# บทที่ 2

# ความรู้พื้นฐาน

# (Fundamental Concept)

ในบทนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานเฉพาะที่จำเป็น เพื่อนำไปใช้ในการศึกษาในบทต่อไป โดยจะกล่าวถึง นิยาม ทฤษฎี พร้อมกับยกตัวอย่างพอสังเขป สำหรับทฤษฎีต่างๆ ในบทนี้จะไม่แสดงการพิสูจน์ แต่จะสามารถศึกษาดูจากหนังสืออ้างอิงที่ระบุไว้ข้างใต้

หัวข้อที่จะศึกษาในบทนี้คือ

2.1 เมเชอเรเบิลเซต
(Measurable set)

2.2 เมเชอเรเบิลฟังก์ชัน
(Measurable function)

2.3 เมเชอร์ และเมเชอร์สเปซ
(Measure and Measure space)

2.4 อินทิกรัลของนอนเนกาทีฟ เมเชอเรเบิลฟังก์ชัน
(Integral of nonnegative measurable function)

2.5 เลเบกเมเชอร์สเปซ
(Lebesgue measure space)

2.6 เลเบกอินทิกรัลของฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน E ที่ $\mu(E) < \infty$
(Lebesgue Integral of bounded functions on E where $\mu(E) < \infty$)

2.7 เลเบกอินทิกรัลของนอนเนกาทีฟเมเชอเรเบิลฟังก์ชันบนเมเชอเรเบิลเซต E ใดๆ
(Lebesgue Integral of nonnegative measurable functions on arbitrary $E \in M$)

2.8 ลำดับทวีคูณ
(Double sequences)

## 2.1 เมเชอเรเบิลเซต

**นิยาม 2.1.1** เซต (collection) M ของสับเซตของ X จะเรียกว่าเป็น **δ - แอลยีบรา** (δ - algebra) ใน X ถ้า

(1) $X \in M$

(2) ถ้า $A \in M$ แล้ว $A^c \in M$ โดยที่ $A^c$ เป็นคอมพลีเมนต์ของ A เทียบกับ X

(3) ถ้า $A_n \in M$, $\forall n \geq 1$ แล้ว $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in M$ จะเรียกคู่อันดับ (X , M) ซึ่งประกอบด้วยเซต X กับ δ - แอลยีบรา M ใน X ว่า **เมเชอเรเบิลสเปซ** (Measurable space) และ เรียกสมาชิก ใน M ว่า **เมเชอเรเบิลเซต**

**ตัวอย่าง**ของ δ - แอลยีบรา

(1) ให้ X เป็นเซต และ M เป็นเซตของสับเซตทั้งหมดของ X จะได้ว่า M เป็น δ - แอลยีบรา ใน X

(2) ให้ X เป็นเซต และ $M = \{\emptyset , X\}$ จะได้ว่า M เป็น δ - แอลยีบรา ใน X

(3) ให้ $X = \{1, 2, 3, \ldots\}$ และ $M = \{\emptyset, X, \{1,3,5,\ldots\}, \{2,4,6,\ldots\}\}$ จะได้ว่า M เป็น δ - แอลยีบรา ใน X

<u>ข้อสังเกต</u> (1) ถ้า $A_n \in M$ , $\forall n \geq 1$

แล้ว $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in M$

(2) ถ้า $A \in M$ และ $B \in M$

แล้ว $A - B \in M$

<u>พิสูจน์</u> ดู [7] หน้า 10

## 2.2 <u>เมเซอเรเบิลฟังก์ชัน</u> (Measurable function)

<u>ทฤษฎี</u> 2.2.1 ให้ $(X , M)$ เป็นเมเซอเรเบิลสเปซ
และ $R_e = R \cup \{\infty , -\infty\}$ โดยที่ $R$ เป็นเซตของจำนวนจริง และ ให้ $f : X \dashrightarrow R_e$

ดังนั้นข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) $\forall r \in R , \{x/ f(x) > r\} \in M$

(2) $\forall r \in R , \{x/ f(x) \geq r\} \in M$

(3) $\forall r \in R , \{x/ f(x) < r\} \in M$

(4) $\forall r \in R , \{x/ f(x) \leq r\} \in M$

<u>พิสูจน์</u> ดู [3] หน้า 8 - 9

<u>นิยาม</u> 2.2.1 ให้ $(X, M)$ เป็นเมเซอเรเบิลสเปซ
และ $f : X \dashrightarrow R_e$
จะเรียก $f$ ว่า <u>เป็นเมเซอเรเบิลฟังก์ชัน</u>
ถ้า $f$ สอดคล้องเงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่งใน ทฤษฎี 2.2.1

ตัวอย่างของเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน

(1) ฟังก์ชันคงที่ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน
ให้ $(X, M)$ เป็นเมเชอเรเบิลสเปซ
และ $f : X \dashrightarrow R_e$ โดยที่ $f(x) = c$ เมื่อ $c \in R$
แล้วจะได้ว่า $f$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน
เพราะว่า สำหรับ $r \in R$
ถ้า $r \geq c$ แล้ว $\{x / f(x) > r\} = \emptyset \in M$
ถ้า $r < c$ แล้ว $\{x / f(x) > r\} = X \in M$

นิยาม 2.2.2 สำหรับ $E \subseteq X$, ให้ $\chi_E : X \dashrightarrow R$

โดยที่ $\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x \in E \\ 0 & \text{ถ้า } x \notin E \end{cases}$

จะเรียก $\chi_E$ ว่าแคแรคเตอริสติกฟังก์ชัน

(The characteristic function) ของ $E$

ข้อสังเกต $\chi_E$ จะเป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ

$E$ เป็นเมเชอเรเบิลเซต

ทฤษฎี 2.2.2 ให้ $(X, M)$ เป็นเมเชอเรเบิลสเปซ
ถ้า $f : X \dashrightarrow R$ และ $g : X \dashrightarrow R$
เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน , $c$ เป็นจำนวนจริง
จะได้ว่า ฟังก์ชัน $cf$, $f + g$, $fg$, $f^+$, $f^-$, $|f|$
ต่างก็เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน

โดยที่ $f^{+}(x) = \sup \{f(x), 0\}$

$f^{-}(x) = \sup \{-f(x), 0\}$

$|f|(x) = |f(x)|$

<u>พิสูจน์</u> ดู [3] หน้า 8 - 9

<u>ทฤษฎี</u> 2.2.3 ให้ $(X, M)$ เป็นเมเชอเรเบิลสเปซ และ $f_n : X \longrightarrow R_e$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน, $\forall n \geq 1$ ฟังก์ชันต่อไปนี้ต่างก็เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน

(1) $\sup\limits_{n} f_n$

(2) $\inf\limits_{n} f_n$

(3) $\lim\limits_{n \to \infty} \sup f_n$

(4) $\lim\limits_{n \to \infty} \inf f_n$

<u>พิสูจน์</u> ดู [3] หน้า 12

<u>ทฤษฎี</u> 2.2.4 ให้ $(X, M)$ เป็นเมเชอเรเบิลสเปซ ถ้า $f : X \longrightarrow R_e$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน และ $D \in M$ แล้ว จะได้ว่า $f|_D$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน

<u>พิสูจน์</u> ดู [1] หน้า 40

<u>ทฤษฎี</u> 2.2.5 ให้ $(X, M)$ เป็นเมเชอเรเบิลสเปซ
และ $f_n : X \dashrightarrow R_e$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน
ถ้า $(f_n)$ เป็นลำดับที่ลู่เข้า แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{n \to \infty} f_n$$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน

<u>พิสูจน์</u> ดู [3] หน้า 12

## 2.3 <u>เมเชอร์ และเมเชอร์สเปซ</u>

<u>นิยาม</u> 2.3.1 ให้ $(X, M)$ เป็นเมเชอเรเบิลสเปซ
และ $\mu$ เป็นฟังก์ชันจาก $M$ ไปยัง $[0, \infty]$
จะเรียก $\mu$ ว่า เป็น <u>เมเชอร์</u> บน $M$
ถ้า (1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ สำหรับทุกๆลำดับ

$(E_i)$ ของเมเชอเรเบิลเซตที่ $E_j \cap E_k = \emptyset$

เมื่อ $j \neq k$

<u>นิยาม</u> 2.3.2 จะเรียก $(X, M, \mu)$ ว่า <u>เมเชอร์สเปซ</u>
เมื่อ $(X, M)$ เป็นเมเชอเรเบิลสเปซ
และ $\mu$ คือ เมเชอร์ บน $M$

<u>ตัวอย่าง</u> ของเมเชอร์

(1) ให้ $X$ เป็นเซตใดๆ , $X \neq \emptyset$

และ $M$ เป็นเซตของสับเซตทั้งหมดของ $X$

ให้ $\mu : M \dashrightarrow [0, \infty]$

โดยที่ $\mu(E) = 0 \quad \forall E \in M$

จะได้ว่า $\mu$ เป็นเมเชอร์ บน $M$

(2) ให้ $X$ เป็นเซตใดๆ , $X \neq \emptyset$

และ $M$ เป็นเซตของสับเซตทั้งหมดของ $X$

ให้ $\mu : M \dashrightarrow [0, \infty]$

โดยที่ $\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } E = \emptyset \\ \infty & \text{ถ้า } E \in M \text{ และ } E \neq \emptyset \end{cases}$

จะได้ว่า $\mu$ เป็นเมเชอร์ บน $M$

(3) ให้ $X = \{1, 2, 3, \ldots\}$

และ $M$ เป็นเซตของสับเซตทั้งหมดของ $X$

ให้ $\mu : M \dashrightarrow [0, \infty]$

โดยที่ $\mu(E)$ = จำนวนสมาชิกใน $E$ ถ้า $E$ เป็นเซตจำกัด

และ $\mu(E) = \infty$ ถ้า $E$ เป็นเซตอนันต์

แล้วจะได้ว่า $\mu$ เป็นเมเชอร์ บน $M$

<u>ทฤษฎี</u> 2.3.1 ให้ $(X, M, \mu)$ เป็นเมเชอร์สเปซ

แล้ว จะได้ว่า

1. ถ้า $E, F \in M$, $E \subseteq F$ แล้ว $\mu(E) \leq \mu(F)$
2. ถ้า $E, F \in M$, $E \subseteq F$ และ $\mu(E) < \infty$ แล้ว $\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$

<u>พิสูจน์</u> ดู [3] หน้า 21

ทฤษฎี 2.3.2 ให้ $(X, M, \mu)$ เป็นเมเชอร์สเปซ
ถ้า $E_n \in M$, $\forall n \geq 1$
และ $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq \ldots$
แล้ว จะได้ว่า $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n)$

พิสูจน์ ดู [7] หน้า 17

ทฤษฎี 2.3.3 ให้ $(X, M, \mu)$ เป็นเมเชอร์สเปซ
ถ้า $E_n \in M$, $\forall n \geq 1$, $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots E_n \supseteq E_{n+1} \supseteq \ldots$
และ $\mu(E_1) < \infty$
แล้ว จะได้ว่า $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n)$

พิสูจน์ ดู [7] หน้า 17

นิยาม 2.3.3 จะเรียกข้อความว่า เป็นจริงออลโมสท์เอฟเวอรีแวร์ (almost every where) ในเซต $X$ (แทนด้วย a.e.) ถ้าเซตของจุดใน $X$ ซึ่งทำให้ข้อความนั้นไม่จริง เป็นเซตที่มีเมเชอร์เป็นศูนย์

ทฤษฎี 2.3.4 ให้ $(X, M, \mu)$ เป็นเมเชอร์สเปซ
ถ้า $f : X \to R_e$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน
และ $g : X \to R_e$, $g(x) = f(x)$ ออลโมสท์เอฟเวอรีแวร์
แล้ว จะได้ว่า $g$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน

พิสูจน์ ดู [7] หน้า 27

## 2.4 อินทิกรัลของนอนเนกาทีฟเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน

<u>นิยาม</u> 2.4.1 ให้ $(X, M)$ เป็นเมเชอเรเบิลสเปซ
เรียกฟังก์ชัน $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ ว่าเป็น
<u>นอนเนกาทีฟเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน</u>
ถ้า $f$ สอดคล้องเงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่งในทฤษฎี 2.2.1

<u>นิยาม</u> 2.4.2 เรียกฟังก์ชัน $f : E \longrightarrow R$ ว่าเป็น <u>ซิมเปิลฟังก์ชัน</u>
ถ้า $f(E)$ เป็นเซตจำกัด
ให้ $f$ เป็นซิมเปิลฟังก์ชัน ถ้า $c_1, c_2, \ldots, c_n$
เป็นค่าที่แตกต่างกันของ $f$ และ $E_i = \{x / f(x) = c_i\}$

ดังนั้น $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$

<u>นิยาม</u> 2.4.3 ให้ $(X, M, \mu)$ เป็นเมเชอร์สเปซ และ $s : X \longrightarrow R$
เป็นเมเชอเรเบิลซิมเปิลฟังก์ชัน โดยที่ $s = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$
เมื่อ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ เป็นค่าที่แตกต่างกันของ $s$
และ $E_i = \{x / s(x) = c_i\}$
ถ้า $E \in M$, ให้ $\int_E s\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu(E \cap E_i)$

<u>นิยาม</u> 2.4.4 ให้ $(X, M, \mu)$ เป็นเมเชอร์สเปซ
ถ้า $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน
และ $E \in M$ ,

ให้ $\int_E f d\mu = \sup\{ \int_E s d\mu \ / \ 0 \leq s \leq f$ ,

s เป็นเมเชอเรเบิลซิมเปิลฟังก์ชัน $\}$

เรียก $\int_E f d\mu$ ว่า อินทิกรัลของ f บน E

และจะเรียก f ว่า เป็น<u>อินทิเกรเบิลฟังก์ชัน</u> ถ้า $\int_X f d\mu < \infty$

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.1 ให้ $(X, M, \mu)$ เป็นเมเชอร์สเปซ
ให้ f, g เป็นนอนเนกาทีฟเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน
และ $E \in M$ แล้วจะได้ว่า

1. $\int_E cf d\mu = c\int_E f d\mu$ , $\forall c \geq 0$
2. $\int_E (f+g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$
3. $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$ ถ้า $f \leq g$
4. $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$ ถ้า $A, B \in M$ และ $A \subseteq B$
5. $\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$

ถ้า $A, B \in M$ และ $A \cap B = \emptyset$

<u>พิสูจน์</u> ดู [3] หน้า 31-33

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.2 ให้ $(X, M, \mu)$ เป็นเมเชอร์สเปซ
ให้ f เป็นนอนเนกาทีฟเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน
และ $E \in M$ แล้วจะได้ว่า

1. $\int_E f d\mu = 0$ ถ้า $f(x) = 0, \forall x \in E$

2. $\int_E f d\mu = 0$ ถ้า $\mu(E) = 0$

<u>พิสูจน์</u> ดู [7] หน้า 20

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.3 ให้ $(X, M, \mu)$ เป็นเมเชอร์สเปซ
ให้ $f$ เป็นนอนเนกาทีฟเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน
$\{E_i\}$ เป็นลำดับของเมเชอเรเบิลเซตที่ $E_i \cap E_j = \emptyset$ เมื่อ $i \neq j$
ถ้า $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ แล้ว $\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f d\mu$

<u>พิสูจน์</u> ดู [3] หน้า 42

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.4 ฟาทูเลมมา (Fatou's lemma)
ให้ $(X, M, \mu)$ เป็นเมเชอร์สเปซ
ถ้า $f_n : X \to [0, \infty]$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน, $\forall n$
แล้ว จะได้ว่า $\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$

<u>พิสูจน์</u> ดู [7] หน้า 22

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.5 ให้ $(X, M, \mu)$ เป็นเมเชอร์สเปซ
และ $f : X \to [0, \infty]$ เป็นอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน แล้วจะได้ว่า
สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $E \in M$
และ $\mu(E) < \delta$ แล้ว $\int_E f d\mu < \varepsilon$

<u>พิสูจน์</u> ในทำนองเดียวกับการพิสูจน์ใน [1] หน้า 89-90 บรรทัดต่อบรรทัด

## 2.5 เลเบกเมเชอร์สเปซ

<u>นิยาม</u> 2.5.1 ให้ $E \subseteq R$ ,

$$m^*(E) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \ / \ I_n \text{ เป็นช่วงเปิดแบบจำกัด หรือ } \phi \text{ , และ } E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\}$$

เรียก $m^*(E)$ ว่า <u>เลเบกเอาเทอร์เมเชอร์</u> ของ $E$

<u>หมายเหตุ</u> $l(\emptyset) = 0$ และ $l(J) = |$ ผลต่างของจุดปลายของช่วง $J|$

<u>คุณสมบัติของ $m^*$</u>

1. $m^*(\emptyset) = 0$
2. $m^*(\{x_o\}) = 0$ , $\forall x_o \in R$
3. โมโนโทนิซิตี (Monotonicity)

   " ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $m^*(A) \leq m^*(B)$ "
4. ทรานสเลชันอินแวเรียนซ์ (Translation invariance)

   "สำหรับแต่ละ $r \in R$ และ $E \subseteq R$ แล้วจะได้ว่า

   $m^*(E + R) = m^*(E)$"
5. เคาเทเบิลสับแอดดิติวิตี (Countable subadditivity)

   " $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$ "

<u>พิสูจน์</u> ดู [1] หน้า 3-7

<u>นิยาม</u> 2.5.2 จะเรียกสับเซต E ของ R ว่าเป็น <u>เลเบกเมเชอเรเบิลเซต</u> (Lebesgue measurable set)
ถ้าสำหรับทุก $A \subseteq R$ จะได้ว่า

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

โดยที่ $E^c$ เป็นคอมพลีเมนต์ของ E เทียบกับ R
และเรียก E ว่าเป็น <u>นอนเลเบกเมเชอเรเบิลเซต</u> ถ้า E ไม่เป็น เลเบกเมเชอเรเบิลเซต

<u>ทฤษฎี</u> 2.5.1 ให้ M เป็นคลาสของเลเบกเมเชอเรเบิลเซตทั้งหมด แล้วจะได้ว่า M เป็น $\sigma$ - แอลยีบรา ใน R

<u>พิสูจน์</u> ดู [1] หน้า 10

<u>นิยาม</u> 2.5.3 ให้ M เป็นคลาสของ เลเบกเมเชอเรเบิลเซตทั้งหมด
สำหรับ $E \in M$ ให้ $\mu(E) = m^*(E)$
จะเรียก $\mu$ ว่า<u>เลเบกเมเชอร์</u>

<u>นิยาม</u> 2.5.4 ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง ,
M เป็นคลาสของเลเบกเมเชอเรเบิลเซตทั้งหมด,
$\mu$ เป็นเลเบกเมเชอร์
จะเรียก $(R, M, \mu)$ ว่า <u>เลเบกเมเชอร์สเปซ</u>

<u>ทฤษฎี</u> 2.5.2 ให้ $(R, M, \mu)$ เป็นเลเบกเมเชอร์สเปซ และ $E \in M$
ถ้า $f : E \dashrightarrow R_e$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
แล้วจะได้ว่า f เป็นเลเบกเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน

<u>พิสูจน์</u> ดู [1] หน้า 40

<u>ทฤษฎี</u> 2.5.3 ถ้า $a \in R$ แล้วจะได้ว่า $(a, \infty)$ และ $(-\infty, a) \in M$

<u>พิสูจน์</u> ดู [1] หน้า 12-13

## 2.6 <u>เลเบกอินทิกรัลของฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน เลเบกเมเชอเรเบิลเซต E ที่ $\mu(E) < \infty$</u>

<u>นิยาม</u> 2.6.1 ให้ E เป็นเลเบกเมเชอเรเบิลเซต, $\mu(E) < \infty$ และ $f : E \longrightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต

<u>โลเออร์เลเบกอินทิกรัล</u> (The lower Lebasgue integral) <u>ของ f บน E</u> คือ

$$\underline{\int_E} f d\mu = \sup_{\rho \leq f} \int_E \rho \, d\mu$$

$\rho$ เป็นซิมเปิลฟังก์ชัน

<u>อัปเปอร์เลเบกอินทิกรัล</u> (Upper Lebesgue integral) <u>ของ f บน E</u> คือ

$$\overline{\int_E} f d\mu = \inf_{\beta \geq f} \int_E \beta \, d\mu$$

$\beta$ เป็นซิมเปิลฟังก์ชัน

ถ้า $\underline{\int_E} f d\mu = \overline{\int_E} f d\mu$ แล้ว จะเรียกว่า

f <u>เป็นเลเบกอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน</u> บน E

เรียกค่ารวมนี้ว่า เลเบกอินทิกรัลของ f บน E

เขียนแทนด้วย $\int_E f d\mu$ หรือ $\int_E f$

<u>ทฤษฎี</u> 2.6.1 ให้ $(R, M, \mu)$ เป็นเลเบกเมเชอร์สเปซ
ให้ $E \in M$ , $\mu(E) < \infty$
และ $f : E \dashrightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต
จะได้ว่า f เป็นเลเบกอินทิเกรเบิลบน E
ก็ต่อเมื่อ f เป็นเลเบกเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน

<u>พิสูจน์</u> ดู [1] หน้า 67

<u>ทฤษฎี</u> 2.6.2 ให้ $f : [a, b] \dashrightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต
ถ้า f เป็นรีมานน์อินทิเกรเบิลฟังก์ชัน แล้วจะได้ว่า

(1) f เป็นเลเบกเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน

(2) $R\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\mu$

เมื่อ $\int_{[a,b]} f\,d\mu$ เป็นเลเบกอินทิกรัลของ f

และ $R\int_a^b f(x)\,dx$ เป็นรีมานน์อินทิกรัลของ f

ที่ต่อไปจะเขียนแทนด้วย $\int_a^b f(x)dx$

<u>พิสูจน์</u> ดู [1] หน้า 69

<u>ทฤษฎี</u> 2.6.3 ให้ $f : [a,b] \dashrightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต
แล้วจะได้ว่า f เป็นรีมานน์อินทิเกรเบิล
ก็ต่อเมื่อ f มีความต่อเนื่องออลโมสท์เอฟเวอรีแวร์

<u>พิสูจน์</u> ดู [1] หน้า 78

## 2.7 <u>เลเบกอินทิกรัลของนอนเนกาทีฟเมเชอเรเบิลฟังก์ชันบนเมเชอเรเบิลเซต E ใดๆ</u>

<u>นิยาม</u> 2.7.1 สมมติให้ $f : E \dashrightarrow [0, \infty]$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน

ให้ $\int_E f d\mu = \sup\{ \int_{E_h} h \;/\; h : E_h \dashrightarrow R$ เป็นเมเชอเรเบิล

ฟังก์ชันที่มีขอบเขต , $h \leq f$ บน $E_h \subseteq E$ และ $\mu(E_h) < \infty\}$

เรียก $\int_E f d\mu$ ว่าเลเบกอินทิกรัลของ f บน E

## 2.8 <u>ลำดับทวิคูณ</u>

<u>นิยาม</u> 2.8.1 ลำดับทวิคูณใน R คือ ฟังก์ชัน X จาก N x N ไป R

โดยที่ N เป็นเซตของจำนวนนับ

และ R เป็นเซตของจำนวนจริง

เขียนแทนลำดับทวิคูณ ด้วย $X = \{x_{mn}\}$

โดยที่ $x_{mn} = X((m, n)) \quad \forall m, n \in N$

<u>นิยาม</u> 2.8.2 ให้ $X = \{x_{mn}\}$ เป็นลำดับทวิคูณ ใน R

จะเรียกจำนวนจริง x ว่า เป็น<u>ค่าลิมิต</u>ของลำดับทวิคูณ $\{x_{mn}\}$

ซึ่งเขียนแทนด้วย $\lim_{m,n \dashrightarrow \infty} x_{mn} = x$

ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก $N_\epsilon$

ที่ทำให้ $|x_{mn} - x| < \epsilon$ เมื่อ $m, n \geq N_\epsilon$

และเรียกว่า ลำดับ $\{x_{mn}\}$ <u>ลู่เข้าสู่</u> x

<u>นิยาม</u> 2.8.3 ให้ $X = \{x_{mn}\}$ เป็นลำดับทวิคูณใน R

สำหรับแต่ละ m ให้ $Y_m = \{x_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่

ลู่เข้าสู่ $y_m \in R$

จะเรียก $\{Y_m\}_{m=1}^{\infty}$ ว่าเป็นลำดับที่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม

ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก $N_\varepsilon$

ซึ่งถ้า $n \geq N_\varepsilon$ แล้วจะได้ว่า $\left| x_{mn} - y_m \right| < \varepsilon$, $\forall_m$

<u>ทฤษฎี</u> 2.8.1 ให้ $X = \{x_{mn}\}$ เป็นลำดับทวิคูณใน R

สำหรับแต่ละ m ให้ $Y_m = \{x_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$

เป็นลำดับที่ลู่เข้าสู่ $y_m \in R$

สำหรับแต่ละ n ให้ $Z_n = \{x_{mn}\}_{m=1}^{\infty}$

เป็นลำดับที่ลู่เข้าสู่ $z_n \in R$

ถ้า $\{Y_m\}_{m=1}^{\infty}$ หรือ $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่ลู่เข้าแบบยูนิฟอร์ม

แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} x_{mn} = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} x_{mn}$$

<u>พิสูจน์</u> ดู [4] หน้า 132

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ $X = \{x_{mn}\}$ เป็นลำดับทวิคูณใน R

โดยที่ $x_{mn} = 0$ เมื่อ $m \neq n$

และ $x_{mn} = 1$ เมื่อ $m = n$

จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} x_{mn} = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} x_{mn}$

$= 0$

แต่ $\lim_{m,n\to\infty} x_{mn}$ หาค่าไม่ได้