บทที่ 3

ความสัมพันธ์ระหว่างยูนิฟอร์มลิอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน

และ $\lim_{n \to \infty} \sup \int f_n d\mu \leq \int \lim_{n \to \infty} \sup f_n d\mu$

การศึกษาในบทนี้ จะเป็นการศึกษาจากบทความของ Richard B. Darst ในหัวข้อ " The connection between lim sup and Uniform Integrability" ซึ่งลงในวารสาร " The American Mathematical Monthly" ปี 1980 โดยพิจารณาจาก Fatou's lemma ที่กล่าวว่า "ถ้าให้ (X, M, μ) เป็นเมเชอร์สเปซ และ $f_n : X \to [0, \infty]$ เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน แล้วจะได้ว่า

$$\int_X \lim_{n \to \infty} \inf f_n d\mu \leq \lim_{n \to \infty} \inf \int_X f_n d\mu \text{ "}$$

ทำให้เกิดปัญหาว่าอะไรจะเกิดขึ้นในฟาทูเลมมา ถ้าเราแทน lim inf ด้วย lim sup จากการค้นคว้าแบบอิสระเชิงวิทยานิพนธ์ของคุณยุทธ งามเสงี่ยม ได้ผลลัพธ์ดังนี้ คือ

ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของเมเชอเรเบิลฟังก์ชันค่าจริงขยายบนเมเชอร์สเปซ (X, M, μ)

และ $\int_X \lim_{n \to \infty} \sup f_n \, d\mu$ หาค่าได้

ถ้า $\int_X \lim_{n \to \infty} \sup f_n^+ d\mu \geq \lim_{n \to \infty} \sup \int_X f_n^+ d\mu$

และ $\int_X \limsup_{n\to\infty} f_n^- \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n^- \, d\mu$

แล้ว $\int_X \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$

สำหรับคำตอบที่ศึกษาได้จากบทนี้ คือ

ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของนอนเนกาทีฟอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน บนพรอบบะบิลิตีสเปซ (X, M, μ) และ $\int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu < \infty$

แล้วจะได้ว่า

$\{f_n\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล ก็ต่อเมื่อ

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \leq \int_E \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu$$

สำหรับ $E \in M$

<u>นิยาม</u> 3.1 ให้ X เป็นเซต และ M เป็น σ - แอลยีบรา ใน X จะเรียกเมเชอร์สเปซ (X, M, μ) ว่าเป็น<u>พรอบบะบิลิตีสเปซ</u> (probability space) ถ้า $\mu(X) = 1$

<u>ตัวอย่าง</u> $([0, 1], M_{[0,1]}, \mu)$ เป็นพรอบบะบิลิตีสเปซ

โดยที่ $M_{[0,1]} = \{ [0,1] \cap E \, / \, E \subsetneq R$ และ E เป็นเลเบกเมเชอเรเบิลเซต $\}$

μ เป็นเลเบกเมเชอร์

<u>ทฤษฎีนำ</u> 3.1 ให้ (f_n) เป็นลำดับของเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน บนพรอบบะบิลิตีสเปซ (X, M, μ) และ

$$f = \lim_{n \to \infty} \sup f_n$$

จะได้ว่า สำหรับทุก $\delta > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N และเซต $A \in M$ ซึ่งทำให้

1. $f_n(x) \leq f(x) + \delta$ สำหรับทุก $x \in A$ และ $\forall n \geq N$
2. $\mu(A) > 1 - \delta$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\delta > 0$

ให้ $A_1 = \{x / f(x) = \infty\}$

พิจารณาบน $X - A_1$

ให้
$$g_n = (\sup_{i \geq n} f_i) - f$$
$$= \sup_{i \geq n} (f_i - f)$$

ให้ $F_n = \{x \in X - A_1 / f_n(x) > f(x) + \delta\}$

ให้ $G_n = \bigcup_{i \geq n} F_i$

(1) จะแสดงว่า $G_n = \{x / g_n(x) > \delta\}$

ให้ $y \in G_n$ ดังนั้น $y \in \bigcup_{i \geq n} F_i$

ฉะนั้นสำหรับ $k \geq n$ จะได้ว่า $y \in F_k$

$$f_k(y) > f(y) + \delta$$

$$f_k(y) - f(y) > \delta$$

แต่ $g_n = \sup_{k \geq n} (f_k - f)$

จะได้ว่า $g_n(y) \geq f_k(y) - f(y) > \delta$

ดังนั้น $y \in \{x \,/\, g_n(x) > \delta\}$

จะทำให้ได้ว่า $G_n \subseteq \{x \,/\, g_n(x) > \delta\}$

ถ้าให้ $y \in \{x \,/\, g_n(x) > \delta\}$

จะได้ว่า $g_n(y) > \delta$

$\sup_{i \geq n} (f_i(y) - f(y)) > \delta$

สำหรับบาง $k \geq n$ จะได้ว่า $f_k(y) - f(y) > \delta$

$f_k(y) > f(y) + \delta$

$y \in F_k$

ดังนั้น $y \in \bigcup_{k \geq n} F_k$

จะทำให้ได้ว่า $y \in G_n$

ดังนั้น $\{x \,/\, g_n(x) > \delta\} \subseteq G_n$

นั่นคือ $G_n = \{x \,/\, g_n(x) > \delta\}$

(2) จะแสดงว่า $\lim_{n \to \infty} g_n(x) = 0$ สำหรับ $x \in X - A_1$

เพราะว่า $g_n(x) = \sup_{i \geq n} f_n(x) - f(x)$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} g_n(x) &= \lim_{n \to \infty} \left(\sup_{i \geq n} f_i(x) - f(x) \right) \\
&= \lim_{n \to \infty} \sup_{i \geq n} f_i(x) - \lim_{n \to \infty} f(x) \\
&= \lim_{n \to \infty} \sup f_n(x) - f(x) \\
&= f(x) - f(x) = 0
\end{aligned}
$$

(3) จะแสดงว่า $\lim\limits_{n \to \infty} \mu(G_n) = 0$

เพราะว่า $G_1 \supseteq G_2 \supseteq G_3 \supseteq \ldots G_n \supseteq G_{n+1} \supseteq \ldots$

และ $\mu(G_1) \leq \mu(X) = 1 < \infty$

โดยทฤษฎี 2.3.3 จะได้ว่า

$$\lim_{n \to \infty} \mu(G_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right)$$

$$= \mu(\{x \,/\, g_n(x) > \delta \quad \forall n\})$$

$$\leq \mu(\{x \,/\, \lim_{n \to \infty} g_n(x) \geq \delta\})$$

แต่ $\{x \,/\, \lim\limits_{n \to \infty} g_n(x) \geq \delta\} = \emptyset$

ดังนั้น $\lim\limits_{n \to \infty} \mu(G_n) \leq \mu(\emptyset) = 0$

นั่นคือ $\lim\limits_{n \to \infty} \mu(G_n) = 0$

ดังนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $\mu(G_N) < \delta$

ให้ $A = X - G_N$

ดังนั้น $A \supseteq A_1$

(4) จะแสดงว่า

1. $f_n(x) \leq f(x) + \delta$ สำหรับ $x \in A$ และ $n \geq N$

2. $\mu(A) > 1 - \delta$

เพราะว่า ถ้า $x \in A$ แล้ว จะได้ว่า $x \notin G_N$

ดังนั้น $x \notin \bigcup\limits_{n \geq N} F_n$

$x \notin F_n$ สำหรับทุกๆ $n \geq N$

$$x \notin \{y \,/\, f_n(y) > f(y) + \delta\}$$

$$x \in \{y \,/\, f_n(y) \leq f(y) + \delta\}$$

$$f_n(x) \leq f(x) + \delta$$

เนื่องจาก $A = X - G_N$ และ $\mu(G_N) < \delta$

ดังนั้น $\mu(A) = \mu(X - G_N)$

โดยทฤษฎี 2.3.1 จะได้ว่า

$$\mu(A) = \mu(X) - \mu(G_N) > 1 - \delta$$

<u>นิยาม</u> 3.2 ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของนอนเนกาทีฟอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน บนเมเชอร์สเปซ (X, M, μ)

$\{f_n\}$ จะเป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล ก็ต่อเมื่อ

สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $E \in M$

และ $\mu(E) < \delta$

แล้ว $\int_E f_n d\mu < \varepsilon, \quad \forall n$

<u>ตัวอย่างของยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล</u>

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณาบนเมเชอร์สเปซ $([0, 1], M_{[0,1]}, \mu)$

โดยที่ $M_{[0,1]} = \{E \cap [0,1] \,/\, E \subseteq R$ และ E เป็นเลเบกเมเชอเรเบิลเซต $\}$

μ เป็นเลเบกเมเชอร์

ให้ $f_n(x) = x^n$ สำหรับ $x \in [0, 1]$

จะแสดงว่า $\{f_n\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิลบน

$([0,1], M_{[0,1]}, \mu)$

ให้ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก $f(x) = x$, $\forall x \in [0,1]$ เป็นอินทิเกร-เบิลฟังก์ชันบน $[0, 1]$

โดยทฤษฎี 2.4.5 จะได้ว่ามี $\delta > 0$

ที่ทำให้ $\int_E f d\mu < \varepsilon$ เมื่อ $E \in M_{[0,1]}$

และ $\mu(E) < \delta$

เนื่องจาก $f_n(x) \leq f(x)$, $\forall n \geq 1$

และ $\forall x \in [0, 1]$

ให้ $E \in M_{[0,1]}$ และ $\mu(E) < \delta$

จะได้ว่า $\int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu < \varepsilon$, $\forall n \geq 1$

นั่นคือ สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $E \in M$

และ $\mu(E) < \delta$ แล้ว $\int_E f_n d\mu < \varepsilon$, $\forall n \geq 1$

จากทฤษฎีนำ 3.1 ถ้าเพิ่มเงื่อนไขความเป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิลของลำดับ $\{f_n\}$ บนพรอบบะบิลิตีสเปซ (X, M, μ) จะทำให้ได้ว่า

$$\limsup_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X \limsup_{n \to \infty} f_n \, d\mu$$

<u>บทแทรกทฤษฎีนำ</u> 3.1 ให้ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของนอนเนกาทีฟอินทิเกรเบิล บนพรอบบะบิลิตีสเปซ (X, M, μ) ที่เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล และ $f = \limsup\limits_{n \to \infty} f_n$

แล้วจะได้ว่า $\limsup\limits_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f \, d\mu$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก $\{f_n\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล

ดังนั้น ถ้าให้ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่งถ้า $E \in M$

ที่ $\mu(E) < \delta_1$

แล้ว $\int_E f_n d\mu < \varepsilon, \quad \forall n$

ให้ $\delta = \min(\delta_1, \varepsilon)$

เนื่องจาก $\{f_n\}$ **เป็นเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน**

โดยทฤษฎีนำ 3.1 จะมีจำนวนเต็มบวก N และ $A \in M$ ซึ่งทำให้

(1) $f_n(x) \leq f(x) + \delta, \quad \forall x \in A$ และ $\forall n \geq N$

(2) $\mu(A) > 1 - \delta$

ฉะนั้น $\mu(X - A) = \mu(X) - \mu(A)$

$< 1 - (1 - \delta) = \delta$

ดังนั้น $\int_{X-A} f_n d\mu < \varepsilon, \quad \forall n$

เนื่องจาก $X = A \cup (X - A)$

โดยทฤษฎี 2.4.1 จะได้ว่า

$$\int_X f_n d\mu = \int_A f_n d\mu + \int_{X-A} f_n d\mu$$

ฉะนั้น $\int_X f_n d\mu < \int_A f_n d\mu + \varepsilon$ .....(i)

จาก (1) จะได้ว่า

$$\int_A f_n d\mu \leq \int_A (f + \delta) d\mu \ , \quad \forall n \geq N \quad .....(ii)$$

จาก (i) และ (ii) จะได้ว่า

$$\int_X f_n d\mu < \int_A (f + \delta) d\mu + \varepsilon \ , \quad \forall n \geq N$$

$$\int_X f_n d\mu < \int_A f d\mu + \int_A \delta d\mu + \varepsilon \ , \quad \forall n \geq N$$

$$\int_X f_n d\mu < \int_A f d\mu + \delta\mu(A) + \varepsilon \ , \quad \forall n \geq N$$

เนื่องจาก $A \subseteq X$ จะได้ว่า $\mu(A) \leq \mu(x) = 1$

ดังนั้น $\int_X f_n d\mu < \int_A f d\mu + \delta + \varepsilon \ , \quad \forall n \geq N$

$$\int_X f_n d\mu < \int_A f d\mu + \varepsilon + \varepsilon \ , \quad \forall n \geq N$$

เนื่องจาก $A \subseteq X$ โดยทฤษฎี 2.4.1 จะได้ว่า $\int_A f d\mu \leq \int_X f d\mu$

ดังนั้น $\int_X f_n d\mu < \int_X f d\mu + 2\varepsilon \ , \quad \forall n \geq N$

แล้วจะได้ว่า $\int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu + 2\varepsilon \ , \quad \forall n \quad \forall \varepsilon > 0$

นั่นคือ $\lim_{n \to \infty} \sup \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$

<u>ตัวอย่าง</u> 3.2 ให้ $((0, 1], M_{(0, 1]}, \mu)$ เป็นเมเชอร์สเปซ

โดยที่ $M_{(0,1]} = \{(0, 1] \cap E \,/\, E \subseteq R$

และ E เป็น เลเบก เมเชอเรเบิลเซต $\}$

μ **เป็นเลเบกเมเชอร์**

ให้ $f_j(x) = 2^n \chi_{(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}]}(x)$, $\forall x \in (0, 1]$

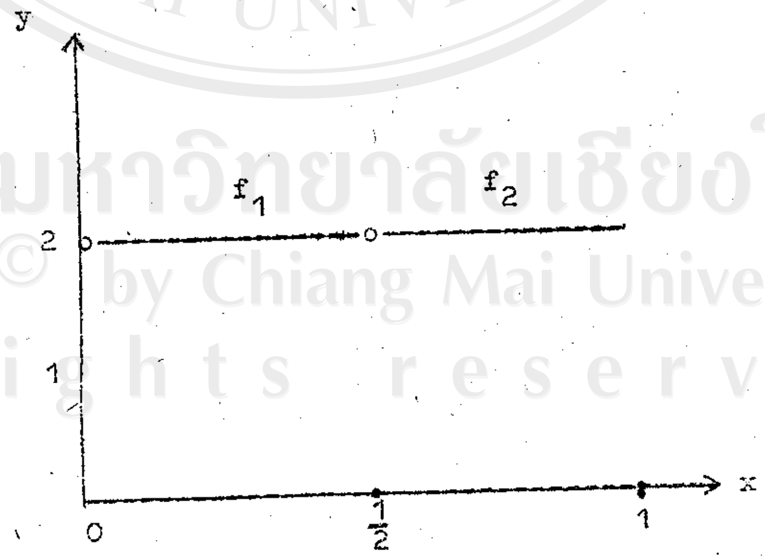
เมื่อ $j = 2^n - 2 + i$, $1 \le i \le 2^n$ และ $n \ge 1$

จะแสดงว่า $\lim\limits_{n \to \infty} \sup \int_E f_n d\mu \le \int_E f d\mu$, $\forall E \in M$

แต่ $\{f_n\}$ ไม่เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิลบน (X, M, μ)

<u>ขั้นที่</u> 1 เมื่อ $n = 1$ จะได้ $i = 1, 2$ และ $j = 1, 2$ ตามลำดับ จะได้ฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันดังนี้

$f_1(x) = 2^1 \chi_{(0,\frac{1}{2}]}(x)$ $f_2(x) = 2^1 \chi_{(\frac{1}{2},1]}(x)$



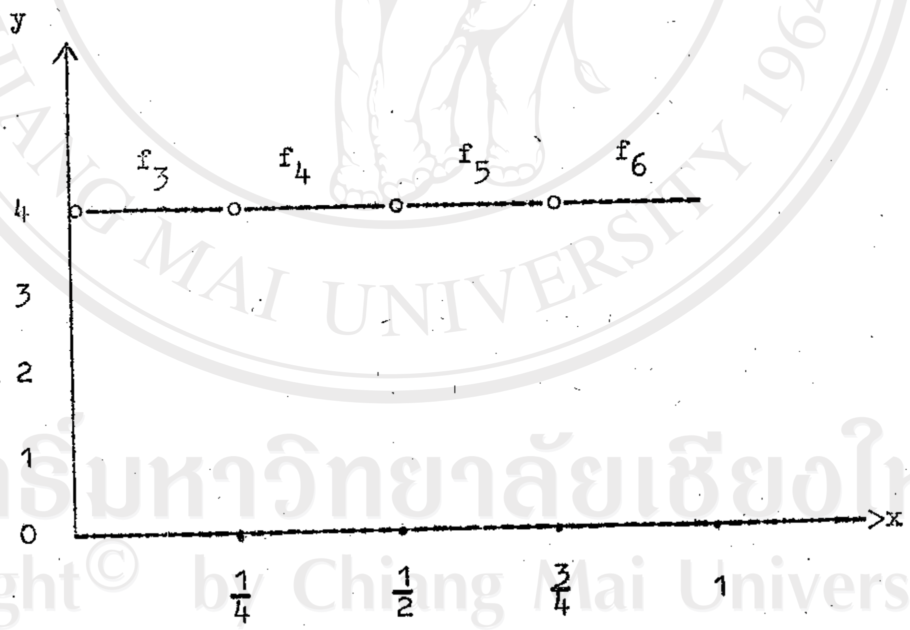
<u>ขั้นที่</u> 2 เมื่อ $n = 2$ จะได้ $i = 1,2,3,4$ และ $j = 3,4,5,6$ ตามลำดับ จะได้ฟังก์ชัน 4 ฟังก์ชันดังนี้

$$f_3(x) = 2^2 \chi_{(0,\frac{1}{4}]}(x)$$

$$f_4(x) = 2^2 \chi_{(\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}(x)$$

$$f_5(x) = 2^2 \chi_{(\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}(x)$$

$$f_6(x) = 2^2 \chi_{(\frac{3}{3},1]}(x)$$



<u>ขั้นที่</u> 3 เมื่อ $n = 3$ จะได้ $i = 1,2,3,4,5,6,7,8$

และได้ $j = 7,8,9,10,11,12,13,14$

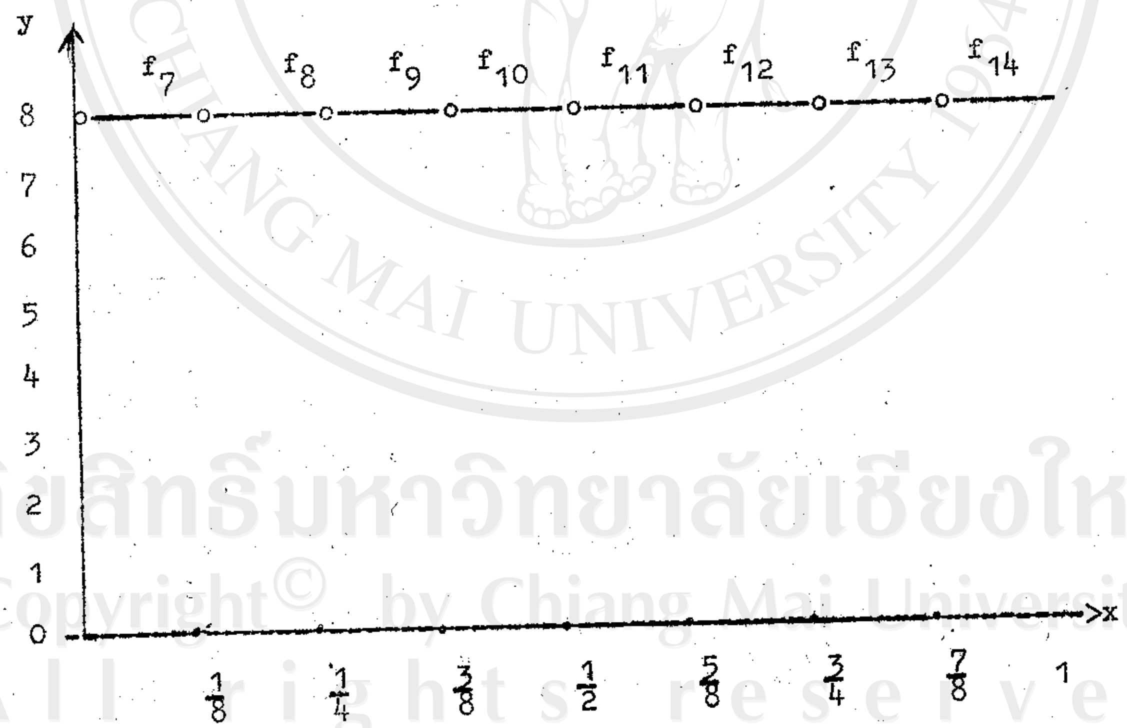
ตามลำดับ จะได้ฟังก์ชัน 8 ฟังก์ชันดังนี้

$$f_7(x) = \chi_{(0,\,\frac{1}{8}]}(x) \qquad f_{11}(x) = \chi_{(\frac{1}{2},\,\frac{5}{8}]}(x)$$

$$f_8(x) = \chi_{(\frac{1}{8},\,\frac{1}{4}]}(x) \qquad f_{12}(x) = \chi_{(\frac{5}{8},\,\frac{3}{4}]}(x)$$

$$f_9(x) = \chi_{(\frac{1}{4},\,\frac{3}{8}]}(x) \qquad f_{13}(x) = \chi_{(\frac{3}{4},\,\frac{7}{8}]}(x)$$

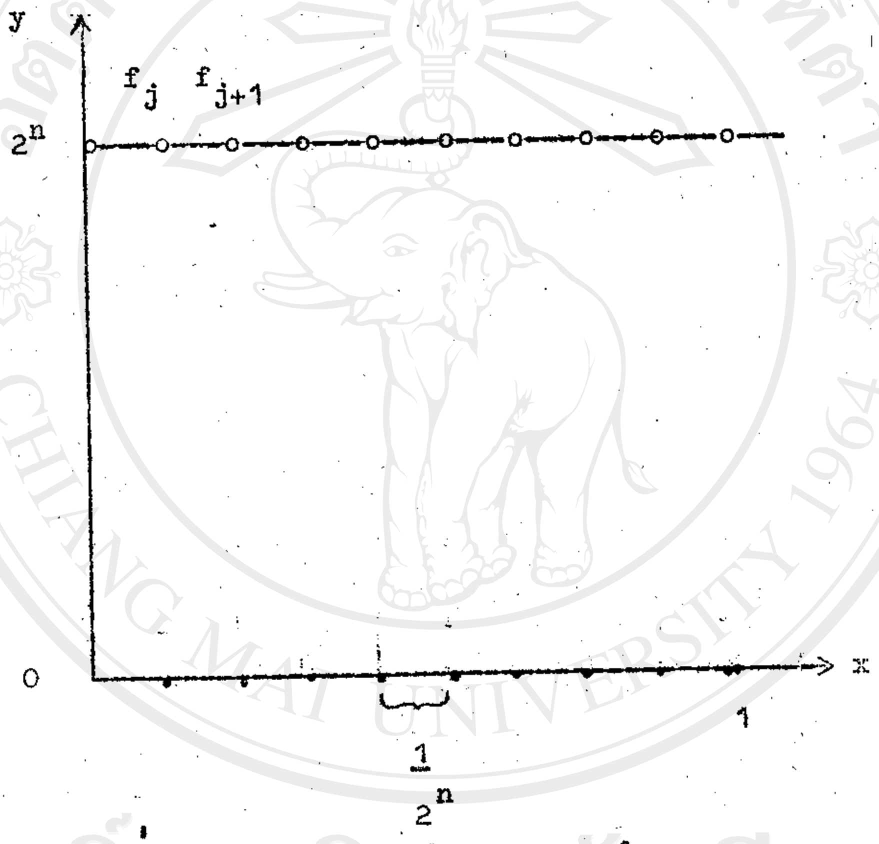
$$f_{10}(x) = \chi_{(\frac{3}{8},\,\frac{1}{2}]}(x) \qquad f_{14}(x) = \chi_{(\frac{7}{8},\,1]}(x)$$



<u>ขั้นที่ n</u> $\quad f_j(x) = 2^n \chi_{(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}]}(x) \qquad \forall x \in (0,1]$

เมื่อ $\quad j = 2^n - 2 + i \;, \; 1 \leq i \leq 2^n \quad$ และ $\; n \geq 1$

จะได้ฟังก์ชัน $\quad 2^n \quad$ ฟังก์ชันดังนี้



(1) จะแสดงว่า $\quad \lim_{j \to \infty} \sup \int_E f_j \, d\mu \leq \int_E f d\mu \;,$

$$\forall E \in M_{(0,1]}$$

เนื่องจาก $\quad \sup_{i \geq j} f_i(x) = \sup\{f_j(x), f_{j+1}(x), \ldots\}$

$$= \infty$$

ดังนั้น $f(x) = \lim_{j\to\infty} \sup f_j(x) = \infty$

ให้ $E \in M_{(0,1]}$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\lim_{j\to\infty} \sup \int_E f_j d\mu \leq \int_E f d\mu \quad , \quad \forall E \in M_{(0,1]}$$

จะแสดงว่า $\{f_j\}$ ไม่เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล

เนื่องจาก $\int_X f_j d\mu = \int_{(\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}]} 2^n d\mu = 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1$

ดังนั้น f_j เป็นอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน , $\forall j$

ให้ $\delta > 0$ เลือก $\varepsilon = \frac{1}{2}$ เลือกจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $\frac{1}{2^N} < \delta$

และให้ $E_\delta = (0, \frac{1}{2^N}]$

ดังนั้น $\mu(E_\delta) = \frac{1}{2^N} < \delta$

จะได้ว่า สำหรับ $j = 2^N - 2 + 1$

$$\int_{E_\delta} f_j d\mu = \int_{E_\delta} 2^N \chi_{(0, \frac{1}{2^N}]} d\mu$$

$$= 2^N \cdot \frac{1}{2^N}$$

$$= 1 > \frac{1}{2}$$

นั่นคือ มี $\varepsilon_o > 0$ สำหรับทุก $\delta > 0$ จะมี E_δ และ j_δ

ที่ $\mu(E_\delta) < \delta$ แต่ $\int_{E_\delta} f_{j_\delta} \, d\mu \geq \varepsilon_o$

ดังนั้น $\{f_j\}$ ไม่เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล

จากตัวอย่าง 3.2 จะได้ว่า $\{f_n\}$ ไม่เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล

บนพรอบบะบิลิตีสเปซ (X, M, μ)

แต่ $f(x) = \infty$ จึงทำให้ได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \sup \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \text{ , } \forall E \in M$$

นั่นคือมีลำดับ $\{f_n\}$ ที่ทำให้

$$\lim_{n\to\infty} \sup \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \text{ , } \forall E \in M$$

โดยที่ $\{f_n\}$ ไม่เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิลบนพรอบบะบิลิตีสเปซ (X, M, μ)

ดังนั้นทฤษฎีต่อไปนี้ จะเป็นการให้เงื่อนไขที่จำเป็น สำหรับ f

ทำให้ได้ความสัมพันธ์ว่า ถ้า

$$\lim_{n\to\infty} \sup \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \text{ , } \forall E \in M$$

แล้ว $\{f_n\}$ จะเป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิลบนพรอบบะบิลิตีสเปซ (X, M, μ)

เงื่อนไขดังกล่าวคือ ให้ f เป็นอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน และจากบทแทรก

ทฤษฎีนำ 3.1 เราทราบว่า ถ้า $\{f_n\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิลบนพรอบ-

บะบิลิตีสเปซ (X, M, μ) แล้ว $\lim_{n\to\infty} \sup \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$

แต่ทฤษฎีต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า ภายใต้เงื่อนไข f เป็นอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน และการเป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิลของ $\{f_n\}$ จะทำให้ได้ผลที่แรงขึ้น คือ

$$\lim_{n\to\infty} \sup \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \ , \ \forall E \in M$$

<u>ทฤษฎี</u> 3.1 ให้ (X, M, μ) เป็นพรอบบะบิลิตีสเปซ และ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของนอนเนกาทีฟอินทิเกรเบิลฟังก์ชันบน (X, M, μ)

ถ้า $f = \lim_{n\to\infty} \sup f_n$ และ $\int_X f d\mu < \infty$

แล้วจะได้ว่า $\{f_n\}$ จะเป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{n\to\infty} \sup \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \ , \ \forall E \in M$$

<u>พิสูจน์</u> (===>) จะพิสูจน์ว่า ถ้า $\{f_n\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล

แล้ว $\lim_{n\to\infty} \sup \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \ , \ \forall E \in M$

ให้ $E \in M$

เนื่องจาก $\{f_n\}$ เป็นลำดับของนอนเนกาทีฟอินทิเกรเบิลฟังก์ชันที่เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล

ดังนั้น ถ้าให้ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่งถ้า $E \in M$

ที่ $\mu(E) < \delta_1$ แล้ว $\int_E f_n d\mu < \varepsilon \ , \ \forall n$

ให้ $\delta = \min(\delta_1, \varepsilon)$

เนื่องจาก $\{f_n\}$ เป็นนอนเนกาทีฟเมเชอเรเบิลฟังก์ชัน

โดยทฤษฎีนำ 3.1 จะมีจำนวนเต็มบวก N และ $A \in M$

ซึ่งทำให้ (1) $f_n(x) \leq f(x) + \delta$, $\forall x \in A$ และ $\forall n \geq N$

(2) $\mu(A) > 1 - \delta$

เนื่องจาก $E = (E \cap A) \cup (E - A)$

โดยทฤษฎี 2.4.1 จะได้ว่า

$$\int_E f_n d\mu = \int_{E \cap A} f_n d\mu + \int_{E-A} f_n d\mu \quad \text{สำหรับแต่ละ } n$$

ดังนั้น
$$\limsup_{n \to \infty} \int_E f_n d\mu = \limsup_{n \to \infty} \left(\int_{E \cap A} f_n d\mu + \int_{E-A} f_n d\mu \right)$$
$$\leq \limsup_{n \to \infty} \int_{E \cap A} f_n d\mu + \limsup_{n \to \infty} \int_{E - A} f_n d\mu \qquad \text{(i)}$$

พิจารณา $\limsup_{n \to \infty} \int_{E-A} f_n d\mu$

เนื่องจาก $E, A \in M$ ดังนั้น $E - A \in M$ และ $E - A \subseteq X - A$

จะได้ว่า $\mu(E - A) \leq \mu(X - A) = \mu(X) - \mu(A) < 1 - (1 - \delta) = \delta$

ดังนั้น $\int_{E - A} f_n d\mu < \varepsilon$, $\forall n$

ฉะนั้น $\limsup_{n \to \infty} \int_{E-A} f_n d\mu < \varepsilon$ (ii)

เนื่องจาก $f_n(x) \leq f(x) + \delta$ สำหรับ $x \in E \cap A$ และสำหรับ $n \geq N$

ฉะนั้น $\int_{E\cap A} f_n d\mu \leq \int_{E\cap A} (f + \delta) d\mu$

$$\int_{E\cap A} f_n d\mu \leq \int_{E\cap A} f d\mu + \int_{E\cap A} \delta d\mu$$

เนื่องจาก $\delta = \min(\delta_1, \varepsilon)$

จะได้ว่า

$$\int_{E\cap A} f_n d\mu \leq \int_{E\cap A} f d\mu + \int_{E\cap A} \varepsilon d\mu$$

$$\int_{E\cap A} f_n d\mu \leq \int_{E\cap A} f d\mu + \varepsilon.\mu(E \cap A)$$

เนื่องจาก $E \cap A \subseteq X$ ดังนั้น $\mu(E \cap A) \leq \mu(X) = 1$

ดังนั้น $\int_{E\cap A} f_n d\mu \leq \int_{E\cap A} f d\mu + \varepsilon$

แต่ $E \cap A \subseteq E$ ดังนั้น $\int_{E\cap A} f d\mu \leq \int_E f d\mu$

จะได้ว่า $\int_{E\cap A} f_n d\mu \leq \int_E f d\mu + \varepsilon$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \int_{E\cap A} f_n d\mu \leq \int_E f d\mu + \varepsilon$ (iii)

จาก (i), (ii) และ (iii)

จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu + 2\varepsilon$ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

(<===) จะแสดงว่า ถ้า $\lim_{n\to\infty} \sup \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \quad \forall E \in M$

แล้ว $\{f_n\}$ จะเป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล

สมมติให้ $\{f_n\}$ ไม่เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล

ต้องการแสดงว่า มี $E \in M$

ที่ทำให้ $\lim_{n\to\infty} \sup \int_E f_n d\mu > \int_E f d\mu$

เนื่องจาก $\{f_n\}$ ไม่เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล

ดังนั้นจะมี $\varepsilon_o > 0$ ซึ่งสำหรับทุก $\delta' > 0$ จะมี $n_{\delta'}$

และ $E_{\delta'}$ ที่ $\mu(E_{\delta'}) < \delta'$ แต่ $\int_{E_{\delta'}} f_{n_{\delta'}} d\mu \geq \varepsilon_o$

เนื่องจาก $\int_X f d\mu < \infty$

ดังนั้น สำหรับ $\varepsilon_o > 0$ จะมี $\delta_o > 0$ ซึ่งถ้า $\mu(E) < \delta_o$

แล้ว $\int_E f d\mu < \varepsilon_o$

เลือก E_1 , n_1 ที่ $\mu(E_1) < \frac{\delta_o}{2^1}$ แต่ $\int_{E_1} f_{n_1} d\mu \geq \varepsilon_o$

f_1 เป็นอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน

ดังนั้น จะมี $\delta_1 > 0$ ที่ทำให้ $\int_E f_1 d\mu < \varepsilon_o$

สำหรับ $E \in M$ ที่ $\mu(E) < \delta_1$

f_2 เป็นอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน

ดังนั้นจะมี $\delta_2 > 0$ ที่ทำให้ $\int_E f_2 d\mu < \varepsilon_o$ สำหรับ $E \in M$

ที่ $\mu(E) < \delta_2$

f_3 เป็นอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน

ดังนั้นจะมี $\delta_3 > 0$ ที่ทำให้ $\int_E f_3 d\mu < \varepsilon_o$ สำหรับ $E \in M$

ที่ $\mu(E) < \delta_3$

⋮

f_{n_1} เป็นอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน

ดังนั้น จะมี $\delta_{n_1} > 0$ ที่ทำให้ $\int_E f_{n_1} d\mu < \varepsilon_o$ สำหรับ $E \in M$

ที่ $\mu(E) < \delta_{n_1}$

ให้ $\delta^* = \min(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n_1})$

ดังนั้นถ้า $\mu(E) < \delta^*$ แล้วจะได้ว่า

$$\int_E f_i d\mu < \varepsilon_o \quad \text{สำหรับ} \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n_1$$

ให้ $\delta^{**} = \min(\delta^*, \frac{\delta_o}{2^2})$

จะมี E_2 และ n_2 ที่ $\mu(E_2) < \delta^{**}$ แต่ $\int_{E_2} f_{n_2} d\mu \geq \varepsilon_o$

ซึ่งจะได้ว่า $n_2 > n_1$

นั่นคือ จะมี E_2, $n_2 > n_1$ ที่ $\mu(E_2) < \frac{\delta_o}{2^2}$ แต่ $\int_{E_2} f_{n_2} d\mu \geq \varepsilon_o$

โดยการเลือกเช่นนี้ไปเรื่อยๆ

ดังนั้น จะมี E_k ที่ $\mu(E_k) < \frac{\delta_o}{2^k}$ และจะมี n_k ที่ $n_k > n_{k-1}$

แต่ $\int_{E_k} f_{n_k} \, d\mu \geq \varepsilon_o$

ให้ $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$

จะได้ว่า $\mu(E) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)$

ดังนั้น $\mu(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_o}{2^k} = \delta_o \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \delta_o$

จะได้ว่า $\int_E f d\mu < \varepsilon_o$

แต่ $\int_E f_{n_k} d\mu \geq \int_{E_k} f_{n_k} d\mu > \varepsilon_o$ สำหรับ $k \geq 1$

ดังนั้น $\lim_{k \to \infty} \sup \int_E f_{n_k} \, d\mu \geq \varepsilon_o$

เนื่องจาก $\lim_{k \to \infty} \sup \int_E f_k d\mu \geq \lim_{k \to \infty} \sup \int_E f_{n_k} \, d\mu$

ฉะนั้น $\lim_{k \to \infty} \sup \int_E f_k d\mu \geq \varepsilon_o > \int_E f d\mu$

ทำให้ $\lim_{n \to \infty} \sup \int_E f_n d\mu > \int_E f d\mu$

นั่นคือ ถ้า $\lim_{n \to \infty} \sup \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$ สำหรับ $E \in M$

แล้ว $\{f_n\}$ จะเป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของทฤษฎี 3.1

<u>ตัวอย่าง</u> 3.3 ให้ $((0, 1], M_{(0, 1]}, \mu)$ เป็นเมเชอร์สเปซ

โดยที่ $M_{(0,1]} = \{(0,1] \cap E \,/\, E \subseteq R$ และ E เป็นเลเบกเมเชอเรเบิลเซต $\}$

μ เป็นเลเบกเมเชอร์

ให้ $f_n(x) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} 2\chi_{\left(\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\right]}(x)$ สำหรับ $x \in (0,1]$

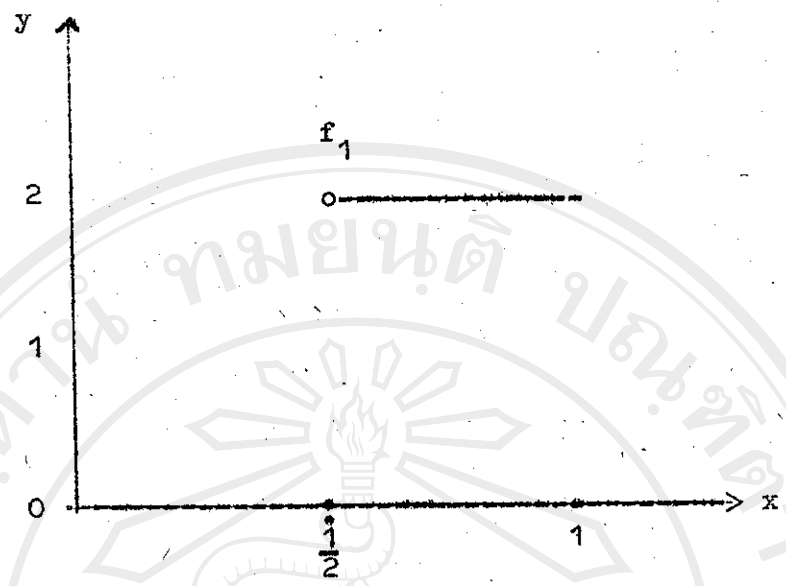
จะแสดงว่า

1. $\int_X f d\mu < \infty$

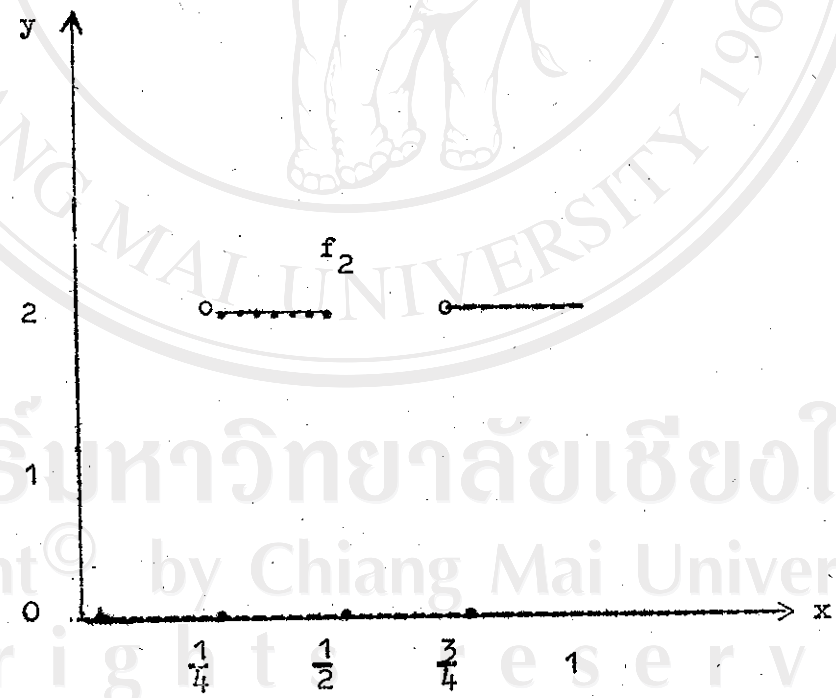
2. สำหรับ $E \in M$; $\limsup_{n \to \infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

3. (f_n) เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิลบนพรอบบะบิลิตีสเปซ $((0,1], M_{(0,1]}, \mu)$

เมื่อ $n = 1$ จะได้ $f_1(x) = 2\chi_{(\frac{1}{2},1]}(x)$

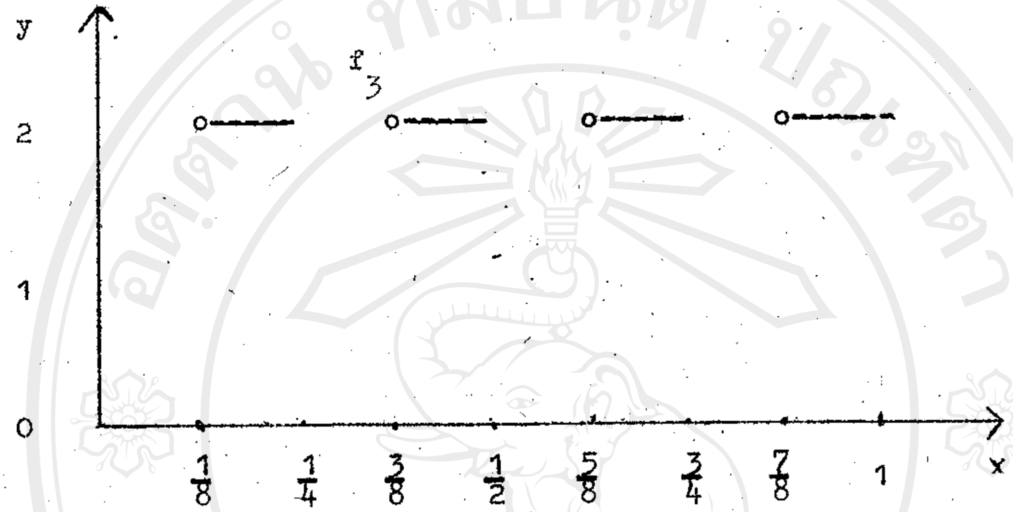


เมื่อ $n = 2$ จะได้ $f_2(x) = 2\chi_{(\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}(x) + 2\chi_{(\frac{3}{4},1]}(x)$

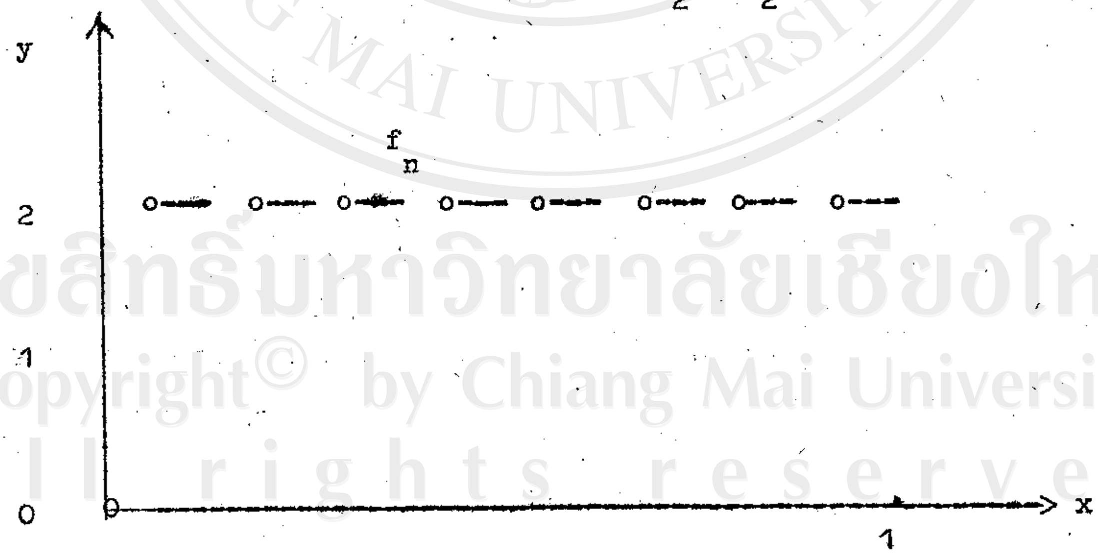


เมื่อ $n = 3$ จะได้ $f_3(x) = 2\chi_{(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]}(x) + 2\chi_{(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}]}(x)$

$$+ 2\chi_{(\frac{5}{8}, \frac{3}{4}]}(x) + 2\chi_{(\frac{7}{8}, 1]}(x)$$



$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} 2\chi_{(\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}]}(x)$$



(1) จะแสดงว่า $\int_X f d\mu < \infty$ เมื่อ $f = \limsup_{n \to \infty} f_n$

เนื่องจาก $\sup_{i \geq n} f_i(x) = \sup \{f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots\}$

$= 2$ สำหรับ $x \in (0, 1]$

ดังนั้น $f(x) = \limsup_{n \to \infty} f_n(x)$

$= 2$ สำหรับ $x \in (0, 1]$

$\int_X f d\mu = \int_{(0,1]} 2 d\mu = 2 < \infty$

(2) จะแสดงว่า $\limsup_{n \to \infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

สำหรับ $E \in M_{(0,1]}$

ให้ $E \in M_{(0, 1]}$

เนื่องจาก $f_n(x) \leq f(x)$ สำหรับ $n \geq 1$

โดยทฤษฎี 2.4.1 จะได้ว่า $\int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$ สำหรับ $n \geq 1$

ดังนั้น $\limsup_{n \to \infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

(3) จะแสดงว่า $\{f_n\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล

เนื่องจาก $\int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu = 2$ สำหรับ $n \geq 1$

ดังนั้น f_n เป็นอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน , $\forall n$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

ให้ $E \in M$ และ $\mu(E) < \delta$.

จะได้ว่า $\int_E f_n du = \int_E \sum_{k=1}^{2^{n-1}} 2\chi_{\left(\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\right]} d\mu$ สำหรับ $n \geq 1$

$$= 2 \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_E \chi_{\left(\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\right]} d\mu$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \mu\left(E \cap \left(\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\right]\right)$$

$$= 2\mu\left(\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \left(E \cap \left(\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\right]\right)\right)$$

$$= 2\mu\left(E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \left(\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2k}{2^n}\right]\right)\right)$$

$$\leq 2.\mu(E) < 2.\delta = \varepsilon$$

ดังนั้น $\{f_n\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล