac{f(2) - f(1)}{2} = \dfrac{F(2) - F(1)}{2}$ ตามลำดับ

โดยที่ $\bar{T}_n$ เป็นค่าของพื้นที่ ที่ได้จากการประมาณโดยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู บนจุด $1, 2, \ldots, n$ ของ $\int_1^n F(x)dx$

พิสูจน์



รูป 3.1.1

ให้ A_i เป็นพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชัน $f(x)$

เมื่อ $i \leq x \leq i+1$, $i = n-1, n-2, \ldots, 1$

ดังนั้น $A_i = \int_i^{i+1} f(x)\,dx$

และให้ t_i เป็นพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู ที่ใช้ประมาณค่าของ A_i

ทำให้ $t_i = \dfrac{f(i) + f(i+1)}{2}$

ถ้าให้ R_i เป็นพื้นที่คลาดเคลื่อนระหว่าง A_i และ t_i

ดังนั้น $R_i = \int_i^{i+1} f(x)\,dx - \dfrac{f(i) + f(i+1)}{2}$

จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{n-1} R_i = \sum_{i=1}^{n-1} \left[\int_i^{i+1} f(x)\,dx - \frac{f(i) + f(i+1)}{2}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \int_i^{i+1} f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f(i) + f(i+1)}{2}$$

โดยทฤษฎี 2.4.10 จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_i^{i+1} f(x)\,dx = \int_1^n f(x)\,dx$$

โดยนิยาม 2.4.11 จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{f(i) + f(i+1)}{2} = T_n$$

นั่นคือ $$\sum_{i=1}^{n-1} R_i = \int_1^n f(x)\,dx - T_n \qquad (1)$$

ต่อไปจะแสดงว่า เมื่อใช้การเลื่อนทางขนาน ส่งพื้นที่คลาดเคลื่อน R_i ไปยัง R_i' โดยมีเงื่อนไขว่า การเลื่อนทางขนานนี้ ส่งจุด $(i+1, f(i+1))$ ไปยัง $(i, f(i))$ แล้วจะได้ว่า พื้นที่ R_i' และ R_{i-1} จะมีจุด $(i, f(i))$ เป็นจุดร่วมกันเพียงจุดเดียว

ให้ J_i เป็นการเลื่อนทางขนานของพื้นที่คลาดเคลื่อน R_i

เมื่อ $i = n-1, n-2, \ldots, 2$

โดยที่ $J_i((i+1, f(i+1))) = (i, f(i))$

จากรูป 3.1.1 ให้จุด X, Y, Z มีพิกัดเป็น $(i+1, f(i+1))$, $(i, f(i))$ และ $(i-1, f(i-1))$ ตามลำดับ

จะได้ว่า $J_i(X) = X' = Y$ และ $J_i(Y) = Y'$

โดยนิยาม 2.1.5 ทำให้ได้ว่า

จุด X, Y และ Y' อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และพื้นที่ R_i ถูกส่งไปยัง R_i' บนเส้นตรง YY'

ให้ t เป็นเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่จุด $Y(i, f(i))$

ดังนั้นสมการของเส้นสัมผัสนี้คือ

$$y_t = f'(i)x - f'(i)i + f(i) \qquad (2)$$

และสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $Y(i, f(i))$ และ $X(i + 1, f(i + 1))$ คือ

$$y = \left(\frac{f(i+1) - f(i)}{(i+1) - i}\right)x - \left(\frac{f(i+1) - f(i)}{(i+1) - i}\right)i + f(i) \qquad (3)$$

โดย Mean Value Theorem จะมี $c \in (i, i + 1)$ ซึ่งทำให้

$$f'(c) = \frac{f(i + 1) - f(i)}{(i + 1) - i}$$

จาก (3) จะได้ $y = f'(c)x - f'(c)i + f(i) \qquad (4)$

พิจารณา (4)-(2) ทำให้ได้ว่า

$$y - y_t = (f'(c) - f'(i))x - (f'(c) - f'(i))i$$

$$y - y_t = \{f'(c) - f'(i)\}(x - i)$$

ถ้าให้ $x \leq i$

จะได้ว่า $x - i \leq 0$

และจากที่กำหนดให้ $f''(x) \leq 0$ โดยทฤษฎี 2.4.3

จะได้ว่า $f'(c) \leq f'(i)$

ดังนั้น $y - y_t \geq 0$ เมื่อ $x \leq i$

นั่นคือ ไม่มีพื้นที่ส่วนใดของ R_i' บนเส้นตรง YY' อยู่ใต้เส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน f ที่จุด $Y(i, f(i))$

จากที่กำหนดให้ $f''(x) \leq 0$ โดยทฤษฎี 2.4.4(2) จะได้ว่า กราฟของฟังก์ชัน f อยู่ใต้เส้นสัมผัสที่จุด $Y(i, f(i))$ ดังนั้นพื้นที่ R_i' และพื้นที่ R_{i-1} มีจุด $Y(i, f(i))$ เป็นจุดร่วมกันเพียงจุดเดียว

ต่อไปให้ J_{i-1} เป็นการเลื่อนทางขนานของพื้นที่คลาดเคลื่อน R_i' และพื้นที่ R_{i-1}

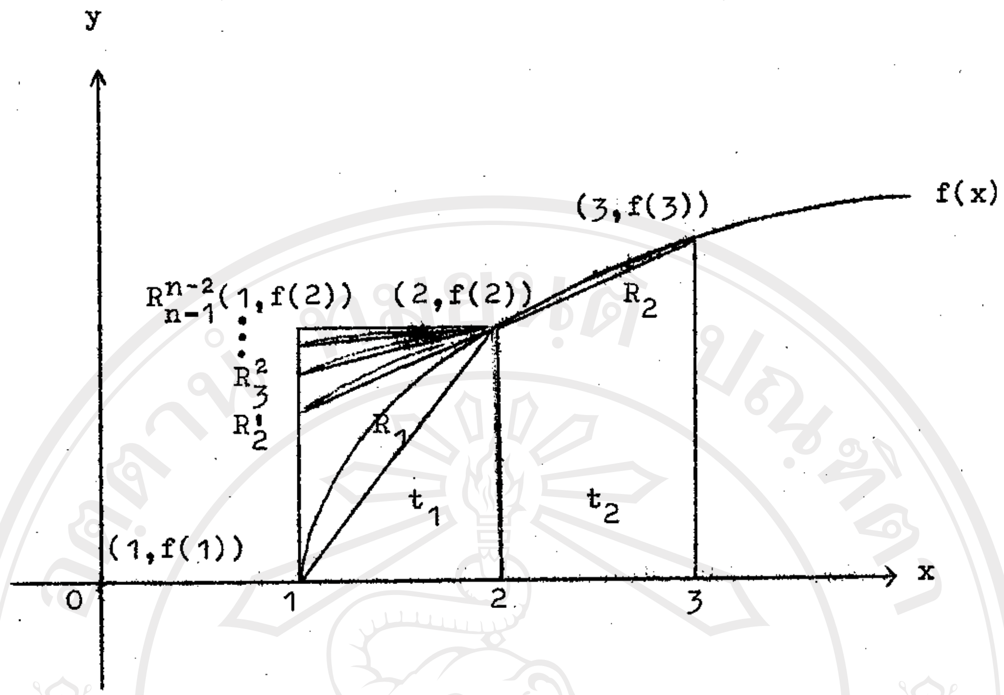
โดยที่ $J_{i-1}((i, f(i))) = (i - 1, f(i - 1))$

ทำให้ พื้นที่ $(R_i')'$, พื้นที่ R_{i-1}' และพื้นที่ R_{i-2} มีจุด $(i - 1, f(i-1))$ เป็นจุดร่วมกันเพียงจุดเดียว (เหตุผลในทำนองเดียวกัน กับที่กล่าวมาแล้วข้างต้น) เพื่อความสะดวกจะเขียนแทน $(R_i')'$, $((R_i')')'$, ... ด้วย R_i^2 , R_i^3 ... R_i^{i-1} เมื่อ $i = n-1, n-2, \ldots, 2$

ดังนั้นโดยใช้การเลื่อนทางขนาน J_i ของพื้นที่คลาดเคลื่อน R_i เมื่อ $i = n-1, n-2, \ldots, 2$ ดังกล่าว

จะได้ว่าพื้นที่คลาดเคลื่อน R_i^{i-1} เมื่อ $i = n-1, n-2, \ldots, 2$ มีจุด $(2, f(2))$ เป็นจุดร่วมกันเพียงจุดเดียว (รูป 3.1.2)

จากที่กำหนดให้ $f'(x) \geq 0$ และ $f''(x) \leq 0$ ทำให้พื้นที่-คลาดเคลื่อนทั้งหมดอยู่ใต้เส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, f(2))$ และขนานกับแกน x



รูป 3.1.2

ดังนั้นพื้นที่ R_i^{i-1} สำหรับทุกๆ $i = n-1, n-2, \ldots, 2$ และพื้นที่ R_1 จะมีจุด $(2, f(2))$ เป็นจุดร่วมกันเพียงจุดเดียว โดยไม่มีพื้นที่ส่วนอื่นร่วมกัน และพื้นที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดจะอยู่ในพื้นที่สามเหลี่ยมที่จุดยอดมีพิกัดเป็น $(1, f(1))$, $(1, f(2))$ และ $(2, f(2))$

ซึ่งมีพื้นที่ $= \dfrac{f(2)}{2}$

นั่นคือ $\sum_{i=1}^{n-1} R_i \leq \dfrac{f(2)}{2}$

จาก (1) $\sum_{i=1}^{n-1} R_i = \int_1^n f(x)dx - T_n$

ดังนั้น $\int_1^n f(x)\, dx - T_n \leq \dfrac{f(2) - f(1)}{2}$ □

<u>ข้อสังเกต</u> จากทฤษฎี 3.1.1 จะมีผลทำให้

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{n}^{n+1} f(x)\,dx - \frac{f(n+1)+f(n)}{2}\right] \le \frac{f(2)-f(1)}{2}$$

ดังนั้นโดยทฤษฎี 2.2.2 จะได้ว่า
อนุกรมอนันต์ของค่าคลาดเคลื่อน ที่เกิดจากการประมาณพื้นที่ใต้เส้นเส้นโค้งเว้าของฟังก์ชัน f โดยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูเป็นอนุกรมที่ลู่เข้า

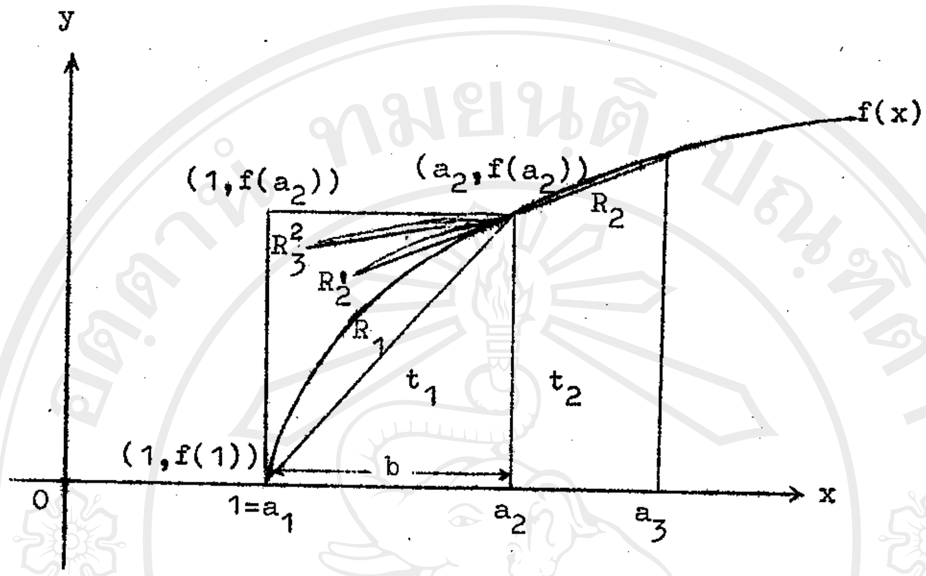
<u>ทฤษฎี</u> 3.1.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามสำหรับ $x \ge 1$
โดยที่ $f(x) \ge 0$, $f'(x) \ge 0$ และ $f''(x) \le 0$
ให้ $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots$ เป็นลำดับอนันต์ ถ้าลำดับของ $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots$ มีขอบเขตบนเท่ากับ b แล้วจะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx - \frac{f(a_{n+1})+f(a_n)}{2}\cdot(a_{n+1}-a_n)\right]$$

เป็นอนุกรม ที่ลู่เข้า และผลรวมมีค่ามากที่สุดเท่ากับ $\frac{b^2 f'(1)}{2}$

<u>หมายเหตุ</u> โดยไม่เสียความเป็นทั่วๆ ไป ที่จะสมมุติให้ $f(1) = 0$ เช่นเดียวกับการพิสูจน์ทฤษฎี 3.1.1

<u>พิสูจน์</u> <u>กรณีที่</u> 1 ถ้า $a_2 - a_1 = b$



รูป 3.1.3

ให้ A_n เป็นพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชัน f

เมื่อ $a_n \le x \le a_{n+1}$, $n = \ldots,3,2,1$

ดังนั้น $A_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx$

และให้ t_n เป็นพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมูที่ใช้ประมาณค่า A_n

จะได้ว่า $t_n = \dfrac{f(a_{n+1}) + f(a_n)}{2} \cdot (a_{n+1} - a_n)$

ถ้า R_n เป็นพื้นที่คลาดเคลื่อนระหว่าง A_n และ t_n

ดังนั้น

$$R_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx - \frac{f(a_{n+1}) + f(a_n)}{2} \cdot (a_{n+1} - a_n)$$

โดยใช้การเลื่อนทางขนาน พื้นที่คลาดเคลื่อน R_n ในทำนองเดียวกัน กับทฤษฎี 3.1.1

และจากที่กำหนดให้ b เป็นขอบเขตบนของลำดับ $a_2-a_1, a_3-a_2, \ldots$

ดังนั้น พื้นที่ R_n^{n-1} สำหรับ $n = \ldots,4,3,2$ จะถูกเลื่อนมาอยู่ในสามเหลี่ยมที่จุดยอด มีพิกัดเป็น $(a_1, f(a_1))$, $(a_1, f(a_2))$ และ $(a_2, f(a_2))$ ตามรูป 3.1.3

$$\text{ซึ่งมีพื้นที่} = \frac{f(a_2) - f(a_1)}{2} \cdot (a_2 - a_1)$$

ดังนั้น

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx - \frac{f(a_{n+1}) + f(a_n)}{2} \cdot (a_{n+1} - a_n) \right]$$

$$\leq \frac{f(a_2) - f(a_1)}{2} \cdot (a_2 - a_1)$$

เนื่องจาก

$$\frac{f(a_2) - f(a_1)}{2} \cdot (a_2 - a_1) = \frac{f(a_2) - f(a_1)}{(a_2 - a_1) \cdot 2} \cdot (a_2 - a_1)^2$$

โดย Mean Value Theorem จะมี $c \in (a_1, a_2)$

ซึ่งทำให้ $f'(c) = \dfrac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1}$

และจากที่กำหนดให้ $a_2 - a_1 = b$

จะได้ว่า $\dfrac{f(a_2) - f(a_1)\,(a_2 - a_1)}{2} = \dfrac{f'(c)\,b^2}{2}$

จาก $a_1 = 1 < c$ และ $f''(x) \leq 0$ สำหรับทุก $x \geq 1$

โดยทฤษฎี 2.4.3 ทำให้ $f'(1) \geq f'(c)$

ดังนั้น $\dfrac{b^2 f'(c)}{2} \leq \dfrac{b^2 f'(1)}{2}$

ทำให้

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx - \frac{f(a_{n+1}) + f(a_n)\cdot(a_{n+1} - a_n)}{2}\right] \leq \frac{b^2 f'(1)}{2}$$

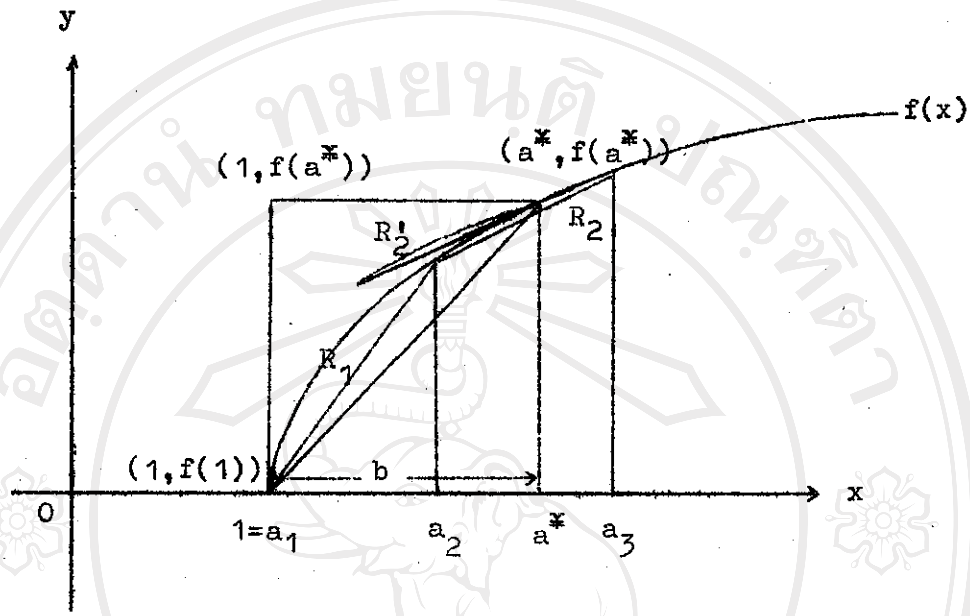
โดยทฤษฎี 2.2.2 จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx - \frac{f(a_{n+1}) + f(a_n)\cdot(a_{n+1} - a_n)}{2}\right]$$

เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า และผลรวมมีค่ามากที่สุด เท่ากับ $\dfrac{b^2 f'(1)}{2}$

□

<u>กรณีที่</u> 2 ถ้า $a_2 - a_1 < b$ กำหนด a^* ซึ่งทำให้ $a^* - a_1 = b$



รูป 3.1.4

ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 1 โดยใช้การเลื่อนทางขนานพื้นที่

คลาดเคลื่อน R_n, $n= \ldots,4,3,2$ ให้มีจุด $(a^*, f(a^*))$

เป็นจุดร่วมกันเพียงจุดเดียว ตามรูป 3.1.4

จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx - \frac{f(a_{n+1}) + f(a_n)}{2}\cdot(a_{n+1} - a_n)\right]$$

$$\leq \frac{b^2 f'(1)}{2}$$

ดังนั้น

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx - \frac{f(a_{n+1}) + f(a_n)}{2}.(a_{n+1} - a_n)\right]$$

เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า และผลรวมมีค่ามากที่สุด เท่ากับ $\frac{b^2f'(1)}{2}$

□

<u>ข้อสังเกต</u> ถ้าลำดับ $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots$ เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขตบน แล้วอนุกรมตามเงื่อนไขทฤษฎี 3.1.2 จะไม่เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง</u> 3.1.1 ให้ $f(x) = \sqrt{x}$ เมื่อ $x \geq 1$ และ $a_n = n^2$

จะแสดงว่าอนุกรมของ

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx - \frac{f(a_{n+1}) + f(a_n)}{2}.(a_{n+1} - a_n)$$

เป็นอนุกรมที่ลู่ออก

<u>วิธีทำ</u> จากที่กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x}$ เมื่อ $x \geq 1$

ทำให้ $f(x) = \sqrt{x} \geq 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \geq 0$$

และ $f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \leq 0$

แต่จากที่กำหนดให้ $a_n = n^2$

จะได้ว่า $a_2 - a_1,\ a_3 - a_2,\ a_4 - a_3,\ \ldots = 3,5,7,\ldots$

ดังนั้นลำดับ $a_2 - a_1,\ a_3 - a_2,\ a_4 - a_3,\ldots$ ไม่มีขอบเขตบน

ทำให้ได้ว่า $$\int_{a_n}^{a_{n+1}} \sqrt{x}\ dx - \frac{f(a_{n+1}) + f(a_n)}{2}\cdot(a_{n+1}-a_n)$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_{n^2}^{(n+1)^2} - \frac{f((n+1)^2) + f(n^2)}{2}((n+1)^2-n^2)$$

$$= \frac{2}{3}\{(n+1)^3 - n^3\} - \frac{(2n+1)^2}{2}$$

$$= \frac{1}{6}$$

ดังนั้น

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{a_n}^{a_{n+1}} \sqrt{x}\ dx - \frac{f(a_{n+1}) + f(a_n)}{2}(a_{n+1} - a_n)\right]$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \ldots$$

ซึ่งเป็นอนุกรมที่ลู่ออก

<u>ทฤษฎี</u> 3.1.3 มีค่าคงที่ c ซึ่งทำให้ $n! \sim c\sqrt{n}\ (n/e)^n$

<u>พิสูจน์</u> ให้ a_n เป็นผลต่างระหว่าง $\int_1^n \log x\ dx$ และ T_n เมื่อ $n \in I^+$ เป็นค่าของพื้นที่ที่ได้จากการประมาณโดยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู บนจุด $1,2,3,\ldots,n$ ของ $\int_1^n \log x\ dx$

ดังนั้น $a_n = \int_1^n \log x \, dx - T_n$

$$a_n = \Big[x \log x - x\Big]_1^n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\log k + \log(k+1)}{2}$$

$$a_n = n \log n - n + 1 - (\log 2 + \log 3 + \ldots + \log n) + \frac{\log n}{2}$$

ทำให้ $e^{a_n} = e^{n\log n - n + 1 - (\log 2 + \log 3 + \ldots + \log n) + \frac{\log n}{2}}$

$$e^{a_n} = e^{\log n^n} \cdot e^{-n} \cdot e \cdot e^{-(\log n!)} \, e^{\log n^{\frac{1}{2}}}$$

$$e^{a_n} = \frac{n^n \cdot e \cdot n^{\frac{1}{2}}}{e^n \, n!}$$

$$e^{a_n} = \frac{e\sqrt{n}\,(n/e)^n}{n!}$$

ดังนั้น $\lim_{n \to \infty} \frac{e\sqrt{n}\,(n/e)^n}{n!} = \lim_{n \to \infty} e^{a_n}$

เนื่องจาก เมื่อ $x \geq 1$ จะได้ว่า $\log x \geq 0$

อนุพันธ์อันดับหนึ่ง ของ $\log x = \frac{1}{x} \geq 0$ เมื่อ $x \geq 1$

อนุพันธ์อันดับสอง ของ $\log x = -\frac{1}{x^2} \leq 0$ เมื่อ $x \geq 1$

ดังนั้นฟังก์ชัน $\log x$ เมื่อ $x \geq 1$ สอดคล้องกับข้อสังเกตท้ายทฤษฎี 3.1.1

ซึ่งทำให้ $\lim_{n \to \infty} a_n$ หาค่าได้

สมมุติให้ $\lim_{n \to \infty} a_n = a$

โดยทฤษฎี 2.3.4(3) จะได้ว่า $\lim_{n \to \infty} e^{a_n} = e^a$

ทำให้ได้ว่า $\lim_{n \to \infty} \frac{e\sqrt{n}\,(n/e)^n}{n!} = e^a$

ฉะนั้น $\lim_{n \to \infty} \frac{e\sqrt{n}\,(n/e)^n}{n!\,e^a} = 1$

ดังนั้น $n! \sim \frac{e\sqrt{n}\,(n/e)^n}{e^a}$

$n! \sim e^{1-a}\sqrt{n}\,(n/e)^n$

ให้ $c = e^{1-a}$

นั่นคือ $n! \sim c\sqrt{n}\,(n/e)^n$ □

<u>หมายเหตุ</u> ค่าคงที่ c ในทฤษฎี 3.1.3 สามารถพิสูจน์ได้ว่า มีค่าเท่ากับ $\sqrt{2\pi}$ โดยทฤษฎีของวอลลิส (Wallis's Theorem) ใน [6] หน้า 223 - 225