บทที่ 4

ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณพื้นที่ใต้เส้นโค้งเว้าโดยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (II)

การศึกษาในบทนี้ แบ่งออกเป็น 2 หัวข้อใหญ่ๆ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

4.1 การศึกษาในหัวข้อนี้ เป็นผลมาจากการศึกษาบทความของ Stein, S.K. ใน [10] ทำให้ผู้เขียนเกิดแนวความคิดใหม่ โดยไม่ใช้การเลื่อนทางขนาน ในการหาขอบเขตบน ของพื้นที่คลาดเคลื่อนทั้งหมด และขอบเขตบนที่หาได้ยังคงมีค่าเท่ากับ $\frac{f(2) - f(1)}{2}$

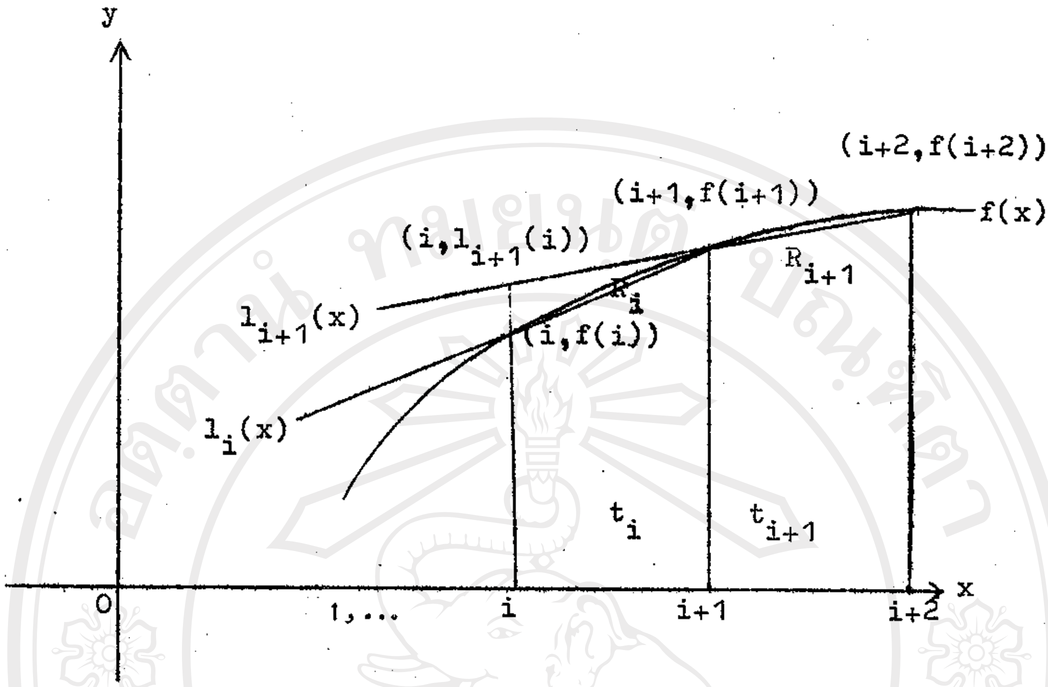
<u>ทฤษฎี</u> 4.1.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามสำหรับ $x \geq 1$ โดยที่ $f(x) \geq 0$, $f'(x) \geq 0$ และ $f''(x) \leq 0$

ถ้า T_n เมื่อ $n \in I^+$ เป็นค่าของพื้นที่ ที่ได้จากการประมาณโดยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู บนจุด $1,2,3,\ldots, n$

ของ $\int_1^n f(x)dx$ แล้วจะได้ว่า

$$\int_1^n f(x)dx - T_n \leq \frac{f(2) - f(1)}{2}$$

<u>พิสูจน์</u>



รูป 4.1.1

ให้ A_i เป็นพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชัน f

เมื่อ $i \le x \le i+1$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$

$$\text{ดังนั้น} \quad A_i = \int_i^{i+1} f(x)\,dx$$

และให้ t_i เป็นพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมูที่ใช้ประมาณค่าของ A_i

ทำให้ $t_i = \dfrac{f(i) + f(i+1)}{2}$

ถ้าให้ R_i เป็นพื้นที่คลาดเคลื่อนระหว่าง A_i และ t_i

$$\text{จะได้ว่า} \quad R_i = \int_i^{i+1} f(x)\,dx - \frac{f(i) + f(i+1)}{2} \qquad (1)$$

<u>ตอนที่</u> 1 ให้ $l_{i+1}(x)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นที่มีกราฟผ่านจุด $(i+1, f(i+1))$ และ $(i+2, f(i+2))$

ดังนั้น $$l_{i+1}(x) = \frac{f(i+2)-f(i+1)}{(i+2)-(i+1)}\{x-(i+1)\}+f(i+1)$$

จะแสดงว่า $l_{i+1}(x) \geq f(x)$ เมื่อ $x \leq i+1$

ถ้า $x = i+1$ จะเห็นได้ชัดว่า $l_{i+1}(x) = f(x)$

ดังนั้นจะพิจารณา x เมื่อ $x < i+1$

โดย Mean Value Theorem จะมี $c_1 \in (i+1, i+2)$

ซึ่งทำให้ $$f'(c_1) = \frac{f(i+2)-f(i+1)}{(i+2)-(i+1)}$$

ดังนั้น $$\begin{aligned} l_{i+1}(x) - f(x) &= f'(c_1)\{x-(i+1)\}+f(i+1)-f(x) \\ &= f'(c_1)\{x-(i+1)\} + \\ &\quad \frac{f(i+1)-f(x)}{(i+1)-x}\{(i+1)-x\} \end{aligned} \qquad (2)$$

และโดย Mean Value Theorem จะมี $c_2 \in (x, i+1)$

ซึ่งทำให้ $$f'(c_2) = \frac{f(i+1)-f(x)}{(i+1)-x}$$

จาก (2) ดังนั้น

$$\begin{aligned} l_{i+1}(x) - f(x) &= f'(c_1)\{x-(i+1)\} - f'(c_2)\{x-(i+1)\} \\ &= (f'(c_1) - f'(c_2))\{x-(i+1)\} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $c_1 > c_2$ เพราะว่า $c_1 > i+1$ และ $i+1 > c_2$

จากที่กำหนดให้ $f''(x) \leq 0$ จะได้ว่า $f'(c_1) \leq f'(c_2)$

(โดยทฤษฎี 2.4.3(3))

ทำให้ $f'(c_1) - f'(c_2) \leq 0$

เนื่องจาก $x < i + 1$ ดังนั้น $x - (i + 1) < 0$

จะได้ว่า $l_{i+1}(x) - f(x) \geq 0$ เมื่อ $x \leq i + 1$

นั่นคือ $l_{i+1}(x) \geq f(x)$ เมื่อ $x \leq i + 1$

<u>ตอนที่</u> 2 ให้ $l_i(x)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นที่มีกราฟผ่านจุด $(i, f(i))$

และ $(i + 1 , f(i + 1))$

$$\text{ดังนั้น } l_i(x) = \frac{f(i+1) - f(i)}{i + 1 - i}(x-i) + f(i) \qquad (4)$$

จะแสดงว่า $f(x) \geq l_i(x)$ เมื่อ $i \leq x \leq i + 1$

ถ้า $x = i$ หรือ $i + 1$ จะเห็นได้ชัดว่า $f(x) \geq l_i(x)$

ดังนั้นจะพิจารณา x เมื่อ $i < x < i + 1$

โดย Mean Value Theorem จะมี $c_1 \in (x, i + 1)$

และ $c_2 \in (i, x)$

$$\text{ซึ่งทำให้ } f'(c_1) = \frac{f(i + 1) - f(x)}{(i + 1) - x}$$

$$\text{และ } f'(c_2) = \frac{f(x) - f(i)}{x - i}$$

เนื่องจาก $c_1 > c_2$ เพราะว่า $c_1 > x$ และ $x > c_2$

จากที่กำหนดให้ $f''(x) \leq 0$ จะได้ว่า $f'(c_2) \geq f'(c_1)$

(โดยทฤษฎี 2.4.3(3))

ดังนั้น $\dfrac{f(x) - f(i)}{x - i} \geq \dfrac{f(i + 1) - f(x)}{(i + 1) - x}$

$$\{f(x) - f(i)\}((i + 1) - x) \geq \{f(i+1) - f(x)\}(x - i)$$

$$if(x)+f(x)-xf(x)-if(i)-f(i)+xf(i) \geq xf(i+1)-if(i+1)-xf(x)+ if(x)$$

$$f(x) + xf(i) - if(i) - f(i) \geq f(i + 1)(x - i)$$

$$f(x) + f(i)(x - i) - f(i) \geq f(i + 1)(x - i)$$

$$f(x) \geq f(i+1)(x-i) - f(i)(x-i) + f(i)$$

$$f(x) \geq \{f(i+1) - f(i)\}(x-i)+f(i)$$

จาก (4) นั่นคือ $f(x) \geq l_i(x)$ เมื่อ $i \leq x \leq i+1$

ตอนที่ 3 จะแสดงว่า $\int_1^n f(x)dx - T_n \leq \dfrac{f(2) - f(1)}{2}$

จากตอนที่ 1 และ 2 จะได้ว่า $l_{i+1}(x) \geq f(x) \geq l_i(x)$

เมื่อ $i \leq x \leq i+1$

โดยทฤษฎี 2.4.9 จะได้ว่า

$$\int_i^{i+1} l_{i+1}(x)dx \geq \int_i^{i+1} f(x)dx \geq \int_i^{i+1} l_i(x)dx$$

ดังนั้น

$$\int_i^{i+1} l_{i+1}(x)dx - \int_i^{i+1} l_i(x)dx \geq \int_i^{i+1} f(x)dx - \int_i^{i+1} l_i(x)dx \geq 0 \quad (5)$$

เนื่องจาก $\int_i^{i+1} l_{i+1}(x)dx = \frac{1}{2}\{3f(i+1) - f(i+2)\}$

และ $\int_i^{i+1} l_i(x)\, dx = \frac{1}{2}\{f(i+1) + f(i)\}$

ให้ $\triangle_i = \int_i^{i+1} l_{i+1}(x)dx - \int_i^{i+1} l_i(x)dx$

ดังนั้น $\triangle_i = \frac{1}{2}\{f(i+1) - f(i) - (f(i+2) - f(i+1))\}$

จาก (1) $R_i = \int_i^{i+1} f(x)dx - \frac{f(i+1) + f(i)}{2}$

ดังนั้น $R_i = \int_i^{i+1} f(x)dx - \int_i^{i+1} l_i(x)dx$

จาก (5) จะได้ว่า $\triangle_i \geq R_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots, n-1$

ให้ T_n เป็นค่าของพื้นที่ ที่ได้จากการประมาณโดยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูบนจุด

$1,2,\ldots, n$ ของ $\int_1^n f(x)\, dx$ โดยทฤษฎี 2.4.10 และนิยาม 2.4.11

จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{n-1} R_i = \int_1^n f(x)\, dx - T_n$

เนื่องจาก $\sum_{i=1}^{n-1} \triangle_i = \frac{1}{2}\{f(2) - f(1) - (f(n+1) - f(n))\}$

ดังนั้น $\int_1^n f(x)dx - T_n \leq \frac{1}{2}\{f(2) - f(1) - (f(n+1) - f(n))\}$

จากที่กำหนดให้ $f'(x) \geq 0$ และ $n + 1 > n$ เมื่อ $n \in I^+$

โดยทฤษฎี 2.4.3 จะได้ว่า $f(n+1) \geq f(n)$

ดังนั้น $f(n+1) - f(n) \geq 0$

และ $f(2) - f(1) \geq 0$

ทำให้ได้ว่า $f(2) - f(1) \geq f(2) - f(1) - (f(n+1) - f(n))$

นั่นคือ $\int_1^n f(x)dx - T_n \leq \frac{f(2) - f(1)}{2}$ □

ทฤษฎี 4.1.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามสำหรับ $x \geq 1$ ซึ่ง $f(x) \geq 0$, $f'(x) \geq 0$ และ $f''(x) \leq 0$

ให้ $1 = a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ เป็นลำดับอนันต์

ถ้าลำดับของ $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots$ มีขอบเขตบนเท่ากับ b

แล้วจะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx - \frac{f(a_{n+1})+f(a_n)}{2}.(a_{n+1} - a_n) \right]$$

เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า และผลรวมมีค่ามากที่สุดเท่ากับ $\frac{b^2 f'(1)}{2}$

พิสูจน์ ให้ A_n เป็นพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชัน f

เมื่อ $a_n \leq x \leq a_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

ดังนั้น $A_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx$

และให้ t_n เป็นพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมูที่ใช้ประมาณค่า A_n

ทำให้ $t_n = \frac{f(a_{n+1}) + f(a_n)}{2}.(a_{n+1} - a_n)$

ถ้าให้ R_n เป็นพื้นที่คลาดเคลื่อนระหว่าง A_n และ t_n

จะได้ว่า $$R_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx - \frac{f(a_{n+1})+f(a_n)}{2}\cdot(a_{n+1}-a_n) \qquad (1)$$

ให้ $l_n(x)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นที่มีกราฟผ่านจุด $(a_n, f(a_n))$

และ $(a_{n+1}, f(a_{n+1}))$

และ $l_{n+1}(x)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นที่มีกราฟผ่านจุด $(a_{n+1}, f(a_{n+1}))$

และ $(a_{n+2}, f(a_{n+2}))$ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎี 4.1.1 ตอนที่ 1

และตอนที่ 2

ทำให้ได้ว่า $l_{n+1}(x) \geq f(x) \geq l_n(x)$ เมื่อ $a_n \leq x \leq a_{n+1}$

โดยทฤษฎี 2.4.9 จะได้ว่า

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} l_{n+1}(x)\,dx \geq \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx \geq \int_{a_n}^{a_{n+1}} l_n(x)\,dx$$

ดังนั้น $$\int_{a_n}^{a_{n+1}} l_{n+1}(x)\,dx - \int_{a_n}^{a_{n+1}} l_n(x)\,dx$$

$$\geq \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx - \int_{a_n}^{a_{n+1}} l_n(x)\,dx \geq 0 \qquad (2)$$

เนื่องจาก

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} l_{n+1}(x)\,dx = \frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)\left\{ \frac{f(a_{n+2})-f(a_{n+1})}{a_{n+2}-a_{n+1}}\cdot(a_n-a_{n+1})+2f(a_{n+1}) \right\}$$

และ $$\int_{a_n}^{a_{n+1}} l_n(x)\,dx = \frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)\{f(a_{n+1})+f(a_n)\}$$

ให้ $$\triangle_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} l_{n+1}(x)\,dx - \int_{a_n}^{a_{n+1}} l_n(x)\,dx$$

จะได้ว่า

$$\triangle_n = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)^2 \{\frac{f(a_{n+1})-f(a_n)}{a_{n+1} - a_n} - \frac{f(a_{n+2})-f(a_{n+1})}{a_{n+2} - a_{n+1}}\}$$

จาก (1)

$$R_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx - \frac{f(a_{n+1})+ f(a_n)}{2}.(a_{n+1} - a_n)$$

ดังนั้น

$$R_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx - \int_{a_n}^{a_{n+1}} l_n(x)dx$$

จาก (2) จะได้ว่า $R_n \leq \triangle_n$ สำหรับ $n = 1,2,3,\ldots$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} R_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \triangle_n$

เนื่องจาก
$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx - \frac{f(a_{n+1})-f(a_n)}{2}.(a_{n+1}-a_n)\right] \quad \ldots(3)$$

และ
$$\sum_{n=1}^{\infty} \triangle_n = \frac{1}{2}\left[(a_2 - a_1)^2\{\frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2 - a_1} - \frac{f(a_3)-f(a_2)}{a_3 - a_2}\} + (a_3 - a_2)^2\{\frac{f(a_3)-f(a_2)}{a_3 - a_2} - \frac{f(a_4)-f(a_3)}{a_4 - a_3}\} + \ldots\right]$$

จากที่กำหนดให้ $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, ... มีขอบเขตบนเท่ากับ b

ดังนั้น $\quad (a_{n+1} - a_n)^2 \{ \dfrac{f(a_{n+1}) - f(a_n)}{a_{n+1} - a_n} - \dfrac{f(a_{n+2}) - f(a_{n+1})}{a_{n+2} - a_{n+1}} \}$

$$\leq b^2 \{ \frac{f(a_{n+1}) - f(a_n)}{a_{n+1} - a_n} - \frac{f(a_{n+2}) - f(a_{n+1})}{a_{n+2} - a_{n+1}} \}$$

ทำให้ได้ว่า $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \triangle_n \leq \frac{1}{2} b^2 \{ \dfrac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} \}$

โดย Mean Value Theorem จะมี $c \in (a_1, a_2)$ ซึ่งทำให้

$$f'(c) = \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \triangle_n \leq \frac{1}{2} b^2 f'(c)$$

เนื่องจาก $a_1 = 1 < c$ และ $f''(x) \leq 0$

โดยทฤษฎี 2.4.3 จะได้ว่า $f'(c) \leq f'(1)$

ดังนั้น $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \triangle_n \leq \dfrac{b^2 f'(1)}{2}$

จาก(3) ทำให้ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx - \dfrac{f(a_{n+1}) + f(a_n)}{2} \cdot (a_{n+1} - a_n) \right]$

$$\leq \frac{b^2 f'(1)}{2}$$

โดยทฤษฎี 2.2.2 จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx - \frac{f(a_{n+1}) + f(a_n)}{2} (a_{n+1} - a_n) \right]$$

เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า และผลรวมมีค่ามากที่สุดเท่ากับ $\dfrac{b^2 f'(1)}{2}$

$\square$

4.2 การศึกษาในหัวข้อนี้ เพื่อขยายเงื่อนไขของฟังก์ชัน f ที่นิยามสำหรับ $x \geq 1$ โดยที่ $f(x) \geq 0$, $f'(x) \geq 0$ และ $f''(x) \leq 0$ ไปเป็นฟังก์ชัน f ที่เป็นฟังก์ชันโค้งเว้า และมีค่าไม่ลดลง โดยที่ $f(x) \geq 0$ เมื่อ $x \geq 1$ แล้วแสดงให้เห็นว่า ฟังก์ชันตามเงื่อนไขใหม่ครอบคลุมเงื่อนไขของฟังก์ชันเดิม และผลรวมของพื้นที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดจากการประมาณโดยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู บนจุด $1, 2, \ldots, n$ ของ $\int_1^n f(x)dx$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันตามเงื่อนไขใหม่ ยังคงหาค่าได้ และมีขอบเขตบนเป็น $\dfrac{f(2) - f(1)}{2}$ ตามเดิม

<u>นิยาม</u> 4.2.1 จะเรียก $f : [a, b] \dashrightarrow R$ ว่าเป็น <u>ฟังก์ชันโค้งเว้า</u> (concave function) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง λ , μ โดยที่ $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ และ $\lambda + \mu = 1$

จะได้ว่า $f(\lambda x + \mu y) \geq \lambda f(x) + \mu f(y)$

สำหรับ $a < x < y < b$

<u>หมายเหตุ</u> ค่าของ $\lambda x + \mu y$ ในนิยาม 4.2.1 จะอยู่ในช่วง $[a,b]$ เสมอ ซึ่งจะแสดงได้ดังต่อไปนี้

สำหรับกรณี $\lambda = 1, \mu = 0$ หรือ $\lambda = 0$, $\mu = 1$

จะเห็นได้ชัดว่า $\lambda x + \mu y \in [a, b]$

พิจารณากรณี $\lambda > 0$ และ $\mu > 0$

เนื่องจาก $a < x < b$ และ $a < y < b$

ดังนั้น $\lambda a < \lambda x < \lambda b$ และ $\mu a < \mu y < \mu b$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$

ทำให้ได้ว่า $\lambda a + \mu a < \lambda x + \mu y < \lambda b + \mu b$

$$(\lambda + \mu)a < \lambda x + \mu y < (\lambda + \mu)b$$

$$a < \lambda x + \mu y < b \text{ , } \lambda + \mu = 1$$

นั่นคือ $\lambda x + \mu y \in [a, b]$

และจะแสดงให้เห็นว่าถ้า $\lambda > 0, \mu > 0$ และ $\lambda+\mu = 1$ แล้วจะได้ว่า

$x < \lambda x + \mu y < y$ สำหรับ $a < x < y < b$

$\mu x < \mu y$, $\mu > 0$ และ $\lambda x < xy$, $\lambda > 0$

$(1 - \lambda)x < \mu y$ $\qquad \lambda x < (1 - \mu)y$

$x < \lambda x + \mu y$ $\qquad \lambda x + \mu y < y$

ดังนั้น $x < \lambda x + \mu y < y$

ทฤษฎีต่อไปจะแสดงให้เห็นว่า ฟังก์ชัน $f : [a,b] \dashrightarrow R$ ซึ่งมีเงื่อนไขว่า ถ้า $f''(x) \leq 0$ สำหรับทุกๆ $x \in (a,b)$ แล้วจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันโค้งเว้า ตามนิยาม 4.2.1

<u>ทฤษฎี</u> 4.2.1 ให้ $f : [a, b] \dashrightarrow R$ ถ้า $f''(x) \leq 0$ สำหรับทุกๆ $x \in (a, b)$ แล้วจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันโค้งเว้า

<u>พิสูจน์</u> ให้ $a < x < y < b$ และ $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ โดยที่ $\lambda + \mu = 1$ ถ้า $\lambda = 0$, $\mu = 1$ หรือ $\lambda = 1, \mu = 0$ จะเห็นได้ชัดว่า $f(\lambda x + \mu y) \geq \lambda f(x) + \mu f(y)$ เป็นจริง

พิจารณากรณี $\lambda > 0$, $\mu > 0$ โดยที่ $\lambda + \mu = 1$

จากหมายเหตุข้างบนจะได้ว่า

$$x < \lambda x + \mu y < y$$

โดย Mean Value Theorem

จะมี c_1 โดยที่ $x < c_1 < \lambda x + \mu y$ ซึ่งทำให้

$$f'(c_1) = \frac{f(\lambda x + \mu y) - f(x)}{(\lambda x + \mu y) - x}$$

$$= \frac{f(\lambda x + \mu y) - f(x)}{\mu y - x + \lambda x}$$

$$= \frac{f(\lambda x + \mu y) - f(x)}{\mu y - (1 - \lambda)x}$$

เนื่องจาก $\lambda + \mu = 1$ ดังนั้น $\mu = 1 - \lambda$

จะได้ว่า $f'(c_1) = \dfrac{f(\lambda x + \mu y) - f(x)}{\mu(y - x)}$ (1)

โดย Mean Value Theorem

จะมี c_2 โดยที่ $\lambda x + \mu y < c_2 < y$ ซึ่งทำให้

$$f'(c_2) = \frac{f(y) - f(\lambda x + \mu y)}{y - (\lambda x + \mu y)}$$

$$= \frac{f(y) - f(\lambda x + \mu y)}{y - \mu y - \lambda x}$$

$$= \frac{f(y) - f(\lambda x + \mu y)}{(1 - \mu)y - \lambda x}$$

เนื่องจาก $\lambda + \mu = 1$ ดังนั้น $\lambda = 1 - \mu$

จะได้ว่า $f'(c_2) = \dfrac{f(y) - f(\lambda x + \mu y)}{\lambda(y - x)}$ (2)

เพราะว่า $c_1 < \lambda x + \mu y < c_2$

จึงทำให้ $c_1 < c_2$ และ $f''(x) \leq 0$

โดยทฤษฎี 2.4.3 จะได้ว่า $f'(c_1) \geq f'(c_2)$

จาก (1) และ (2)

ดังนั้น $\dfrac{f(\lambda x + \mu y) - f(x)}{\mu(y - x)} \geq \dfrac{f(y) - f(\lambda x + \mu y)}{\lambda(y - x)}$

$$\lambda f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) \geq \mu f(y) - \mu f(\lambda x + \mu y)$$

$$(\lambda + \mu) f(\lambda x + \mu y) \geq \lambda f(x) + \mu f(y)$$

เนื่องจาก $\lambda + \mu = 1$

ทำให้ได้ว่า $f(\lambda x + \mu y) \geq \lambda f(x) + \mu f(y)$

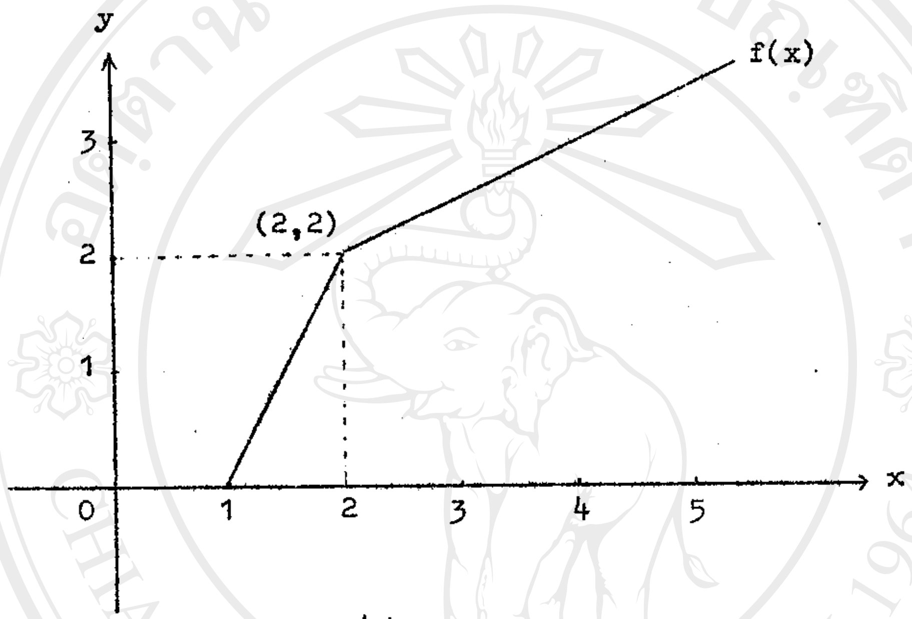
นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันโค้งเว้าบน $[a, b]$ □

<u>หมายเหตุ</u> บทกลับของทฤษฎี 4.2.1 ไม่เป็นจริงดังตัวอย่างต่อไปนี้

__ตัวอย่าง__ 4.2.1 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{เมื่อ } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x}{2} + 1 & \text{เมื่อ } 2 < x \end{cases}$

จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันโค้งเว้า และ $f''(2)$ หาค่าไม่ได้

__วิธีทำ__



รูป 4.2.1

(1) ให้ $1 \leq x_1 < x_2 \leq 2$ และจำนวนจริง λ , μ

โดยที่ $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ และ $\lambda + \mu = 1$

จะแสดงว่า $f(\lambda x_1 + \mu x_2) \geq \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)$

เนื่องจาก $1 \leq \lambda x_1 + \mu x_2 \leq 2$

ดังนั้น $f(\lambda x_1 + \mu x_2) = 2(\lambda x_1 + \mu x_2) - 2$

และ $\lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = \lambda(2x_1 - 2) + \mu(2x_2 - 2)$

$= 2(\lambda x_1 + \mu x_2) - 2$

ทำให้ได้ว่า $f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)$

(2) ให้ $2 < x_3 < x_4$ ในทำนองเดียวกับ (1) จะได้ว่า

$$f(\lambda x_3 + \mu x_4) = \lambda f(x_3) + \mu f(x_4)$$

(3) ให้ $x_5 < 2 < x_6$ จะได้ว่า $\lambda x_5 + \mu x_6 \leq 2$ หรือ $2 < \lambda x_5 + \mu x_6$

ถ้า $\lambda x_5 + \mu x_6 \leq 2$

จะได้ว่า $f(\lambda x_5 + \mu x_6) = 2(\lambda x_5 + \mu x_6) - 2$ (1)

และ $\lambda f(x_5) + \mu f(x_6) = \lambda(2x_5 - 2) + \mu(\frac{x_6}{2} + 1)$

$$= 2\lambda x_5 - 2\lambda + \mu\frac{x_6}{2} + \mu \quad (2)$$

(1)-(2) $f(\lambda x_5+\mu x_6)-(\lambda f(x_5)+\mu f(x_6)) = 2(\lambda x_5+\mu x_6) - 2 - 2\lambda x_5 - 2\lambda$

$$+ \mu\frac{x_6}{2} + \mu$$

$$= 2\lambda x_5+2\mu x_6 - 2 - 2\lambda x_5 - 2\lambda$$

$$+ \mu\frac{x_6}{2} + \mu$$

$$= \frac{4\mu x_6 - 4\mu - \mu x_6 - 2\mu}{2}$$

$$= \frac{3\mu(x_6 - 2)}{2}$$

เนื่องจาก $\mu \geq 0$ และ $x_6 > 2$

ดังนั้น $\frac{3\mu(x_6 - 2)}{2} \geq 0$

ทำให้ได้ว่า $f(\lambda x_5 + \mu x_6) \geq \lambda f(x_5) + \mu f(x_6)$

ถ้า $2 < \lambda x_5 + \mu x_6$

จะได้ว่า $f(\lambda x_5 + \mu x_6) = \dfrac{\lambda x_5 + \mu x_6}{2} + 1$ (3)

จาก (2) $\lambda f(x_5) + \mu f(x_6) = 2\lambda x_5 - 2\lambda + \mu \dfrac{x_6}{2} + \mu$ (4)

(3)-(4), $f(\lambda x_5+\mu x_6)-(\lambda f(x_5)+\mu f(x_6))$

$$= \frac{\lambda x_5+\mu x_6+2-4\lambda x_5+4\lambda-\mu x_6-2\mu}{2}$$

$$= \frac{6\lambda - 3\lambda x_5}{2}$$

$$= \frac{3\lambda(2 - x_5)}{2}$$

เนื่องจาก $\lambda \geq 0$ และ $x_5 < 2$

ดังนั้น $\dfrac{3\lambda(2 - x_5)}{2} \geq 0$

ทำให้ได้ว่า $f(\lambda x_5 + \mu x_6) \geq \lambda f(x_5) + \mu f(x_6)$

จาก (1),(2) และ (3) แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันโค้งเว้า

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2(x - 2)}{x - 2} = 2$

และ $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{2}\dfrac{(x - 2)}{x - 2} = \dfrac{1}{2}$

แสดงว่า $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ หาค่าไม่ได้

นั่นคือ $f'(2)$ หาค่าไม่ได้ ทำให้ $f''(2)$ หาค่าไม่ได้

<u>ทฤษฎี</u> 4.2.2 ถ้า $f : [a, b] \dashrightarrow R$ เป็นฟังก์ชันโค้งเว้า

และ $a < s < t < u < b$

แล้วจะได้ว่า

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \geq \frac{f(u) - f(s)}{u - s} \geq \frac{f(u) - f(t)}{u - t}$$

<u>พิสูจน์</u> จากที่กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันโค้งเว้า และ $s < t < u$

ให้ $\lambda = \frac{u - t}{u - s}$ และ $\mu = \frac{t - s}{u - s}$

จะเห็นได้ชัดว่า $\lambda > 0$, $\mu > 0$ และ $\lambda + \mu = 1$

เนื่องจาก $\lambda s + \mu u = t$ และ f เป็นฟังก์ชันโค้งเว้า

โดยนิยาม 4.2.1 จะได้ว่า

$$f(\lambda s + \mu u) \geq \lambda f(s) + \mu f(u)$$

$$f(t) \geq (1 - \mu) f(s) + \mu f(u)$$

$$f(t) \geq f(s) - \mu f(s) + \mu f(u)$$

$$f(t) - f(s) \geq \mu(f(u) - f(s)) \qquad (1)$$

แทนค่า $\mu = \frac{t - s}{u - s}$ ลงใน (1)

จะได้ว่า $f(t) - f(s) \geq \frac{t - s}{u - s}(f(u) - f(s))$

ดังนั้น $\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \geq \frac{f(u) - f(s)}{u - s}$ (2)

เนื่องจาก $f(t) \geq \lambda f(s) + \mu f(u)$

$$f(t) \geq \lambda f(s) + (1 - \lambda) f(u)$$

$$f(t) \geq \lambda f(s) + f(u) - \lambda f(u)$$

$$\lambda(f(u) - f(s)) \geq f(u) - f(t) \qquad (3)$$

แทนค่า $\lambda = \dfrac{u - t}{u - s}$ ลงใน (3)

จะได้ว่า $\dfrac{u - t}{u - s}(f(u) - f(s)) \geq f(u) - f(t)$

ดังนั้น $$\frac{f(u) - f(s)}{u - s} \geq \frac{f(u) - f(t)}{u - t} \qquad (4)$$

จาก (2) และ (4) จะได้ว่า

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \geq \frac{f(u) - f(s)}{u - s} \geq \frac{f(u) - f(t)}{u - t} \quad \square$$

<u>ข้อสังเกต</u> (1) $\dfrac{f(t) - f(s)}{t - s}$ คือความชัน (slope) ของเส้นตรง ที่ผ่านจุด $(s, f(s))$ และ $(t, f(t))$

(2) โดยผลของทฤษฎี 4.2.2 เมื่อ $a < s < t < u < b$ จะได้ว่า ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(s, f(s))$, $(t, f(t))$ ผ่านจุด $(s, f(s))$, $(u, f(u))$ และผ่านจุด $(t, f(t), (u, f(u))$ มีค่าลดลงตามลำดับ

(3) จากทฤษฎี 4.2.2 ถ้าเพิ่มเงื่อนไขว่า f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าไม่ลดลง แล้ว ความชันของเส้นตรงในข้อ (2) จะมีค่ามากกว่า หรือเท่ากับศูนย์

<u>ทฤษฎี</u> 4.2.3 ถ้า $f : [a, b] \longrightarrow R$ เป็นฟังก์ชันโค้งเว้า แล้วจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง บน (a, b)

<u>พิสูจน์</u> (1) ให้ $s \in (a, b)$ ดังนั้นจะมีจำนวนจริง r, t

ซึ่ง $a < r < s < t < b$

จะมีจำนวนจริง u โดยที่ $a < r < s < u < t < b$

โดยทฤษฎี 4.2.2 จะได้ว่า

$$\frac{f(s) - f(r)}{s - r} \geq \frac{f(u) - f(s)}{u - s} \geq \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

ดังนั้น

$$(u - s)\frac{f(s) - f(r)}{s - r} \geq f(u) - f(s) \geq (u - s)\frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{u \to s^+} u - s = 0$

ทำให้

$$\lim_{u \to s^+} (u - s)\frac{f(s) - f(r)}{s - r} = 0 = \lim_{u \to s^+} (u - s)\frac{f(t)-f(s)}{t - s}$$

โดยทฤษฎี 2.3.6 จะได้ว่า

$$\lim_{u \to s^+} f(u) - f(s) = 0$$

ดังนั้น $\lim\limits_{u \to s^+} f(u) = f(s)$

(2) ให้ $s \in (a, b)$ ดังนั้นจะมีจำนวนจริง r, t

ซึ่ง $a < r < s < t < b$

จะมีจำนวนจริง u โดยที่ $a < r < u < s < t < b$

โดยทฤษฎี 4.2.2 จะได้ว่า

$$\frac{f(s) - f(r)}{s - r} \geq \frac{f(u) - f(s)}{u - s} \geq \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

ดังนั้น

$$(u - s).\frac{f(s) - f(r)}{s - r} \geq f(u) - f(s) \geq (u - s).\frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{u \to s^-} u - s = 0$

ทำให้

$$\lim_{u \to s^-} (u - s).\frac{f(s) - f(r)}{s - r} = 0 = \lim_{u \to s^-} (u - s).\frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

โดยทฤษฎี 2.3.6 จะได้ว่า

$$\lim_{u \to s^-} f(u) - f(s) = 0$$

ดังนั้น $$\lim_{u \to s^-} f(u) = f(s)$$

โดยทฤษฎี 2.3.3 จะได้ว่า

$$\lim_{u \to s} f(u) = f(s)$$

โดยทฤษฎี 2.3.8 จะได้ว่า f มีความต่อเนื่องที่ s

ดังนั้น f มีความต่อเนื่องบน (a, b) □

<u>ข้อสังเกต</u> โดยทฤษฎี 4.2.3 และทฤษฎี 2.4.8 ทำให้ได้ว่า

ถ้า f เป็นฟังก์ชันโค้งเว้าบน [a, b] แล้วจะได้ว่า f มีรีมานน์อินทิกรัลบน [a, b]

<u>ทฤษฎี</u> 4.2.4 ให้ $f : [a, b] \dashrightarrow R$ เป็นฟังก์ชันโค้งเว้า

และ $a < s < t < b$

ถ้า $l(x)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นที่มีกราฟผ่านจุด $(s, f(s))$

และ $(t, f(t))$

แล้วจะได้ว่า $l(x) \geq f(x)$ เมื่อ $a \leq x \leq s$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก $l(x)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นที่มีกราฟผ่านจุด $(s, f(s))$

และ $(t, f(t))$

ดังนั้น $l(x) = \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s}(x - s) + f(s)$

ถ้า $x = a$ หรือ s จะเห็นได้ชัดว่า $l(x) \geq f(x)$ เป็นจริง

สมมุติว่า $l(x) < f(x)$ สำหรับ x บางตัว เมื่อ $x \in (a,s)$

ดังนั้น $\dfrac{f(t) - f(s)}{t - s}(x - s) + f(s) < f(x)$

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s}(x - s) < f(x) - f(s) \quad (1)$$

เนื่องจาก $x < s$ จะได้ว่า $x - s < 0$

ดังนั้น $\dfrac{1}{x - s} < 0$

คูณ (1) ด้วย $\dfrac{1}{x - s}$ จะได้ว่า

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} > \frac{f(x) - f(s)}{x - s} \quad (2)$$

เนื่องจาก $a < x < s < t$ และโดยทฤษฎี 4.2.2

จะได้ว่า $\dfrac{f(x) - f(s)}{x - s} \geq \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s}$ ซึ่งขัดแย้งกับ (2)

นั่นคือ ที่สมมุติให้ $l(x) < f(x)$ สำหรับ x บางตัวเมื่อ $x \in (a,s)$ ไม่จริง

ดังนั้น $l(x) \geq f(x)$ เมื่อ $a \leq x \leq s$ □

<u>ทฤษฎี</u> 4.2.5 ให้ f เป็นฟังก์ชันโค้งเว้า และมีค่าไม่ลดลง โดยที่ $f(x) \geq 0$ เมื่อ $x \geq 1$ ถ้า T_n เมื่อ $n \in I^+$ เป็นค่าของพื้นที่ที่ได้จากการประมาณ โดยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู บนจุด $1, 2, 3, \ldots, n$ ของ $\int_1^n f(x)\,dx$ แล้วจะได้ว่า

$$\int_1^n f(x)\,dx - T_n \leq \frac{f(2) - f(1)}{2}$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ A_i เป็นพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ $i \leq x \leq i+1$, $i = n-1, n-2, \ldots, 1$

ดังนั้น $A_i = \int_i^{i+1} f(x)dx$

และให้ t_i เป็นพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมูที่ใช้ประมาณค่า A_i

ทำให้ $t_i = \dfrac{f(i+1) + f(i)}{2}$

ถ้าให้ R_i เป็นพื้นที่คลาดเคลื่อนระหว่าง A_i และ t_i

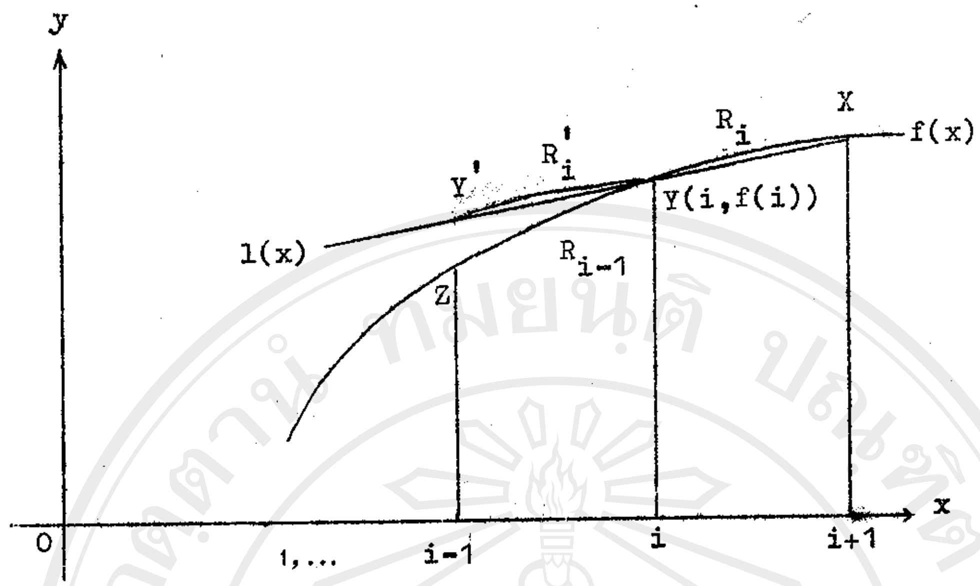
จะได้ว่า $R_i = \int_i^{i+1} f(x)\,dx - \dfrac{f(i+1) + f(i)}{2}$

ดังนั้น $$\sum_{i=1}^{n-1} R_i = \sum_{i=1}^{n-1} \left[\int_i^{i+1} f(x)dx - \frac{f(i+1) + f(i)}{2} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \int_i^{i+1} f(x)dx - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f(i+1) + f(i)}{2}$$

โดยทฤษฎี 2.4.10 และนิยาม 2.4.11 จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{n-1} R_i = \int_1^n f(x)dx - T_n$$



รูป 4.2.2

ให้ J_i เป็นการเลื่อนทางขนานของ R_i เมื่อ $i = n-1, n-2, \ldots, 2$

โดยที่ $J_i((i + 1, f(i + 1))) = (i, f(i))$

จากรูป 4.2.4 ให้จุด X, Y, Z มีพิกัดเป็น $(i + 1, f(i + 1))$, $(i, f(i))$ และ $(i - 1, f(i - 1))$ ตามลำดับ

จะได้ว่า $J_i(X) = X' = Y$ และ $J_i(Y) = Y'$

โดยนิยาม 2.1.5 ทำให้ได้ว่า

จุด X, Y และ Y' อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และพื้นที่ R_i ถูกส่งไปยัง R_i' บนเส้นตรง YY'

ให้ $l(x)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นที่มีกราฟผ่านจุด X, Y, Y'

โดยอาศัยทฤษฎี 4.2.4 จะได้ว่า $l(x) \geq f(x)$

สำหรับ $i - 1 \leq x \leq i$

ดังนั้นพื้นที่คลาดเคลื่อน R_i' และพื้นที่ R_{i-1} จะมีจุด $(i, f(i))$ เป็นจุดร่วมกันเพียงจุดเดียว

โดยใช้การเลื่อนทางขนาน ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎี 3.1.1 จะได้ว่าพื้นที่คลาดเคลื่อนทั้งหมด มีจุด $(2, f(2))$ เป็นจุดร่วมกัน เพียงจุดเดียว โดยไม่มีพื้นที่ส่วนอื่นร่วมกัน และพื้นที่คลาดเคลื่อนทั้งหมด อยู่ในพื้นที่สามเหลี่ยมที่จุดยอดมีพิกัดเป็น $(1, f(1))$, $(1, f(2))$ และ $(2, f(2))$ ซึ่งมีพื้นที่เท่ากับ $\frac{f(2) - f(1)}{2}$

ทำให้ได้ว่า

$$\int_1^n f(x)\,dx - T_n \leq \frac{f(2) - f(1)}{2} \qquad \square$$

<u>ทฤษฎี</u> 4.2.6 ให้ f เป็นฟังก์ชันโค้งเว้า และมีค่าไม่ลดลง โดยที่ $f(x) \geq 0$ เมื่อ $x \geq 1$ และให้ $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots$ เป็นลำดับอนันต์ ถ้าลำดับของ $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots$ มีขอบเขตบนเท่ากับ b และ $f'(1)$ หาค่าได้ แล้วจะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx - \frac{f(a_{n+1}) + f(a_n)}{2} \cdot (a_{n+1} - a_n)\right]$$

เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า และผลรวมมีค่ามากที่สุดเท่ากับ $\frac{b^2}{2} f'(1)$

<u>พิสูจน์</u> พิสูจน์ในทำนองเดียวกับการพิสูจน์ทฤษฎี 3.1.2 $\square$