

บทที่ 4

ความสัมพันธ์ระหว่างยูนิฟอร์มอินทิเกรตเบิลฟังก์ชัน และ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \int f_n d\mu \leq \int \lim_{n \rightarrow \infty} \sup f_n d\mu$$

การศึกษาในบทที่ 3 นั้น เป็นการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความเป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรตเบิลของลำดับ (f_n) กับสมการ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \int_E f_n d\mu \leq \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} \sup f_n d\mu$$

สำหรับ $E \in \mathcal{M}$ บนพรอบเบบิลิตี้สเปซ $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ภายใต้เงื่อนไข

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup f_n$ เป็นอินทิเกรตเบิลฟังก์ชัน แต่ในบทนี้เราจะขยายไป

ยังเมเชอร์สเปซ $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ที่มีเมเชอร์จำกัด ($\mu(X) < \infty$) นอกจากนี้จะศึกษาเพื่อหาเงื่อนไขใหม่ เพื่อให้ได้ความสัมพันธ์ เช่นเดียวกับในบทที่ 3 บนพรอบเบบิลิตี้สเปซ $(X, \mathcal{M}, \mu)$ และขยายไปยังเมเชอร์สเปซ $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ใดๆ

4.1 ขยายทฤษฎี 3.1 ไปยังเมเชอร์สเปซ $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ใดๆ ที่มีเมเชอร์จำกัด

จะศึกษาเพื่อให้ได้ความสัมพันธ์ว่า (f_n) จะเป็นลำดับของนอนเนกาทีฟอินทิเกรตเบิลฟังก์ชัน ที่เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรตเบิลบนเมเชอร์สเปซ

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ ที่ $\mu(X) < \infty$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

สำหรับ $E \in \mathcal{M}$ ภายใต้เงื่อนไข $\int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \sup f_n d\mu$ เป็นอิน-

ทิเกรตเบิลฟังก์ชัน โดยอาศัยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1.1 ให้ (X, M, μ') เป็นเมเชอร์สเปซที่ $0 < \mu'(X) < \infty$

และ f เป็นนอนเนกาทีฟอินทิเกรเบิลฟังก์ชันบน (X, M, μ')

ให้ $\mu(A) = \frac{\mu'(A)}{\mu'(X)}$ สำหรับ $A \in M$ แล้วจะได้ว่า

1. μ เป็นเมเชอร์บน σ -แอลยิบรา M และ (X, M, μ) เป็นพรอบบะบิลิตีสเปซ

2. $\int_E f d\mu = \int_E \frac{f d\mu'}{\mu'(X)}$ สำหรับ $E \in M$

นอกจากนี้จะได้ว่า f เป็นนอนเนกาทีฟอินทิเกรเบิลฟังก์ชันบน (X, M, μ)

พิสูจน์ (1) จะแสดงว่า μ เป็นเมเชอร์บน σ -แอลยิบรา M

เนื่องจาก $\mu(A) = \frac{\mu'(A)}{\mu'(X)}$ สำหรับ $A \in M$

ดังนั้น μ เป็นฟังก์ชันจาก M ไปยัง $[0, \infty]$

$$\begin{aligned} \text{และจะได้ว่า } \mu(\emptyset) &= \frac{\mu'(\emptyset)}{\mu'(X)} \\ &= \frac{0}{\mu'(X)} = 0 \end{aligned}$$

ให้ $E_i \in M$ โดยที่ (E_i) เป็นลำดับของเมเชอร์

เรอเบิลเซตที่ $E_j \cap E_k = \emptyset$ เมื่อ $j \neq k$

$$\text{ดังนั้น } \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \frac{\mu'\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)}{\mu'(X)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \mu'(E_i)}{\mu'(X)}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu'(E_i)}{\mu'(X)}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

เพราะฉะนั้น μ เป็นเมเชอร์ บน M

และ (X, M, μ) เป็นเมเชอร์สเปซ

$$\text{เนื่องจาก } \mu(X) = \frac{\mu'(X)}{\mu'(X)} = 1$$

ดังนั้น (X, M, μ) เป็นพรอบะบิลิตีสเปซ

$$(2) \quad \text{จะแสดงว่า } \int_E f d\mu = \int_E \frac{f d\mu'}{\mu'(X)} \quad \text{สำหรับ } E \in M$$

ให้ $E \in M$

$$\text{พิจารณา } \int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E s d\mu / 0 \leq s \leq f, \right.$$

โดยที่ s เป็นเมเชอร์เรเคิลิมเบิลฟังก์ชัน

บน (X, M) }

เขียน $s = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ โดยที่ c_i เป็นค่าที่แตกต่างกัน
ของ s

และ $E_i = \{x / s(x) = c_i\}$

$$\begin{aligned} \int_E s d\mu &= \sum_{i=1}^n c_i \mu(E_i \cap E) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \left(\frac{\mu'(E_i \cap E)}{\mu'(X)} \right) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n c_i \mu'(E_i \cap E)}{\mu'(X)} \\ &= \frac{1}{\mu'(X)} \int_E s d\mu' \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\int_E f d\mu = \sup \left\{ \frac{1}{\mu'(X)} \int_E s d\mu' / 0 \leq s \leq f, \right.$

โดยที่ s เป็นเมเชอเรเบิลซิมเปิลฟังก์ชันบน
 (X, M)

$$= \frac{1}{\mu'(X)} \sup \left\{ \int_E s d\mu' / 0 \leq s \leq f, \right.$$

โดยที่ s เป็นเมเชอเรเบิลซิมเปิลฟังก์ชันบน
 (X, M)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\mu'(X)} \int_E f d\mu' \\ &= \int_E \frac{f d\mu}{\mu'(X)} \end{aligned}$$

เนื่องจาก f เป็นนอเนกาทีฟอินทิเกรเบิลบน (X, M, μ')

$$\text{ดังนั้น } \int_X f d\mu' < \infty$$

$$\mu'(X) \int_X f d\mu < \infty$$

$$\int_X f d\mu < \infty$$

เพราะฉะนั้น f เป็นนอเนกาทีฟอินทิเกรเบิลบน (X, M, μ)

ทฤษฎี 4.1.1 ให้ (X, M, μ') เป็นเมเชอร์สเปซ ที่ $\mu'(X) < \infty$

และ $\{f_n\}$ เป็นลำดับของนอเนกาทีฟอินทิเกรเบิลฟังก์ชันบน (X, M, μ')

$$\text{ถ้า } f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup f_n \text{ และ } \int_X f d\mu' < \infty$$

จะได้ว่า $\{f_n\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_E \int_E f_n d\mu' \leq \int_E f d\mu' \text{ สำหรับ } E \in M$$

พิสูจน์ กรณี 1 ถ้า $\mu'(X) = 0$

จะได้ว่า $\{f_n\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิลบน (X, M, μ')

$$\text{และอสมการ } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_E \int_E f_n d\mu' \leq \int_E f d\mu'$$

เป็นจริง สำหรับทุกๆ $E \in M$

เพราะว่า

$$\int_E f_n d\mu' = \int_E f d\mu' = 0, \quad \forall n \geq 1, \\ \forall E \in M$$

กรณี 2 ถ้า $\mu'(X) \neq 0$ และ (X, M, μ) มีคุณสมบัติเซนต์เตียว
กับ (X, M, μ')

ในทฤษฎีบท 4.1.1 จะได้ว่า $\int_X f d\mu < \infty$

($\Rightarrow$) จะแสดงว่า ถ้า $\{f_n\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล
บน (X, M, μ') แล้ว

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_E \int f_n d\mu' \leq \int_E f d\mu' \quad \text{สำหรับ } E \in M$$

เนื่องจาก $\{f_n\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล

บน (X, M, μ')

ให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $E \in M$

และ $\mu'(E) < \delta$

แล้วจะได้ว่า $\int_E f_n d\mu' < \varepsilon \cdot \mu'(X), \quad \forall n$

ทำให้ $\mu'(X) \int_E f_n d\mu' < \varepsilon \cdot \mu'(X), \quad \forall n$
(โดยทฤษฎีบท 4.1.1)

ให้ $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{\mu'(X)} > 0$ ซึ่งถ้า $E \in M$

และ $\mu(E) < \delta_1$

แล้วจะได้ว่า $\int_E f_n d\mu < c, \quad \forall n$

แสดงว่า $\{f_n\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิลบนพหุคูณปริมาตร (X, M, μ)

โดยทฤษฎี 3.1 จะได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_E \int f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \quad \text{สำหรับ } E \in M$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_E \int \frac{f_n d\mu}{\mu(X)} \leq \int \frac{f d\mu}{\mu(X)} \quad \text{สำหรับ } E \in M$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_E \int f_n d\mu' \leq \int_E f d\mu' \quad \text{สำหรับ } E \in M$$

$$(<==) \text{ จะแสดงว่า ถ้า } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_E \int f_n d\mu' \leq \int_E f d\mu' \quad \text{สำหรับ } E \in M$$

แล้ว $\{f_n\}$ จะเป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิลบน (X, M, μ')

โดยทฤษฎี 4.1.1 จะได้ว่า

$$\text{สำหรับ } E \in M, \int_E f d\mu' = \mu'(X) \int_E f d\mu$$

$$\text{และ } \int_E f_n d\mu' = \mu'(X) \int_E f_n d\mu$$

$$\text{เนื่องจาก } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_E \int f_n d\mu' \leq \int_E f d\mu'$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_E \mu'(X) \int f_n d\mu \leq \mu'(X) \int_E f d\mu$$

$$\mu'(X) \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_E \int f_n d\mu \leq \mu'(X) \int_E f d\mu$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_E \int f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$$

โดยทฤษฎี 3.1 จะได้ว่า $\{f_n\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิลบน

(X, M, μ)

ให้ $\varepsilon > 0$ ดังนั้นจะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $E \in M$ และ $\mu(E) < \delta$

แล้วจะได้ว่า $\forall n, \int_E f_n d\mu < \frac{\varepsilon}{\mu'(X)}$

$$\mu'(X) \int_E f_n d\mu < \varepsilon$$

$$\int_E f_n d\mu' < \varepsilon$$

ให้ $\delta_1 = \delta \cdot \mu'(X) > 0$ ซึ่งถ้า $E \in M$ และ $\mu(E) < \frac{\delta_1}{\mu'(X)}$

แล้วจะได้ว่า $\forall n, \int_E f_n d\mu' < \varepsilon$

ดังนั้น ถ้า $E \in M$ และ $\mu'(E) < \delta_1$ แล้วจะได้ว่า

$$\forall n, \int_E f_n d\mu' < \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\{f_n\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิลบน (X, M, μ')

4.2 ศึกษาเพื่อหาเงื่อนไขใหม่ แทน $\int \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu < \infty$

ในทฤษฎี 3.1

สำหรับในทฤษฎี 3.1 เราจะได้ว่าความสัมพันธ์ว่า $\{f_k\}$ จะเป็นลำดับ

ของอนันต์ที่อินทิเกรเบิลที่เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิลบนพหุคูณบิเลต

(X, M, μ) ก็ต่อเมื่อ $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int f_k d\mu \leq \int f d\mu$

สำหรับ $E \in M$

ภายใต้เงื่อนไข $\int_X \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu < \infty$ ต่อไปนี้จะศึกษา

เพื่อให้ได้ความสัมพันธ์เช่นเดียวกับทฤษฎี 3.1 ภายใต้เงื่อนไข

$(\int_{E_n} f_k d\mu)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่ลู่เข้าสู่ 0 แบบยูนิฟอร์ม บน E_n

โดยที่ $E_n = \{x \in X / f(x) \geq n\}$ และ $f = \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k$

โดยอาศัยทฤษฎีนี้ต่อไป

ทฤษฎีนำ 4.2.1 ให้ (X, M, μ) เป็นปริภูมิวัดที่สมบูรณ์

ถ้า $M_A = \{A \cap E / E \in M\}$ เมื่อ $A \in M$

จะได้ว่า M_A เป็น σ -แอลยิบรา ใน A

และ $(A, M_A, \mu|_{M_A})$ เป็นเมเชอร์สเปซที่มีเมเชอร์จำกัด

โดยที่ $\mu|_{M_A}(E) = \mu(E)$ สำหรับ $E \in M_A$

พิสูจน์ จะแสดงว่า M_A เป็น σ -แอลยิบรา ใน A โดยแบ่งเป็น 3 ขั้นตอน ดังนี้

(1) เนื่องจาก $A = A \cap A$ และ $A \in M$

ดังนั้น $A \in M_A$

(2) จะแสดงว่า ถ้า $B \in M_A$ แล้ว $A - B \in M_A$

ให้ $B \in M_A$ ดังนั้น $B = A \cap E$ สำหรับบาง $E \in M$

เนื่องจาก $A - B = A - (A \cap E) = A \cap E^c$

ดังนั้น $A - B \in M_A$

(3) จะแสดงว่า $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in M_A$,

ถ้า $A_n \in M_A$, $\forall n \geq 1$

ให้ $A_n \in M_A$, $\forall n \geq 1$

ดังนั้น $A_n = A \cap E_n$ สำหรับบาง $E_n \in M$

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n) \\ &= A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \end{aligned}$$

$$\text{และ } \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in M$$

$$\text{ดังนั้น } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in M_A$$

จาก (1), (2) และ (3) จะได้ว่า M_A เป็น σ -แอลยิบราใน A

สำหรับการแสดงว่า $\mu|_{M_A}$ เป็นเมเชอร์บน M_A

นั้นพิสูจน์ในทำนองเกี่ยวกับการพิสูจน์ข้อ 1 ในทฤษฎีบท 4.1.1

ดังนั้นจะได้ว่า $(A, M_A, \mu|_{M_A})$ เป็นเมเชอร์สเปซที่มีเมเชอร์

จำกัด

ทฤษฎี 4.2.1 ให้ (X, M, μ) เป็นพรอบบะบิลิตีสเปซ และ $\{f_k\}$

เป็นลำดับของนอเนกาทีฟอินทิเกรเบิลฟังก์ชันบน (X, M, μ)

ถ้า $f = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup f_k$ และลำดับ

$$\left(\int_{E_n} f_k d\mu \right)_{n=1}^{\infty} \text{ ลู่เข้า 0 แบบยูนิฟอร์ม บน } k$$

$$\text{โดยที่ } E_n = \{x / f(x) \geq n\}$$

แล้วจะได้ว่า $\{f_k\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int f_k d\mu \leq \int f d\mu \quad \text{สำหรับ } E \in M$$

หมายเหตุ,

$$\left(\int_{E_n} f_k d\mu \right)_{n=1}^{\infty} \text{ ลู่เข้า 0 แบบยูนิฟอร์ม บน } k$$

ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_ε

$$\text{ซึ่งถ้า } n \geq N_\varepsilon \text{ แล้ว } \int_{E_n} f_k d\mu < \varepsilon, \quad \forall k$$

พิสูจน์ ($\implies$) ถ้า $\{f_k\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล บน (X, M, μ)

$$\text{แล้ว } \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int f_k d\mu \leq \int f d\mu \quad \text{สำหรับ } E \in M$$

พิสูจน์เหมือนทฤษฎี 3.1

$$(<==) \text{ จะแสดงว่า ถ้า } \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int f_k d\mu \leq \int f d\mu$$

สำหรับ $E \in M$

แล้ว $\{f_k\}$ จะเป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิลบน (X, M, μ)

ให้ $\varepsilon > 0$ ต้องการแสดงว่า จะมี $\delta > 0$

ซึ่งถ้า $E \in M$ และ $\mu(E) < \delta$

$$\text{แล้ว } \int_E f_k d\mu < \varepsilon, \quad \forall k$$

เนื่องจาก $\left\{ \int_{E_n} f_k d\mu \right\}_{n=1}^{\infty}$ เข้าใกล้ 0 แบบยูนิฟอร์ม บน k

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มบวก N_ϵ ที่ทำให้

$$\int_{E_{N_\epsilon}} f_k d\mu < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall k$$

จาก $E_{N_\epsilon}^c = \{x / f(x) \geq N_\epsilon\}$

ดังนั้น $E_{N_\epsilon}^c = \{x / f(x) < N_\epsilon\}$

จะได้ว่า $\mu(E_{N_\epsilon}^c) \leq \mu(X) = 1 < \infty$

และ $\int_{E_{N_\epsilon}^c} f d\mu < \infty$

โดยทฤษฎีบท 4.2.1 จะได้ว่า $(E_{N_\epsilon}^c, M_{E_{N_\epsilon}^c}^c, \mu)$

เป็นเมเชอร์สเปซที่มีเมเชอร์จำกัด โดยที่ $M_{E_{N_\epsilon}^c}^c = \{E_{N_\epsilon}^c \cap E / E \in M\}$

ให้ $A \in M_{E_{N_\epsilon}^c}^c$ ดังนั้น $A \in M$

จะได้ว่า $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \int_A f_k d\mu \leq \int_A f d\mu$

นั่นคือ $\{f_k|_{E_{N_\epsilon}^c}\}$ สอดคล้องอสมการ $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \int_A f_k d\mu \leq \int_A f d\mu,$

โดยทฤษฎี 4.1.1 จะได้ว่า

$(f_k|_{E_{N_\varepsilon}^c})$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล บน $(E_{N_\varepsilon}^c, M_{E_{N_\varepsilon}^c}, \mu)$

ดังนั้น จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $A \in M_{E_{N_\varepsilon}^c}$ และ $\mu(A) < \delta$

แล้ว $\int_A f_k d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ สำหรับ $k \geq 1$

ฉะนั้น ถ้า $E \in M$ และ $\mu(E) < \delta$ แล้วจะได้ว่า $\mu(E \cap E_{N_\varepsilon}^c) < \delta$

ดังนั้น $\int_{E \cap E_{N_\varepsilon}^c} f_k d\mu < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall k \geq 1$

นั่นคือ ถ้า $E \in M, \mu(E) < \delta$ และ $\forall k \geq 1$

แล้วจะได้ว่า $\int_E f_k d\mu = \int_{(E \cap E_{N_\varepsilon}^c) \cup (E \cap E_{N_\varepsilon})} f_k d\mu$

$$\int_E f_k d\mu = \int_{E \cap E_{N_\varepsilon}^c} f_k d\mu + \int_{E \cap E_{N_\varepsilon}} f_k d\mu$$

$$\int_E f_k d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \int_{E_{N_\varepsilon}} f_k d\mu$$

$$\int_E f_k d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ดังนั้น สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $E \in M$ และ $\mu(E) < \delta$

แล้ว $\int_E f_k d\mu < \varepsilon, \quad \forall k \geq 1$

จะได้ว่า (f_k) เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล บน (X, M, μ)

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างที่สอดคล้องกับทฤษฎี 4.2.1

แสดงว่า ลำดับ $\left\{ \int_{E_n} f_k d\mu \right\}_{n=1}^{\infty}$ ลู่เข้าสู่ 0 แบบยูนีฟอร์มบน k

แล้ว $\{f_k\}$ เป็นยูนีฟอร์มอินทิเกรเบิลบนพหุคูณเบซีลิสเซต (X, M, μ)

ก็ต่อเมื่อ $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int_E f_k d\mu \leq \int_E f d\mu$ สำหรับ $E \in M$

ตัวอย่าง 4.2.1 พิจารณาพหุคูณเบซีลิสเซต $((0, 1], M, \mu)$

โดยที่ $M_{(0,1]} = \{(0, 1] \cap E \mid E \text{ เป็นเลเบกเมเชอร์เบซีลเซต, } E \subseteq \mathbb{R}\}$
 μ เป็นเลเบกเมเชอร์

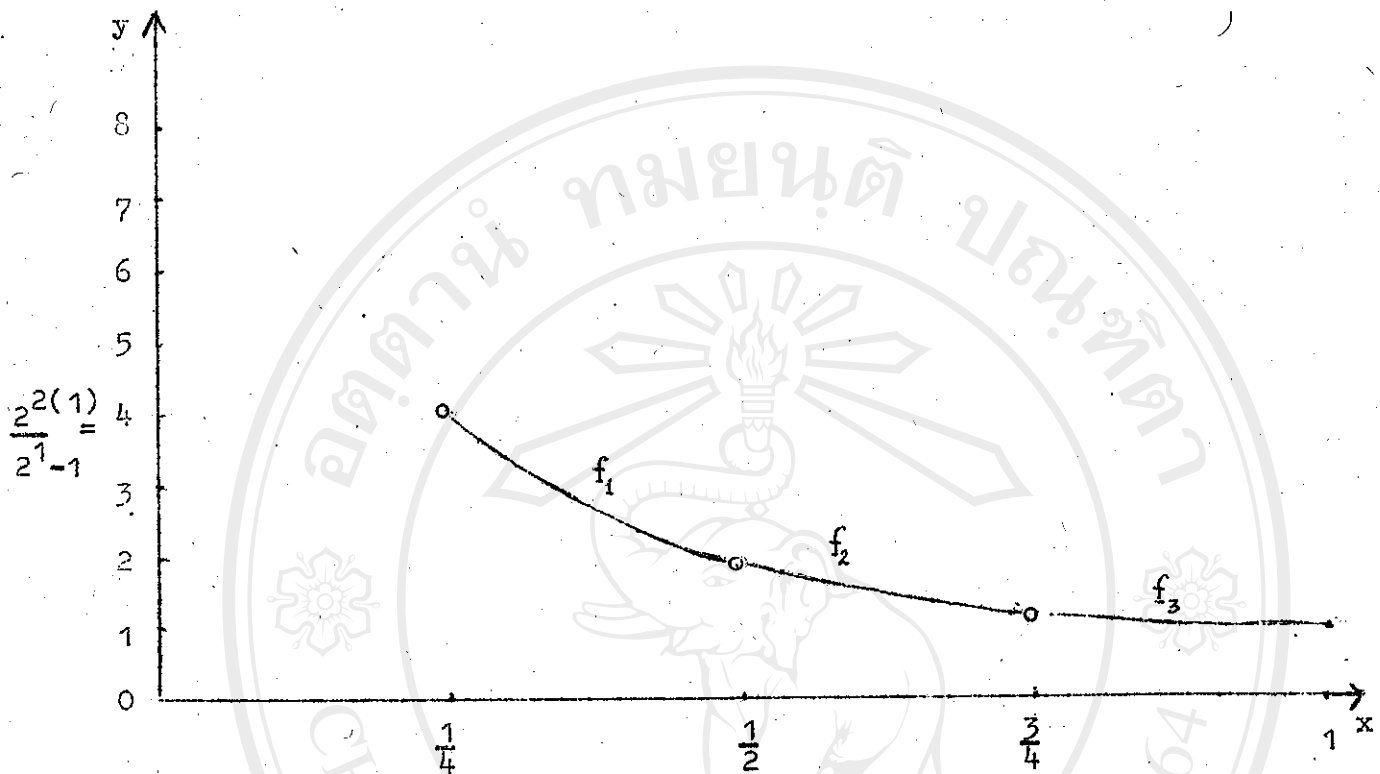
ขั้นที่ 1 แบ่งช่วง $[0, 1]$ ออกเป็น $2^{2(1)} = 4$ ส่วน
 กำหนดฟังก์ชันบนแต่ละช่วง โดยเริ่มตั้งแต่ช่วง

$$\left[\frac{2^1 - 1}{2^{2(1)}}, \frac{2^1}{2^{2(1)}} \right] = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \text{ ดังต่อไปนี้}$$

$$f_1(x) = \frac{1}{x} \chi_{\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right]}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x} \chi_{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right]}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{x} \chi_{\left(\frac{3}{4}, 1\right]}(x)$$



ขั้นที่ 2 แบ่งช่วง $[0, 1]$ ออกเป็น $2^2(2) = 16$ ส่วน

กำหนดฟังก์ชันบนแต่ละช่วง โดยเริ่มตั้งแต่ช่วง

$$\left(\frac{2^2-1}{2^{2(2)}}, \frac{2^2}{2^{2(2)}}\right] = \left(\frac{3}{16}, \frac{1}{4}\right]$$

ดังต่อไปนี้

$$f_4(x) = \frac{1}{x} \chi_{\left(\frac{3}{16}, \frac{1}{4}\right]}(x)$$

$$f_5(x) = \frac{1}{x} \chi_{\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{16}\right]}(x)$$

$$\left(\frac{3}{16}, \frac{1}{4}\right]$$

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{16}\right]$$

$$f_6(x) = \frac{1}{x} \chi_{\left(\frac{5}{16}, \frac{3}{8}\right]}(x)$$

$$f_7(x) = \frac{1}{x} \chi_{\left(\frac{3}{8}, \frac{7}{16}\right]}(x)$$

$$f_8(x) = \frac{1}{x} \chi_{\left(\frac{7}{16}, \frac{1}{2}\right]}(x)$$

$$f_9(x) = \frac{1}{x} \chi_{\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{16}\right]}(x)$$

$$f_{10}(x) = \frac{1}{x} \chi_{\left(\frac{9}{16}, \frac{5}{8}\right]}(x)$$

$$f_{11}(x) = \frac{1}{x} \chi_{\left(\frac{5}{8}, \frac{11}{16}\right]}(x)$$

$$f_{12}(x) = \frac{1}{x} \chi_{\left(\frac{11}{16}, \frac{3}{4}\right]}(x)$$

$$f_{13}(x) = \frac{1}{x} \chi_{\left(\frac{3}{4}, \frac{13}{16}\right]}(x)$$

$$f_{14}(x) = \frac{1}{x} \chi_{\left(\frac{13}{16}, \frac{7}{8}\right]}(x)$$

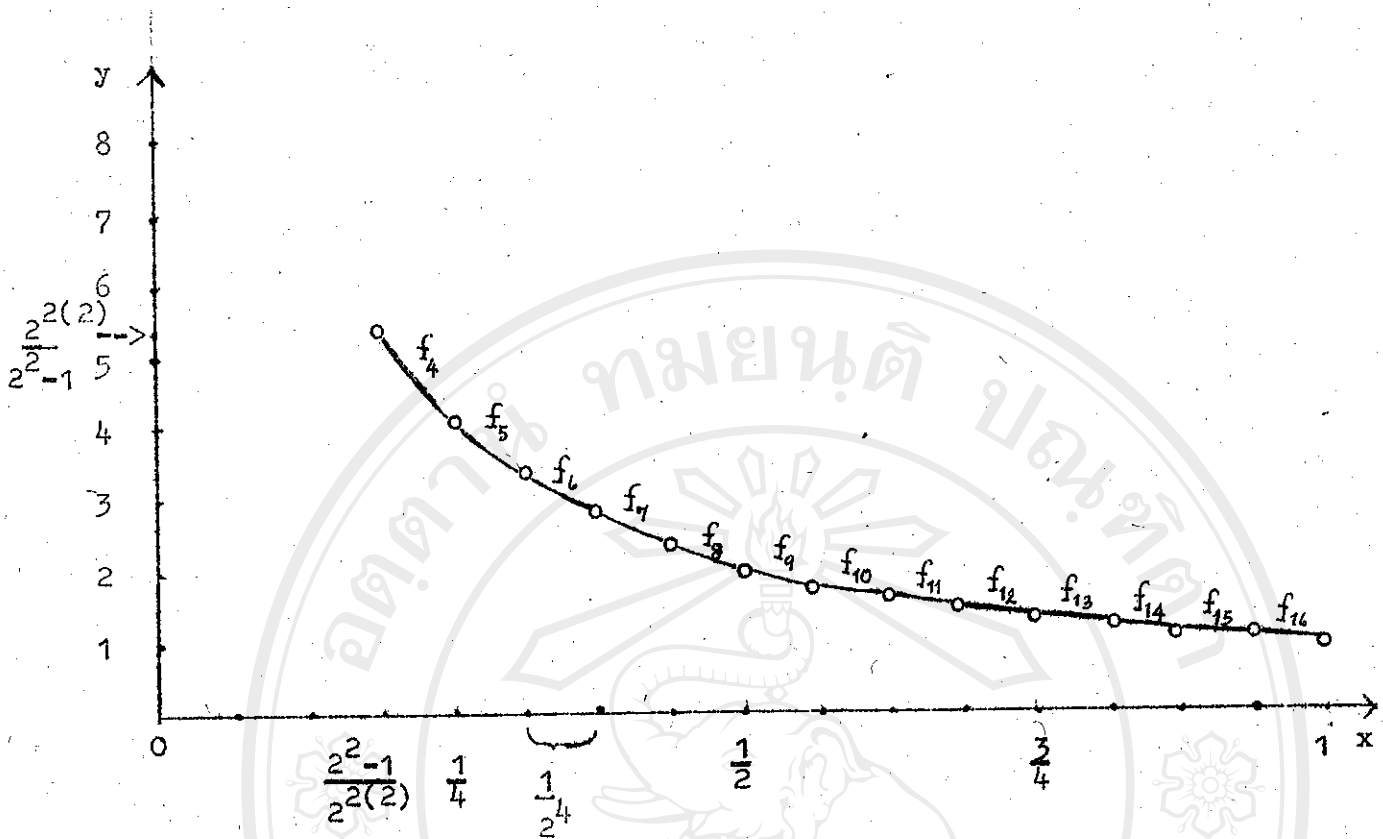
$$f_{15}(x) = \frac{1}{x} \chi_{\left(\frac{7}{8}, \frac{15}{16}\right]}(x)$$

$$f_{16}(x) = \frac{1}{x} \chi_{\left(\frac{15}{16}, 1\right]}(x)$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright© by Chiang Mai University

All rights reserved



ขั้นที่ 3 แบ่งช่วง $[0, 1]$ ออกเป็น $2^2(3) = 64$ ส่วน
กำหนดฟังก์ชันบนแต่ละช่วง โดยเริ่มตั้งแต่ช่วง

$$\left(\frac{2^3-1}{2^2(3)}, \frac{2^3}{2^2(3)}\right] = \left(\frac{7}{64}, \frac{1}{8}\right]$$

ดังต่อไปนี้

$$f_{17}(x) = \frac{1}{x} \times (x) \quad \left(\frac{7}{64}, \frac{1}{8}\right]$$

$$f_{18}(x) = \frac{1}{x} \times (x) \quad \left(\frac{1}{8}, \frac{9}{64}\right]$$

$$f_{19}(x) = \frac{1}{x} \times (x) \quad \left(\frac{9}{64}, \frac{10}{64}\right]$$

⋮

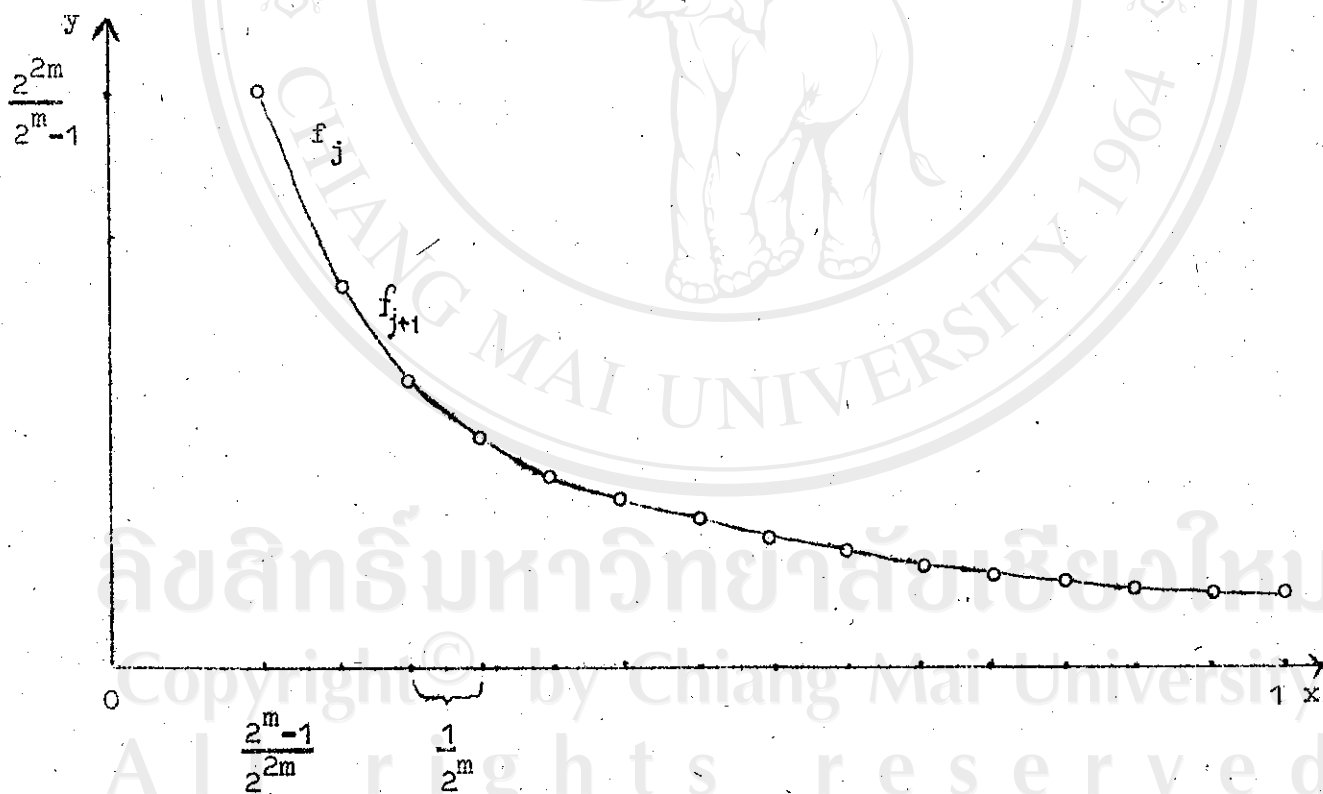
ขั้นที่ m แบ่งช่วง $[0, 1]$ ออกเป็น $2^{2(m)}$ ส่วน

กำหนดฟังก์ชันบนแต่ละช่วง โดยเริ่มคนแต่ละช่วง $(\frac{2^m-1}{2^{2m}}, \frac{2^m}{2^{2m}}]$

ดังต่อไปนี้

$$f_j(x) = \frac{1}{x} \chi(x) \quad \left(\frac{2^m-1}{2^{2m}}, \frac{2^m}{2^{2m}} \right]$$

$$f_{j+1}(x) = \frac{1}{x} \chi(x) \quad \left(\frac{2^m}{2^{2m}}, \frac{2^m+1}{2^{2m}} \right]$$



(1) จะแสดงว่า $\left\{ \int_{E_n} f_j d\mu \right\}_{n=1}^{\infty}$ ลู่เข้าสู่ 0 แบบยูนิฟอร์ม บน J

โดยที่ $E_n = \{x / f(x) \geq n\}$

ให้ $\epsilon > 0$

จะหาจำนวนเต็มบวก N_ϵ ที่ทำให้

$$\int_{E_n} f_j d\mu < \epsilon \quad \text{สำหรับทุก } j \text{ และ } n \geq N_\epsilon$$

พิจารณาในขั้นที่ m จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_X f_j d\mu &\leq \int_{\left(\frac{2^{m-1}}{2^{2m}}, \frac{2^m}{2^{2m}}\right]} \frac{2^{2m}}{2^{m-1}} d\mu \\ &= \frac{2^{2m}}{2^{m-1}} \cdot \frac{1}{2^{2m}} \\ &= \frac{1}{2^{m-1}} < \frac{1}{2^{m-1}} \end{aligned}$$

จะมีจำนวนเต็มบวก N_1 ที่ทำให้ $\frac{1}{2^{m-1}} < \epsilon$

สำหรับ $m \geq N_1$

จะได้ว่า สำหรับทุก f_j ในขั้นที่ $m \geq N_1$,

$$\int_{E_n} f_j d\mu \leq \int_X f_j d\mu < \epsilon$$

Copyright © Chiang Mai University
All rights reserved

พิจารณาในชั้นที่ $1, 2, 3, \dots, N_1$

$$\text{จาก } E_n = \{x / f(x) \geq n\} = (0, \frac{1}{n}]$$

$$\text{เลือก } N_2 > N_1 \quad \text{ที่} \quad \frac{1}{N_2} < \frac{2^{\frac{N_1-1}{2N_1}}}{2}$$

$$\text{ดังนั้นจะได้ว่า } \int_{E_n} f_j d\mu = 0$$

สำหรับ f_j ในชั้นที่ $1, 2, \dots, N_1$, $\forall n \geq N_2$

นั่นคือสำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่งถ้า $n \geq N_2$

$$\text{แล้วจะได้ว่า } \int_{E_n} f_j d\mu < \varepsilon \quad \text{สำหรับ } j \geq 1$$

(2) ต้องการแสดงว่า $\{f_j\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล

ให้ $\varepsilon > 0$

จะหา $\delta > 0$ ที่ทำให้ $\int_E f_j d\mu < \varepsilon$, $\forall j$

และ $\forall E \in \mathcal{M}$ ที่ $\mu(E) < \delta$

พิจารณาในชั้นที่ m

$$\text{จะได้ว่า } \int_X f_j d\mu \leq \int_{(\frac{2^m-1}{2^{2m}}, \frac{2^m}{2^{2m}}]} \frac{2^{2m}}{2^{2m}-1} d\mu$$

Copyright © by Chiang Mai University

$$= \frac{2^{2m}}{2^m-1} \cdot \frac{1}{2^{2m}} = \frac{1}{2^m-1} < \frac{1}{2^{m-1}}$$

ดังนั้น f_j เป็นอินทิเกรตเปิดฟังก์ชันทุก ๆ j

จะมีจำนวนเต็มบวก N_ϵ ที่ทำให้ $\frac{1}{2^{m-1}} < \epsilon$ สำหรับทุก $m \geq N_\epsilon$

ดังนั้นสำหรับทุก ๆ f_j ในชั้นที่ $m \geq N_\epsilon$ จะได้ว่า

ถ้า $E \in M_{(0,1]}$ แล้ว

$$\int_E f_j d\mu \leq \int_X f_j d\mu < \epsilon$$

พิจารณาฟังก์ชัน f_i ในชั้นที่ $1, 2, \dots, N_\epsilon$

เนื่องจาก f_i เป็นอินทิเกรตเปิดฟังก์ชัน โดยทฤษฎี 2.4.5 จะได้ว่า

มี $\delta_i > 0$ ที่ทำให้

$$\int_E f_i d\mu < \epsilon \quad \text{สำหรับทุก ๆ } E \in M_{(0,1]} \text{ ที่ } \mu(E) < \delta_i$$

ให้ $\delta = \min\{\delta_i / \text{สำหรับทุก } f_i \text{ ในชั้นที่ } 1, 2, \dots, N_\epsilon\}$

ดังนั้นจะได้ว่า $\int_E f_i d\mu < \epsilon \quad \forall E \in M_{(0,1]} \text{ ที่ } \mu(E) < \delta$

นั่นคือ ทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $E \in M_{(0,1]}$

และ $\mu(E) < \delta$ แล้ว $\int_E f_j d\mu < \epsilon, \quad \forall j \geq 1$

ดังนั้น $\{f_j\}$ เป็นอนุกรมอินทิเกรตเปิด

(3) จะแสดงว่า $\lim_{j \rightarrow \infty} \sup \int_E f_j d\mu \leq \int_E f d\mu$ สำหรับ $E \in M_{(0,1]}$

เนื่องจาก $\sup_{i \geq n} f_i(x) = \sup \{f_n(x), f_{n+1}(x), \dots\} = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sup f_j(x), \quad x \in (0,1] \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

ให้ $E \in \mathcal{M}_{(0,1]}$

เนื่องจาก $f_j(x) \leq f(x)$ สำหรับทุก ๆ j และ $x \in (0,1]$

ดังนั้น $\int_E f_j d\mu \leq \int_E f d\mu$ สำหรับทุก ๆ $j \geq 1$

จะได้ว่า $\lim_{j \rightarrow \infty} \sup \int_E f_j d\mu \leq \int_E f d\mu$

(4) จะแสดงว่า $\int_X f d\mu = \infty$

เนื่องจาก $f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in (0,1]$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \int_X f d\mu &= \int_{(0,1]} f d\mu \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\ln x \right]_{\varepsilon}^1 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln \varepsilon) \\ &= \infty \end{aligned}$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright© by Chiang Mai University

All rights reserved

ตัวอย่างที่ไม่สอดคล้องทฤษฎี 4.2.1

ตัวอย่าง 4.2.2 ให้ $((0,1], M_{(0,1]}, \mu)$ เป็นเมเชอร์สเปซ

โดยที่ $M_{(0,1]} = \{(0,1] \cap E / E \subseteq \mathbb{R} \text{ และ } E$

เป็นเลเบกเมเชอร์เบ็ดเขต}

μ เป็นเลเบกเมเชอร์

ให้ $f_j(x) = 2^n \chi_{\left(\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right]}(x)$, $\forall x \in (0,1]$

เมื่อ $j = 2^n - 2 + i$, $1 \leq i \leq 2^n$ และ $n \geq 1$

จะแสดงว่า

$$(1) \int_X f d\mu = \infty$$

$$(2) \left(\int_{E_m} f_k d\mu \right)_{m=1}^{\infty} \text{ เข้าสู่อ } 0 \text{ แบบไม่ยูนิฟอร์มบน } k$$

$$(3) (f_k) \text{ ไม่เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิลบนพหุคูณเบบิลิตีสเปซ } ((0,1], M_{(0,1]}, \mu)$$

$$(4) \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int f_k d\mu \leq \int f d\mu, \forall E \in M$$

สำหรับการแสดงว่า $\int_X f d\mu = \infty$, (f_k) ไม่เป็น

ยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิลบนพหุคูณเบบิลิตีสเปซ (X, M, μ)

และ (f_k) สอดคล้องข้อสมการ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int f_k d\mu \leq \int f d\mu, \forall E \in M$$

คือตัวอย่าง 3.2 ในหน้า 29

ต่อไปจะแสดงว่า $\left\{ \int_{E_m} f_k d\mu \right\}_{m=1}^{\infty}$ ลู่เข้าสู่ 0 แบบไม่ยูนิฟอร์มบน k

เมื่อ $E_m = \{x / f(x) \geq m\}$ และ $f = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup f_k$

จากนิยาม $\left\{ \int_{E_m} f_k d\mu \right\}_{m=1}^{\infty}$ ลู่เข้าสู่ 0 แบบไม่ยูนิฟอร์ม บน k

ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_ε ซึ่งถ้า

ซึ่งถ้า $m \geq N_\varepsilon$ แล้วจะได้ว่า $\int_{E_m} f_k d\mu < \varepsilon, \quad \forall k$

ดังนั้น $\left\{ \int_{E_m} f_k d\mu \right\}_{m=1}^{\infty}$ ลู่เข้าสู่ 0 แบบไม่ยูนิฟอร์ม บน k

ก็ต่อเมื่อ จะมี $\varepsilon > 0$ สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก N

จะมีจำนวนเต็มบวก m และมี k ที่ $m \geq N$

แต่ $\int_{E_m} f_k d\mu \geq \varepsilon$

เนื่องจาก $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup f_k(x) = \infty, \quad \forall x \in (0,1]$

ดังนั้น ถ้าให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}$ และ N เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

จะได้ว่า ถ้า $m \geq N$ แล้ว $E_m = \{x / f(x) \geq m\} = (0,1]$

และ $\int_{E_m} f_k d\mu = \int_{(0,1]} f_k d\mu = 1 > \frac{1}{2}$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright© by Chiang Mai University

All rights reserved

ข้อสังเกต (1) ทฤษฎี 4.2.1 จะครอบคลุมทั้งกรณี $\int_X f d\mu < \infty$

$$\text{และ } \int_X f d\mu = \infty$$

ก. ตัวอย่างที่สอดคล้องทฤษฎี 4.2.1 ในกรณีที่

$\int_X f d\mu < \infty$ คือ ตัวอย่าง 3.3 ในบทที่ 3 ซึ่งแสดงว่า

$$\int_X f d\mu < \infty, \left\{ \int_{E_m} f_n d\mu \right\}_{m=1}^{\infty}$$

ดูเข้าสู่อะไร 0 แบบยูนิฟอร์ม บน n

$$\text{เมื่อ } E_m = \{x / f(x) \geq m\} \quad \text{และ}$$

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup f_n, \{f_n\} \text{ เป็นยูนิฟอร์มอินทิ-}$$

เกรเบิลบนพหุคูณบะบิลิสเปซ และ $\{f_n\}$ สอดคล้อง

$$\text{อสมการ } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_E \int f_n d\mu \leq \int_E f d\mu, \quad \forall E \in M$$

ข. ตัวอย่างที่สอดคล้องทฤษฎี 4.2.1 ในกรณีที่

$$\int_X f d\mu = \infty \text{ คือตัวอย่าง 4.2.1 ซึ่งแสดงว่า}$$

$$\int_X f d\mu = \infty, \left\{ \int_{E_n} f_k d\mu \right\}_{n=1}^{\infty} \text{ ดูเข้าสู่อะไร } 0$$

แบบยูนิฟอร์มบน k เมื่อ $E_n = \{x / f(x) \geq n\}$

$$\text{และ } f = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup f_k, \{f_k\} \text{ เป็นยูนิฟอร์ม}$$

อินทิเกรเบิลบนพหุคูณบะบิลิสเปซ (X, M, μ)

และ $\{f_k\}$ สอดคล้องอสมการ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int f_k d\mu \leq \int_E f d\mu, \quad \forall E \in M$$

ข้อสังเกต (2) ถ้า $\int_X f d\mu < \infty$ และ $\{f_k\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล

ก็ต่อเมื่อ $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int f_k d\mu \leq \int_E f d\mu, \quad E \in M$

และจะได้ว่า $\left(\int_{E_n} f_k d\mu \right)_{n=1}^{\infty}$ ลู่เข้าสู่ 0 แบบยูนิฟอร์มบน k

โดยที่ $E_n = \{x / f(x) \geq n\}$

พิสูจน์ ต้องการแสดงว่า สำหรับ $\epsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_ϵ

ซึ่งถ้า $n \geq N_\epsilon$ แล้วจะได้ $\int_{E_n} f_k d\mu < \epsilon, \quad \forall k$

เนื่องจาก $E_n = \{x / f(x) \geq n\}$

จะได้ว่า $n \chi_{E_n} \leq f$

$$\int_X n \chi_{E_n} d\mu \leq \int_X f d\mu < \infty$$

ให้ $\int_X n \chi_{E_n} d\mu = L$ เมื่อ L เป็นจำนวนจริง

$$n \cdot \mu(E_n) = L$$

$$\mu(E_n) = \frac{L}{n}$$

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = 0$

ให้ $\epsilon > 0$

เนื่องจาก $\{f_k\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล

ดังนั้น จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $\mu(E) < \delta$ แล้วจะได้ว่า

$$\int_E f_k d\mu < \epsilon \quad \forall k$$

เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = 0$

จะมีจำนวนเต็มบวก N_ε ซึ่งถ้า $n \geq N_\varepsilon$

แล้ว $\mu(E_n) < \delta$

ฉะนั้น $\int_{E_n} f_k d\mu < \varepsilon, \forall k$

นั่นคือ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_ε

ที่ทำให้ $\int_{E_n} f_k d\mu < \varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon$ และ $\forall k$

4.3 ขยายทฤษฎี 3.1 ไปยังเมเชอร์สเปซ (X, M, μ) ใดๆ

สำหรับในทฤษฎี 3.1, 4.1.1 และ 4.2.1 นั้น เป็นการศึกษา
เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ว่า ลำดับ $\{f_n\}$ ของนอนเนกาทีฟอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน

เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_E \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$

สำหรับ $E \in M$ บนเมเชอร์สเปซ (X, M, μ) ที่ $\mu(X) < \infty$

ต่อไปนี้จะเป็นการศึกษาเพื่อให้ได้ผลลัพธ์เช่นเดียวกันกับทฤษฎีดังกล่าว
บนเมเชอร์สเปซ (X, M, μ) ใดๆ โดยอาศัยทฤษฎีนำต่อไปนี้

ทฤษฎีนำ 4.3.1 ให้ f เป็นนอนเนกาทีฟอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน บนเมเชอร์

สเปซ (X, M, μ)

ให้ $M_A = \{A \cap E / E \in M\}$ เมื่อ $A \in M,$

$\mu(A) < \infty$ และ $\mu(A) \neq 0$

และ $\mu_A(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(A)}$ สำหรับ $B \in M_A$

จะได้ว่า (1) M_A เป็น σ -แอลจีบราใน A

μ_A เป็นเมเชอร์ บน M_A

และ (A, M_A, μ_A) เป็นพหุคูณวัดที่สมบูรณ์

$$(2) \int_B g d\mu_A = \int_B \frac{g d\mu}{\mu(A)}$$

เมื่อ $B \in M_A$ และ $g = f|_B$

(3) ถ้า $\{f_n\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันอินทิเกรเบิล ที่เป็นอนุกรมอินทิเกรเบิล บน (X, M, μ) แล้ว $\{f_n\}$ จะเป็นอนุกรมอินทิเกรเบิล

บน (A, M_A, μ_A)

พิสูจน์

โดยการพิสูจน์ทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.2.1
จะได้ (1) และ (2) เป็นจริง และในทำนองเดียวกันกับ
การพิสูจน์ ในกรณี 2 ของทฤษฎีบท 4.1.1 จะได้ว่า (3)
เป็นจริง

ทฤษฎีบท 4.3.2 ให้ (X, M, μ) เป็นเมเชอร์สเปซ และ $\{f_k\}$

เป็นลำดับของนอเนกาทีฟอินทิเกรเบิลฟังก์ชันที่เป็นยูนิฟอร์ม-
อินทิเกรเบิล บน (X, M, μ)

ถ้า $E \in M$, $\int \lim_{k \rightarrow \infty} \sup f_k d\mu < \infty$

และ $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

โดยที่ $\{E_i\}$ เป็นลำดับของเมเชอร์เซต

$E_j \cap E_k = \emptyset$ เมื่อ $j \neq k$, $\mu(E_i) < \infty$

ซึ่งสำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_ε

ที่ทำให้ $\sum_{i=m}^{\infty} \sup_{E_i} \{ \int f_1 d\mu, \int f_2 d\mu, \dots \} < \varepsilon$,

$\forall m \geq N_\varepsilon$

แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sup_{E_i} \{ \int f_k d\mu, \int f_{k+1} d\mu, \dots \}$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sup_{E_i} \{ \int f_k d\mu, \int f_{k+1} d\mu, \dots \}$$

พิสูจน์ ตอน(1) จะแสดงว่า $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{km}$ หาค่าได้ สำหรับแต่ละ m

โดยที่

$$x_{km} = \sum_{i=1}^m \sup_{E_i} \{ \int f_k d\mu, \int f_{k+1} d\mu, \dots \} \quad \forall k, \forall m$$

และ (x_{km}) เป็นลำดับที่คูณ ใน R

พิจารณาสำหรับแต่ละ m ให้ x_m เป็นลำดับ ใน R

$$\text{โดยที่ } x_m = \left(\sum_{i=1}^m \sup \left(\int_{E_i} f_k d\mu, \int_{E_i} f_{k+1} d\mu, \dots \right) \right)_{k=1}^{\infty}$$

$$\text{จะได้ว่า } x_m = \sum_{i=1}^m \sup \left(\int_{E_i} f_1 d\mu, \int_{E_i} f_2 d\mu, \dots \right),$$

$$\sum_{i=1}^m \sup \left(\int_{E_i} f_2 d\mu, \int_{E_i} f_3 d\mu, \dots \right),$$

$$\sum_{i=1}^m \sup \left(\int_{E_i} f_3 d\mu, \int_{E_i} f_4 d\mu, \dots \right), \dots$$

เป็นลำดับที่ไม่เพิ่มขึ้น และมี 0 เป็นขอบเขตล่าง
ดังนั้น

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_m = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^m \sup \left(\int_{E_i} f_k d\mu, \int_{E_i} f_{k+1} d\mu, \dots \right) \right)$$

หากใด สำหรับแต่ละ m

ทอน(2) จะแสดงว่า สำหรับแต่ละ k เมื่อ k มีค่ามาก

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^m \sup \left(\int_{E_i} f_k d\mu, \int_{E_i} f_{k+1} d\mu, \dots \right) \right) \text{ หากใด}$$

พิจารณาสำหรับแต่ละ k , ให้ y_k เป็นลำดับใน R

โดยที่ $Y_k = \left\{ \sum_{i=1}^m \sup \left\{ \int_{E_i} f_k d\mu, \int_{E_i} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} \right\}_{m=1}^{\infty}$

จะได้ว่า $Y_k = \sup \left\{ \int_{E_1} f_k d\mu, \int_{E_1} f_{k+1} d\mu, \dots \right\},$
 $\sum_{i=1}^2 \sup \left\{ \int_{E_i} f_k d\mu, \int_{E_i} f_{k+1} d\mu, \dots \right\},$
 $\sum_{i=1}^3 \sup \left\{ \int_{E_i} f_k d\mu, \int_{E_i} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} \dots$

เป็นลำดับที่ลดลง และมีขอบเขตบน ซึ่งแสดงได้ดังนี้

เลือก N_1 ที่ทำให้ $\sum_{i=N_1+1}^{\infty} \sup \left\{ \int_{E_i} f_1 d\mu, \int_{E_i} f_2 d\mu, \dots \right\} < 1$

จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $k \geq 1, m \geq 1$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \sup \left\{ \int_{E_i} f_k d\mu, \int_{E_i} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} \\ & \leq \sum_{i=1}^{N_1} \sup \left\{ \int_{E_i} f_k d\mu, \int_{E_i} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} + \\ & \quad \sum_{i=N_1+1}^{\infty} \sup \left\{ \int_{E_i} f_k d\mu, \int_{E_i} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N_1} \sup \left\{ \int_{E_i} f_k d\mu, \int_{E_i} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} + 1 \quad (1)$$

พิจารณา $\sum_{i=1}^{N_1} \sup \left\{ \int_{E_i} f_k d\mu, \int_{E_i} f_{k+1} d\mu, \dots \right\}$

$$\text{ให้ } A = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{N_1}$$

ดังนั้น $\mu(A) < \infty$ และ $\int_A f d\mu < \infty$ โดยที่ $f = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup f_k$

$$\text{สมมติว่า } \int_A f d\mu = L$$

ให้ $(A, M_A, \mu|_{M_A})$ เป็นเหมือนในทฤษฎี 4.2.1

เนื่องจาก (f_k) เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิลบน (X, M, μ)

ดังนั้น (f_k) เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิลบน $(A, M_A, \mu|_{M_A})$

โดยทฤษฎี 4.1.1 จะได้ว่า $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \int_A f_k d\mu \leq \int_A f d\mu$

ดังนั้นสำหรับ $1 \leq i \leq N_1$ จะได้ว่า

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{E_i} \int f_k d\mu \leq \int_A f d\mu = L$$

จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \int_{E_i} f_k d\mu \leq L$

เลือกจำนวนเต็มบวก N_2 ที่ทำให้

$$\sup_{k \geq N_2} \int_{E_i} f_k d\mu \leq L + 1$$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{N_1} \sup_{k \geq N_2} \int_{E_i} f_k d\mu \leq N_1(L + 1)$

นั่นคือ สำหรับ $k \geq N_2$ จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{N_1} \sup \left\{ \int_{E_i} f_k d\mu, \int_{E_i} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} \leq N_1(L + 1) \quad (2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^m \sup \left\{ \int_{E_i} f_k d\mu, \int_{E_i} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} < N_1(L+1) + 1$$

สำหรับ $k \geq N_2$

ดังนั้นสำหรับแต่ละ $k \geq N_2$ จะได้ว่า

$$\text{ลำดับ } \left\{ \sum_{i=1}^m \sup \left\{ \int_{E_i} f_k d\mu, \int_{E_i} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} \right\}_{m=1}^{\infty}$$

เป็นลำดับที่ไม่ลจอง และมี $N_1(L+1) + 1$ เป็นขอบเขตบน

$$\text{จะได้ว่า } \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^m \sup \left\{ \int_{E_i} f_k d\mu, \int_{E_i} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} \right)$$

หาค่าได้ สำหรับแต่ละ k เมื่อ $k \geq N_2$

ตอนที่ (3) จะแสดงว่า

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sup \left\{ \int_{E_i} f_k d\mu, \int_{E_i} f_{k+1} d\mu, \dots \right\}$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sup \left\{ \int_{E_i} f_k d\mu, \int_{E_i} f_{k+1} d\mu, \dots \right\}$$

ให้ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_ε ที่ทำให้

$$\left| \sum_{i=1}^m \sup \left\{ \int_{E_i} f_k d\mu, \int_{E_i} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} - \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^{\infty} \sup \left\{ \int_{E_i} f_k d\mu, \int_{E_i} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} \right|$$

$$= \sum_{i=m+1}^{\infty} \sup \left\{ \int_{E_i} f_k d\mu, \int_{E_i} f_{k+1} d\mu, \dots \right\}$$

$< \varepsilon$

สำหรับ $m \geq N_\varepsilon$ และ $k \geq 1$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^m \sup \left\{ \int_{E_i} f_k d\mu, \int_{E_i} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sup \left\{ \int_{E_i} f_k d\mu, \int_{E_i} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} \end{aligned}$$

หาค่าได้ สำหรับแต่ละ k

โดยทฤษฎี 2.8.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sup \left\{ \int_{E_i} f_k d\mu, \int_{E_i} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sup \left\{ \int_{E_i} f_k d\mu, \int_{E_i} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} \end{aligned}$$

ทฤษฎี 4.3.1 ให้ (X, M, μ) เป็นเมเชอร์สเปซ และ $\{f_k\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ทั้งหมดบน (X, M, μ) ถ้าสำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $E \in M$ และ $\mu(E) < \delta$ แล้ว $\int_E f d\mu < \epsilon$ โดยที่ $f = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup f_k$

และสำหรับ $E \in M$

มี $\{E_n\}$ เป็นลำดับของเมเชอร์เซตที่ $E_i \cap E_j = \emptyset$

เมื่อ $i \neq j$, $\mu(E_n) < \infty$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

ซึ่งทุกๆ $\epsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_ϵ ที่ทำให้

$$\sum_{n=m}^{\infty} \sup \left\{ \int_{E_n} f_1 d\mu, \int_{E_n} f_2 d\mu, \dots \right\} < \varepsilon, \quad \forall m \geq N_\varepsilon$$

แล้วจะได้ว่า $\{f_k\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int_E f_k d\mu \leq \int_E f d\mu, \quad \forall E \in M$$

พิสูจน์ ($\Leftarrow$) จะแสดงว่า ถ้า $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int_E f_k d\mu \leq \int_E f d\mu, \quad \forall E \in M$

แล้ว $\{f_k\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิลบน (X, M, μ)

พิสูจน์เหมือนในทฤษฎี 3.1 เพราะ สำหรับ $\varepsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $E \in M$ และ $\mu(E) < \delta$ แล้ว $\int_E f d\mu < \varepsilon$

($\Rightarrow$) จะแสดงว่า ถ้า $\{f_k\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล

บน (X, M, μ)

แล้ว $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int_E f_k d\mu \leq \int_E f d\mu$ สำหรับ $E \in M$

ให้ $E \in M$

ถ้า $\int_E f d\mu = \infty$

แล้วจะได้ว่า $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int_E f_k d\mu \leq \int_E f d\mu$

ถ้า $\int_E f d\mu < \infty$ แบ่งเป็น 2 กรณี

กรณี 1 ให้ $\mu(E) < \infty$

ถ้า $\mu(E) = 0$ จะได้ว่า $\int_E f d\mu = 0$

และ $\int_E f_k d\mu = 0, \forall k \geq 1$

ดังนั้น $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \int_E f_k d\mu \leq \int_E f d\mu$

ถ้า $\mu(E) \neq 0$

ให้ $M_E = \{A \cap E / A \in M\}$

และ $\mu_E(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(E)}$ เมื่อ $B \in M_E$

โดยทฤษฎีบท 4.3.1 จะได้ว่า M_E เป็น σ -แอลยิบรา ใน E ,

μ_E เป็นเมเชอร์บน M_E และ $\{f_n\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิลบนพหุคูณบิลด์สเปซ (E, M_E, μ_E)

เนื่องจาก $\int_E f d\mu < \infty$

และโดยทฤษฎีบท 4.3.1 จะได้ว่า $\int_E f d\mu = \mu(E) \cdot \int_E f d\mu_E$

ดังนั้น $\mu(E) \cdot \int_E f d\mu_E < \infty$

$\int_E f d\mu_E < \infty$

โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \int_B f_k d\mu_E \leq \int_B f d\mu_E$

สำหรับ $B \in M_E$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{A \cap E} \int_{A \cap E} f_k d\mu_E \leq \int_{A \cap E} f d\mu_E$$

สำหรับ $A \in M$

$$\text{จะได้ว่า } \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int_E f_k d\mu_E \leq \int_E f d\mu_E \quad \text{เมื่อ } A = X$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int_E \frac{f_k d\mu}{\mu(E)} \leq \int_E \frac{f d\mu}{\mu(E)}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int_E f_k d\mu \leq \int_E f d\mu$$

กรณี 2 ให้ $\mu(E) = \infty$

ให้ $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ โดยที่ $\{E_n\}$ เป็นลำดับของเมเชอเว

เปิดเซต ที่ $E_i \cap E_j = \emptyset$ เมื่อ $i \neq j$, $\mu(E_n) < \infty$

และสำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_ε ที่ทำให้

$$\sum_{n=m}^{\infty} \sup \left\{ \int_{E_n} f_1 d\mu, \int_{E_n} f_2 d\mu, \dots \right\} < \varepsilon \quad \text{สำหรับ } m \geq N_\varepsilon$$

เนื่องจาก $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ และ $E_i \cap E_j = \emptyset$ เมื่อ $i \neq j$

$$\text{จะได้ว่า } \int_E f d\mu = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu$$

$$\text{และ } \int_E f_k d\mu = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f_k d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f_k d\mu \quad \forall k \geq 1$$

เนื่องจาก $\int_{E_n} f d\mu < \infty$ และ $\mu(E_n) < \infty \quad \forall n \geq 1$

โดยอาศัยกรณี 1 จะได้ว่า

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{E_n} \int f_k d\mu \leq \int_{E_n} f d\mu \quad \forall n \geq 1$$

พิจารณา $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int f_k d\mu$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int f_k d\mu &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \left\{ \int_{E_k} f_k d\mu, \int_{E_{k+1}} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f_k d\mu, \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sup_{E_1} \left\{ \int_{E_1} f_k d\mu, \int_{E_1} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} + \right. \\ &\quad \left. \sup_{E_2} \left\{ \int_{E_2} f_k d\mu, \int_{E_2} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} + \right. \\ &\quad \left. \sup_{E_3} \left\{ \int_{E_3} f_k d\mu, \int_{E_3} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} + \right. \\ &\quad \left. \dots \dots \dots \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^m \sup \left\{ \int_{E_n} f_k d\mu, \int_{E_n} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^m \sup \left\{ \int_{E_n} f_k d\mu, \int_{E_n} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \left\{ \int_{E_n} f_k d\mu, \int_{E_n} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \left\{ \int_{E_n} f_k d\mu, \int_{E_n} f_{k+1} d\mu, \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{E_n} \int f_k d\mu \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu = \int_E f d\mu
\end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ว่า $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int f_k d\mu \leq \int_E f d\mu$ สำหรับ $E \in M$

นั่นคือ ถ้า $\{f_k\}$ เป็นอนุกรมอินทิเกรตแบบบน (X, M, μ)

แล้วจะได้ว่า $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int f_k d\mu \leq \int_E f d\mu$, $\forall E \in M$

จากทฤษฎี 4.3.1 จะทำให้ได้บทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 4.3.2 ให้ (X, M, μ) เป็นเมเชอร์สเปซ

และ $\{f_k\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันอินทิเกรตแบบบวก

บน (X, M, μ)

ถ้า $f = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup f_k$, $\int_X f d\mu < \infty$

โดยที่ $f = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup f_k$

และสำหรับ $E \in M$ มีลำดับ $\{E_n\}$ เป็นลำดับของเมเชอร์เซต

เซตที่ $E_i \cap E_j = \emptyset$ เมื่อ $i \neq j$, $\mu(E_n) < \infty$,

$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ซึ่งสำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวน

เต็มบวก N_ε ที่ทำให้

$$\sum_{n=m}^{\infty} \sup \left\{ \int_{E_n} f_1 d\mu, \int_{E_n} f_2 d\mu, \dots \right\} < \epsilon, \quad \forall m \geq N_\epsilon$$

แล้วจะได้ว่า $\{f_k\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิลบน

(X, M, μ) ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int_E f_k d\mu \leq \int_E f d\mu, \quad \forall E \in M$$

พิสูจน์

เนื่องจาก $\int_X f d\mu < \infty$

โดยทฤษฎี 2.4.5 จะได้ว่า

สำหรับ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $E \in M$

และ $\mu(E) < \delta$ แล้วจะได้ว่า $\int_E f d\mu < \epsilon$

โดยอาศัยทฤษฎี 4.3.1 จะได้ว่า

$\{f_k\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิลบน (X, M, μ) ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int_E f_k d\mu \leq \int_E f d\mu, \quad \forall E \in M$$

ข้อสังเกต

จะเห็นว่าทฤษฎี 4.3.1 จะครอบคลุมทั้งกรณี $\int_X f d\mu = \infty$

และ $\int_X f d\mu < \infty$ โดยตัวอย่าง 4.3.1 และ 4.3.2

ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่สอดคล้องของทฤษฎี 4.3.1 ซึ่งแสดงว่า ถ้า

$$(1) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{ถ้า } \mu(E) < \delta \quad \text{แล้ว } \int_E f d\mu < \epsilon$$

(2) สำหรับ $E \in \mathcal{M}$ จะมีลำดับ (E_n) เป็นลำดับของ
เมเชอเรเบิเคตที่ $E_i \cap E_j = \emptyset$ เมื่อ $i \neq j$,

$$\mu(E_n) < \infty \text{ และ } E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \text{ ที่ทุก } \varepsilon > 0$$

จะมีจำนวนเต็มบวก N_ε ที่ทำให้

$$\sum_{n=m}^{\infty} \sup \left\{ \int_{E_n} f_1 d\mu, \int_{E_n} f_2 d\mu, \dots \right\} < \varepsilon \quad m \geq N_\varepsilon$$

แล้วจะได้ว่า (f_k) เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิเค

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int f_k d\mu \leq \int_E f d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

ตัวอย่าง 4.3.1 พิจารณามเชอเรเบิเคต $([0, \infty), \mathcal{M}_{[0, \infty)}, \mu)$

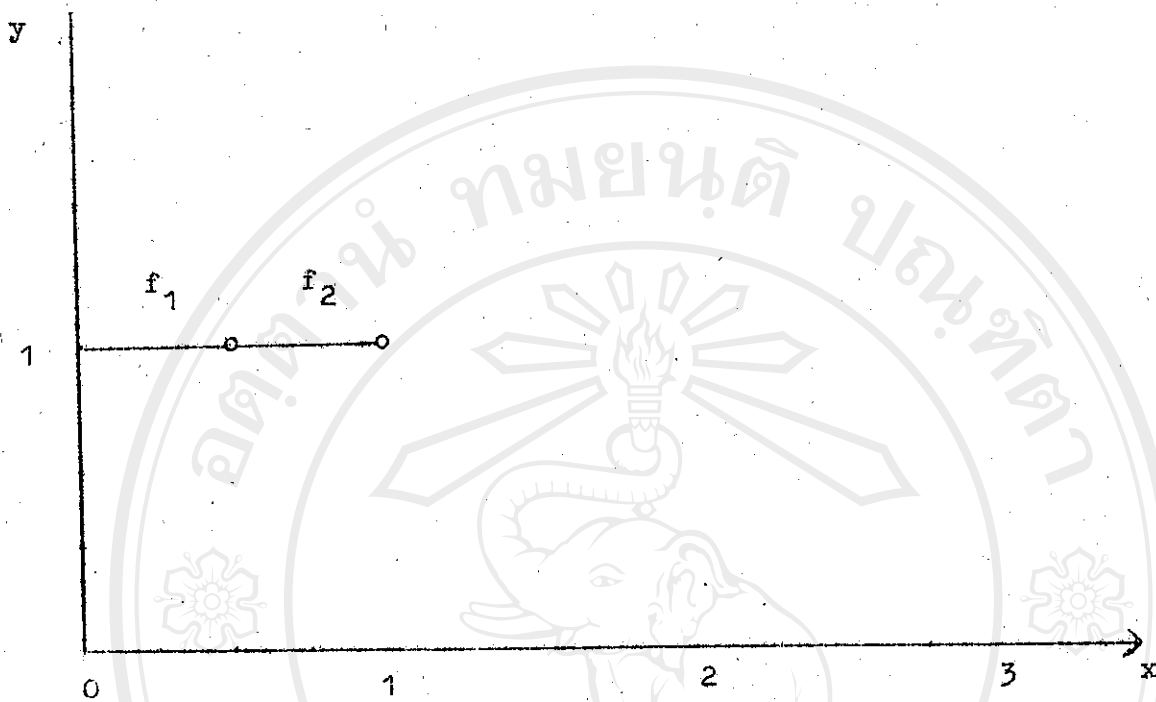
โดยที่ $\mathcal{M}_{[0, \infty)} = \{ [0, \infty) \cap E \mid E \subseteq \mathbb{R} \text{ และ } E \text{ เป็นเลเบกเมเชอเรเบิเคต} \}$

ขั้นที่ 1 แบ่งช่วง $[0, 1]$ ออกเป็นช่วงย่อยให้แต่ละช่วงยาว $\frac{1}{2^k}$ หน่วย

กำหนดฟังก์ชันบนแต่ละช่วงดังต่อไปนี้

$$f_1(x) = \chi_{\left[0, \frac{1}{2}\right)}(x)$$

$$f_2(x) = \chi_{\left[\frac{1}{2}, 1\right)}(x)$$



ขั้นที่ 2 แบ่งช่วง $[0, 2]$ ออกเป็นช่วงย่อยให้แต่ละช่วงยาว $\frac{1}{2^2}$ หน่วย
กำหนดฟังก์ชันบนแต่ละช่วงดังต่อไปนี้

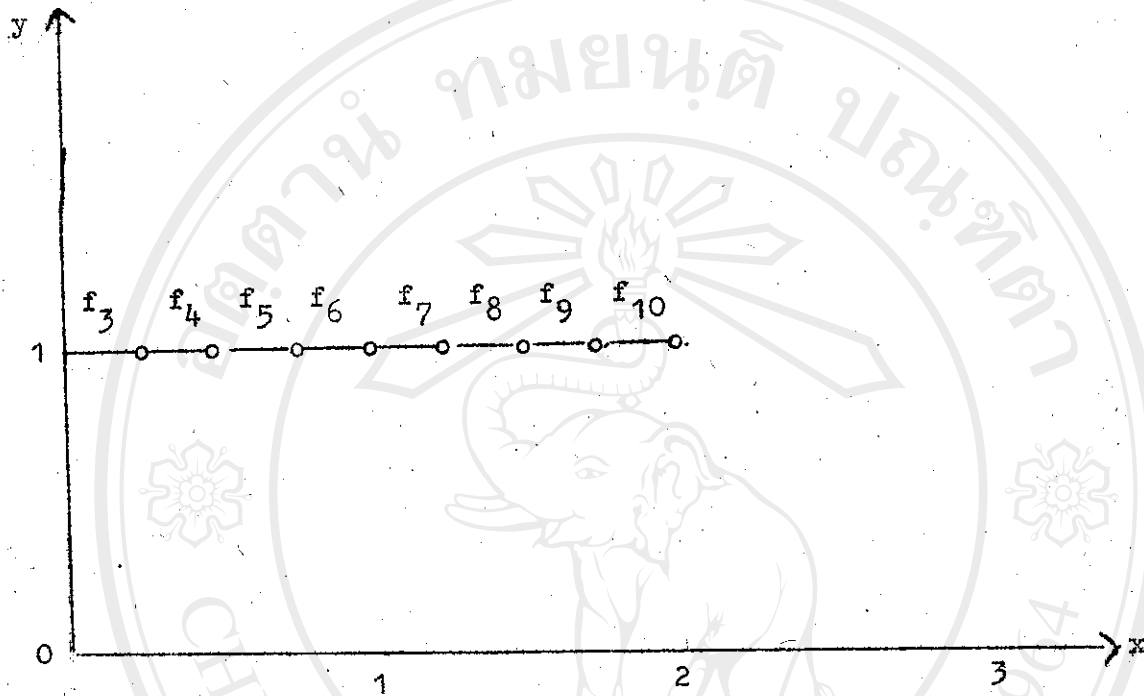
$$f_3(x) = \chi_{\left[0, \frac{1}{4}\right)}(x) \quad f_4(x) = \chi_{\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)}(x)$$

$$f_5(x) = \chi_{\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)}(x) \quad f_6(x) = \chi_{\left[\frac{3}{4}, 1\right)}(x)$$

$$f_7(x) = \chi_{\left[1, 1\frac{1}{4}\right)}(x) \quad f_8(x) = \chi_{\left[1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}\right)}(x)$$

$$f_9(x) = \chi_{\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)}(x)$$

$$f_{10}(x) = \chi_{\left[\frac{3}{4}, 2\right)}(x)$$



ขั้นที่ 3 แบ่งช่วง $[0, 3]$ ออกเป็นช่วงย่อยให้แต่ละช่วงยาว $\frac{1}{2^3}$

กำหนดฟังก์ชันบนแต่ละช่วงดังต่อไปนี้

$$f_{11}(x) = \chi_{\left[0, \frac{1}{8}\right)}(x)$$

$$f_{14}(x) = \chi_{\left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right)}(x)$$

$$f_{12}(x) = \chi_{\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)}(x)$$

$$f_{15}(x) = \chi_{\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)}(x)$$

$$f_{13}(x) = \chi_{\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)}(x)$$

$$f_{16}(x) = \chi_{\left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right)}(x)$$

$$f_{17}(x) = \chi(x) \quad \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8} \right)$$

$$f_{26}(x) = \chi(x) \quad \left[\frac{7}{8}, 2 \right)$$

$$f_{18}(x) = \chi(x) \quad \left[\frac{7}{8}, 1 \right)$$

$$f_{27}(x) = \chi(x) \quad \left[2, 2\frac{1}{8} \right)$$

$$f_{19}(x) = \chi(x) \quad \left[1, 1\frac{1}{8} \right)$$

$$f_{28}(x) = \chi(x) \quad \left[2\frac{1}{8}, 2\frac{1}{4} \right)$$

$$f_{20}(x) = \chi(x) \quad \left[1\frac{1}{8}, 1\frac{1}{4} \right)$$

$$f_{29}(x) = \chi(x) \quad \left[2\frac{1}{4}, 2\frac{3}{8} \right)$$

$$f_{21}(x) = \chi(x) \quad \left[1\frac{1}{4}, 1\frac{3}{8} \right)$$

$$f_{30}(x) = \chi(x) \quad \left[2\frac{3}{8}, 2\frac{1}{2} \right)$$

$$f_{22}(x) = \chi(x) \quad \left[1\frac{3}{8}, 1\frac{1}{2} \right)$$

$$f_{31}(x) = \chi(x) \quad \left[2\frac{1}{2}, 2\frac{5}{8} \right)$$

$$f_{23}(x) = \chi(x) \quad \left[1\frac{1}{2}, 1\frac{5}{8} \right)$$

$$f_{32}(x) = \chi(x) \quad \left[2\frac{5}{8}, 2\frac{3}{4} \right)$$

$$f_{24}(x) = \chi(x) \quad \left[1\frac{5}{8}, 1\frac{3}{4} \right)$$

$$f_{33}(x) = \chi(x) \quad \left[2\frac{3}{4}, 2\frac{7}{8} \right)$$

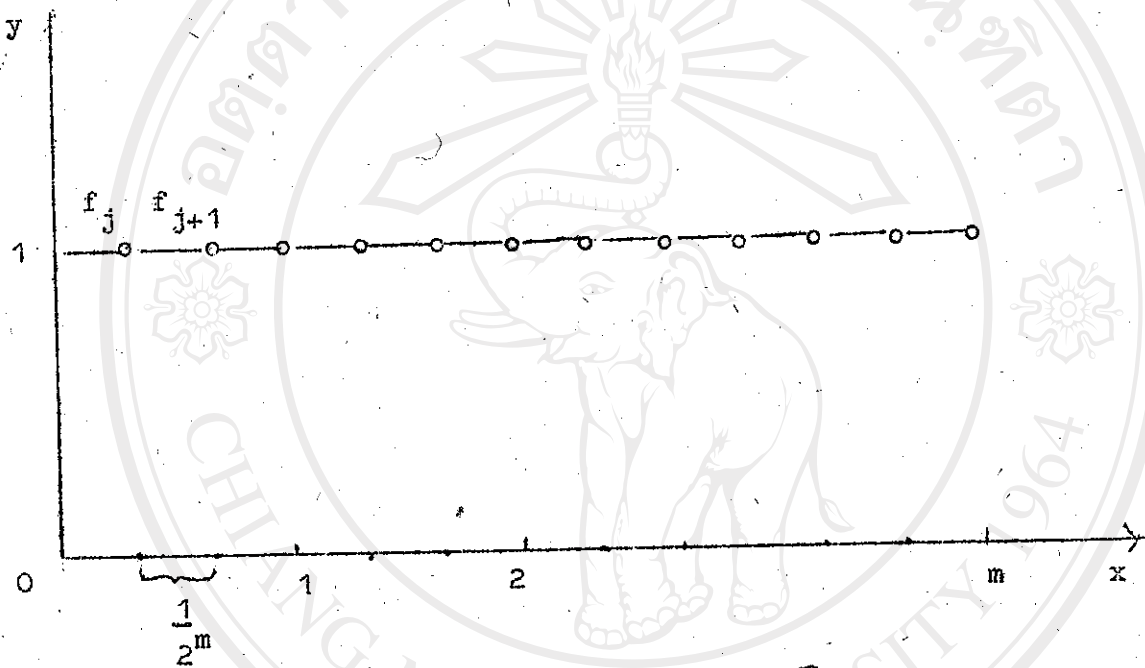
$$f_{25}(x) = \chi(x) \quad \left[1\frac{3}{4}, 1\frac{7}{8} \right)$$

$$f_{34}(x) = \chi(x) \quad \left[2\frac{7}{8}, 3 \right)$$

ขั้นที่ m แบ่งช่วง $[0, m]$ ออกเป็นช่วงย่อยให้แต่ละช่วงยาว $\frac{1}{2^m}$ หน่วย

กำหนดฟังก์ชันบนแต่ละช่วงดังต่อไปนี้

$$f_j(x) = \chi_{\left[0, \frac{1}{2^m}\right)}(x) \quad f_{j+1}(x) = \chi_{\left[\frac{1}{2^m}, \frac{2}{2^m}\right)}(x) \quad \dots$$



(1) จะแสดงว่า $\int_X f d\mu = \infty$ และ $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$

ถ้า $E \in \mathcal{M}$ และ $\mu(E) < \delta$ แล้ว $\int_E f d\mu < \varepsilon$
 $[0, \infty)$

เนื่องจาก $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup f_k(x) = 1, \forall x \in [0, \infty)$

ดังนั้น $\int_X f d\mu = \infty$

Copyright by Chiang Mai University
 All rights reserved

จะได้ว่า $\int_E f d\mu = \int_E 1 d\mu = \mu(E) < \delta = \varepsilon$

ดังนั้น สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $E \in M$ $[0, \infty)$

และ $\mu(E) < \delta$ แล้ว $\int_E f d\mu < \varepsilon$

(2) สำหรับ $E \in M$ $[0, \infty)$ จะมี (E_n) เป็นลำดับของเมเชอเรเบิลเซต

ที่ $E_i \cap E_j = \emptyset$ เมื่อ $i \neq j$, $\mu(E_n) < \infty$ และ $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

ซึ่งทุก $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_ε ที่ทำให้

$$\sum_{n=m}^{\infty} \sup \left\{ \int_{E_n} f_1 d\mu, \int_{E_n} f_2 d\mu, \dots \right\} < \varepsilon \quad \forall m \geq N_\varepsilon$$

สำหรับ $E \in M$ $[0, \infty)$

ให้ $E_1 = E \cap [0, 1)$

$E_2 = E \cap [1, 2)$

$E_3 = E \cap [2, 3)$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

$E_n = E \cap [n-1, n)$

$\vdots$

จะได้ว่า $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ โดยที่ (E_n) เป็นลำดับของเมเชอเรเบิลเซต

ที่ $E_i \cap E_j = \emptyset$ เมื่อ $i \neq j$ และ $\mu(E_n) < \infty$

ให้ $\varepsilon > 0$

จะมีจำนวนเต็มบวก N_ε ที่ทำให้ $\frac{\varepsilon}{2^m} < \varepsilon$, $\forall m \geq N_\varepsilon$

$$\text{เนื่องจาก } \sup \left\{ \int_{E_1} f_1 d\mu, \int_{E_1} f_2 d\mu, \dots \right\} \leq \frac{1}{2^1}$$

$$\sup \left\{ \int_{E_2} f_1 d\mu, \int_{E_2} f_2 d\mu, \dots \right\} \leq \frac{1}{2^2}$$

$$\sup \left\{ \int_{E_3} f_1 d\mu, \int_{E_3} f_2 d\mu, \dots \right\} \leq \frac{1}{2^3}$$

⋮

$$\sup \left\{ \int_{E_n} f_1 d\mu, \int_{E_n} f_2 d\mu, \dots \right\} \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\text{ดังนั้น } \sum_{n=m}^{\infty} \sup \left\{ \int_{E_n} f_1 d\mu, \int_{E_n} f_2 d\mu, \dots \right\} \leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^m}$$

นั่นคือจะมีจำนวนเต็มบวก N_ε ที่ทำให้

$$\sum_{n=m}^{\infty} \sup \left\{ \int_{E_n} f_1 d\mu, \int_{E_n} f_2 d\mu, \dots \right\} < \varepsilon, \quad \forall m \geq N_\varepsilon$$

(3) จะแสดงว่า $\{f_k\}$ เป็นอนุกรมอินทิเกรตเปิด บน $([0, \infty), M_{[0, \infty)}, \mu)$

ให้ $\varepsilon > 0$

พิจารณาในขั้นที่ m จะได้ว่า

$$\int_X f_k d\mu = \int_{[0, \infty)} f_k d\mu$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^m}$$

ดังนั้น f_k เป็นอินทิเกรตเปิดฟังก์ชัน, $\forall k \geq 1$

มีจำนวนเต็มบวก N_ε ที่ทำให้ $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$ สำหรับ $m \geq N_\varepsilon$

ดังนั้นสำหรับทุกๆ f_k ในชั้นที่ $m \geq N_\epsilon$ จะได้ว่า

$$\int_E f_k d\mu \leq \int_X f_k d\mu < \epsilon \quad \text{เมื่อ} \quad E \in M_{[0, \infty)}$$

พิจารณา f_i ในชั้นที่ $1, 2, \dots, N_\epsilon$

เนื่องจาก f_i เป็นอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน โดยทฤษฎี 2.4.5

จะได้ว่ามี $\delta_i > 0$ ซึ่งทำให้ $\int_E f_i d\mu < \epsilon$

สำหรับ $E \in M_{[0, \infty)}$ ที่ $\mu(E) < \delta_i$

ให้ $\delta = \min \{\delta_i / \text{สำหรับ } f_i \text{ ในชั้นที่ } 1, 2, \dots, N_\epsilon\}$

ดังนั้นจะได้ว่า $\int_E f_i d\mu < \epsilon$ สำหรับ $E \in M_{[0, \infty)}$

และ $\mu(E) < \delta$

นั่นคือ สำหรับ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $E \in M_{[0, \infty)}$

และ $\mu(E) < \delta$ แล้วจะได้ว่า $\int_E f_k d\mu < \epsilon, \forall k \geq 1$

ดังนั้น (f_k) เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล บน $(X, M_{[0, \infty)}, \mu)$

(4) จะแสดงว่า $\forall E \in M_{[0, \infty)}, \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \int_E f_k d\mu \leq \int_E f d\mu$

ให้ $E \in M_{[0, \infty)}$

เนื่องจาก $f_k(x) \leq f(x), x \in [0, \infty)$ และ $\forall k \geq 1$

ดังนั้น $\int_E f_k d\mu \leq \int_E f d\mu, \forall k \geq 1$

จะได้ว่า $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \int_E f_k d\mu \leq \int_E f d\mu$

ตัวอย่างของบทแทรก 4.3.2 ซึ่งแสดงว่า ถ้า

$$(1) \int_X f d\mu < \infty$$

$$(2) \text{ สำหรับ } E \in M \text{ จะมีลำดับ } \{E_n\} \text{ ที่ } E_i \cap E_j = \emptyset$$

$$\text{เมื่อ } i \neq j, \mu(E_n) < \infty \text{ และ } E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

ซึ่งทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_ϵ ที่ทำให้

$$\sum_{n=m}^{\infty} \sup \left(\int_{E_n} f_1 d\mu, \int_{E_n} f_2 d\mu, \dots \right) < \epsilon \quad \forall m \geq N_\epsilon$$

แล้วจะได้ว่า $\{f_k\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int f_k d\mu \leq \int f d\mu, \quad \forall E \in M$$

ตัวอย่าง 4.3.2 พิจารณาบนเมเชอร์สเปซ $([1, \infty), M_{[1, \infty)}, \mu)$

โดยที่

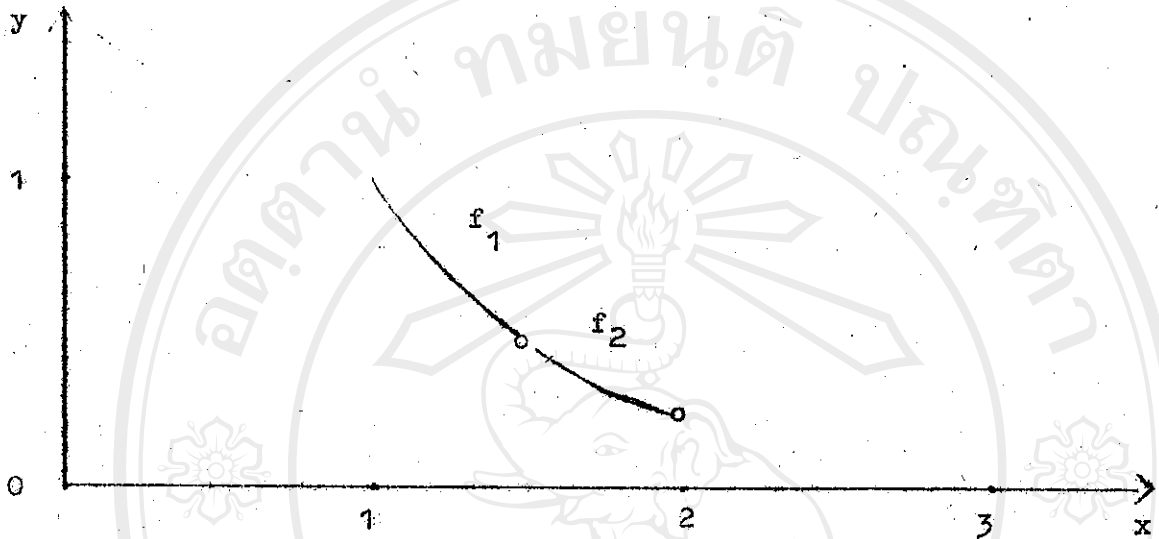
$$M_{[1, \infty)} = \{ [1, \infty) \cap E \mid E \subseteq \mathbb{R} \text{ และ } E \text{ เป็นเลเบกเมเชอร์เบิลเซต} \}$$

μ เป็นเลเบกเมเชอร์

ขั้นที่ 1 แบ่งช่วง $[1, 2]$ ออกเป็นช่วงย่อยให้แต่ละช่วงยาว $\frac{1}{2^k}$ หน่วย

กำหนดฟังก์ชันบนแต่ละช่วงดังต่อไปนี้

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{[1, 1\frac{1}{2})}(x) \quad f_2(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{[1\frac{1}{2}, 2)}(x)$$



ขั้นที่ 2 แบ่งช่วง $[1, 3]$ ออกเป็นช่วงย่อยในแต่ละช่วงยาว $\frac{1}{2^2}$ หน่วย
กำหนดฟังก์ชันบนแต่ละช่วงดังต่อไปนี้

$$f_3(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{[1, 1\frac{1}{4})}(x)$$

$$f_4(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{[1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2})}(x)$$

$$f_5(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{[1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4})}(x)$$

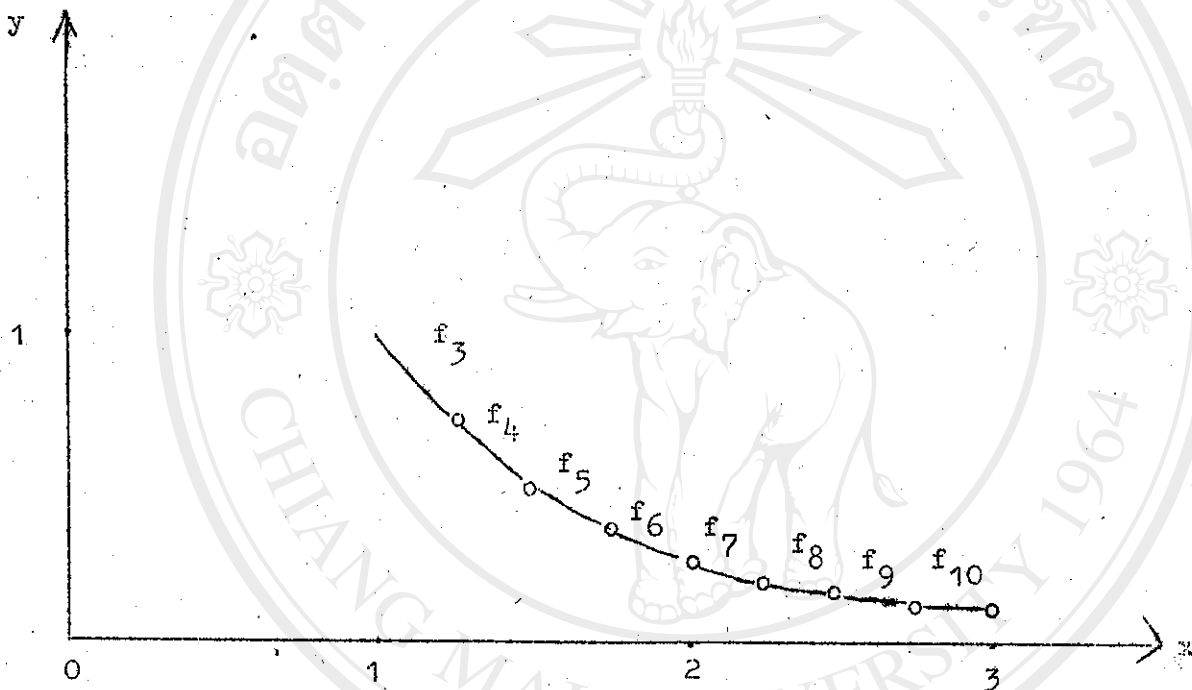
$$f_6(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{[1\frac{3}{4}, 2)}(x)$$

$$f_7(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{[2, 2\frac{1}{4})}(x)$$

$$f_8(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{[2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2})}(x)$$

$$f_9(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{[2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}]}(x)$$

$$f_{10}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{[2\frac{3}{4}, 3]}(x)$$



ขั้นที่ 3 แบ่งช่วง $[1, 4]$ ออกเป็นช่วงย่อยให้แต่ละช่วงยาว $\frac{1}{2^3}$ หน่วย

กำหนดฟังก์ชันบนแต่ละช่วงดังต่อไปนี้

$$f_{11}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{[1, 1\frac{1}{8}]}(x)$$

$$f_{12}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{[1\frac{1}{8}, 1\frac{1}{4}]}(x)$$

ลิขสิทธิ์โดยมหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © Chiang Mai University
All rights reserved

$$f_{13}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{\left[1\frac{1}{4}, 1\frac{3}{8}\right)}(x)$$

$$f_{14}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{\left[1\frac{3}{8}, 1\frac{1}{2}\right)}(x)$$

$$f_{15}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{\left[1\frac{1}{2}, 1\frac{5}{8}\right)}(x)$$

$$f_{16}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{\left[1\frac{5}{8}, 1\frac{3}{4}\right)}(x)$$

$$f_{17}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{\left[1\frac{3}{4}, 1\frac{7}{8}\right)}(x)$$

$$f_{18}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{\left[1\frac{7}{8}, 2\right)}(x)$$

$$f_{19}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{\left[2, 2\frac{1}{8}\right)}(x)$$

$$f_{20}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{\left[2\frac{1}{8}, 2\frac{1}{4}\right)}(x)$$

$$f_{21}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{\left[2\frac{1}{4}, 2\frac{3}{8}\right)}(x)$$

$$f_{22}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{\left[2\frac{3}{8}, 2\frac{1}{2}\right)}(x)$$

$$f_{23}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{\left[2\frac{1}{2}, 2\frac{5}{8}\right)}(x)$$

$$f_{24}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{\left[2\frac{5}{8}, 2\frac{3}{4}\right)}(x)$$

$$f_{25}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{\left[2\frac{3}{4}, 2\frac{7}{8}\right)}(x)$$

$$f_{26}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{\left[2\frac{7}{8}, 3\right)}(x)$$

$$f_{27}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{\left[3, 3\frac{1}{8}\right)}(x)$$

$$f_{28}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{\left[3\frac{1}{8}, 3\frac{1}{4}\right)}(x)$$

$$f_{29}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{\left[3\frac{1}{4}, 3\frac{3}{8}\right)}(x)$$

$$f_{30}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{\left[3\frac{3}{8}, 3\frac{1}{2}\right)}(x)$$

$$f_{31}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{\left[\frac{3^1}{2}, \frac{3^5}{8}\right)}(x)$$

$$f_{32}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{\left[\frac{3^5}{8}, \frac{3^3}{4}\right)}(x)$$

$$f_{33}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{\left[\frac{3^3}{4}, \frac{3^7}{8}\right)}(x)$$

$$f_{34}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{\left[\frac{3^7}{8}, 4\right)}(x)$$

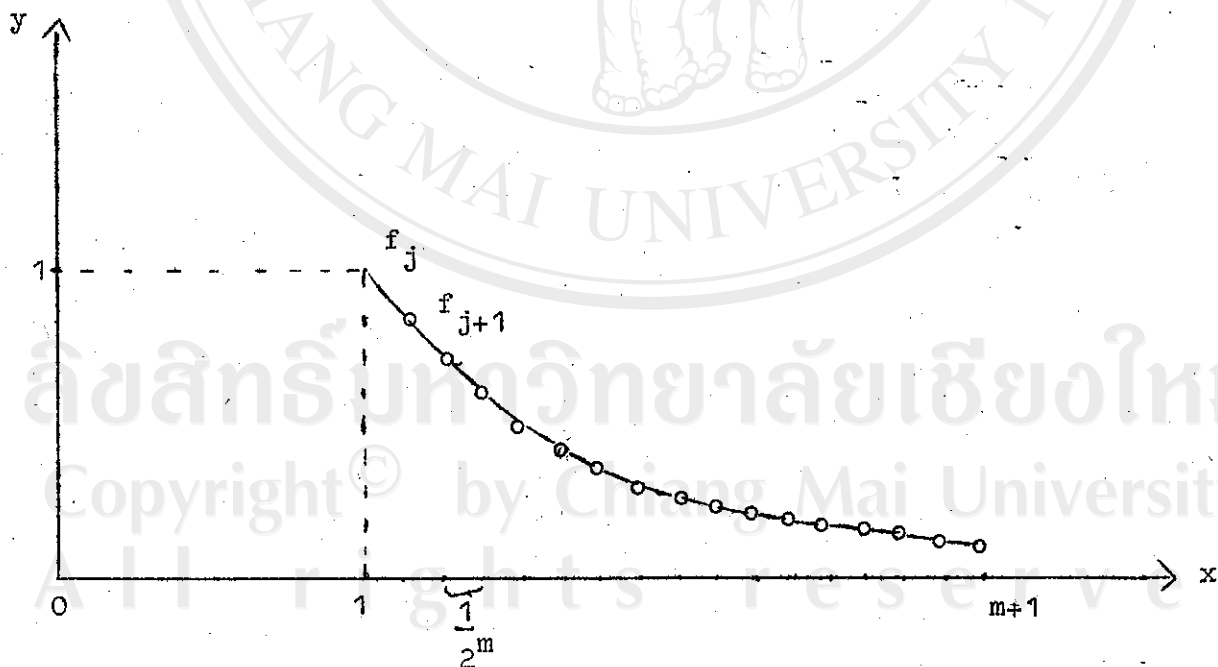
ขั้นที่ m แบ่งช่วง $[1, m+1]$ ออกเป็นช่วงย่อยให้แต่ละช่วงยาว $\frac{1}{2^m}$ หน่วย

กำหนดฟังก์ชันบนแต่ละช่วงดังต่อไปนี้

$$f_j(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{\left[1, 1 + \frac{1}{2^m}\right)}(x)$$

$$f_{j+1}(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{\left[1 + \frac{1}{2^m}, 1 + \frac{2}{2^m}\right)}(x)$$

.....



(1) จะแสดงว่า $\int_X f d\mu < \infty$

เนื่องจาก $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup f_k(x)$

$$= \frac{1}{x^2} \quad \forall x \in [1, \infty)$$

$$\int_X f d\mu = \int_{[1, \infty)} \frac{1}{x^2} d\mu$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = 2 < \infty$$

(2) จะแสดงว่า สำหรับ $E \in M$ จะมีลำดับ $\{E_n\}$ เป็นลำดับของ $[1, \infty)$

เมเชอเวเปิดเซตที่ $E_i \cap E_j = \emptyset$ เมื่อ $i \neq j$, $\mu(E_n) < \infty$

และ $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ซึ่งทุก $\epsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_ϵ

ที่ทำให้

$$\sum_{n=m}^{\infty} \sup \left\{ \int_{E_n} f_1 d\mu, \int_{E_n} f_2 d\mu, \dots \right\} < \epsilon, \quad \forall m \geq N_\epsilon$$

สำหรับ $E \in M$
 $[1, \infty)$

ให้ $E_1 = E \cap [1, 2)$

$$E_2 = E \cap [2, 3)$$

$$E_3 = E \cap [3, 4)$$

$$\vdots$$

$$E_n = E \cap [n, n+1)$$

$$\vdots$$

จะได้ว่า $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ โดยที่ $\{E_n\}$ เป็นลำดับของเมเชอว์เปิดเซต

ที่ $E_i \cap E_j = \emptyset$ เมื่อ $i \neq j$ และ $\mu(E_n) < \infty$

ให้ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก $\sup \left\{ \int_{E_1} f_1 d\mu, \int_{E_1} f_2 d\mu, \dots \right\} \leq \frac{1}{2^1}$

$$\sup \left\{ \int_{E_2} f_1 d\mu, \int_{E_2} f_2 d\mu, \dots \right\} \leq \frac{1}{2^2}$$

$$\sup \left\{ \int_{E_3} f_1 d\mu, \int_{E_3} f_2 d\mu, \dots \right\} \leq \frac{1}{2^3}$$

$\vdots$

$$\sup \left\{ \int_{E_n} f_1 d\mu, \int_{E_n} f_2 d\mu, \dots \right\} \leq \frac{1}{2^n}$$

ดังนั้น $\sum_{n=m}^{\infty} \sup \left\{ \int_{E_n} f_1 d\mu, \int_{E_n} f_2 d\mu, \dots \right\} \leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{m-1}}$

จะมีจำนวนเต็มบวก N_ε ที่ทำให้ $\frac{1}{2^{m-1}} < \varepsilon$ สำหรับ $m \geq N_\varepsilon$

นั่นคือ สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_ε ที่ทำให้

$$\sum_{n=m}^{\infty} \sup \left\{ \int_{E_n} f_1 d\mu, \int_{E_n} f_2 d\mu, \dots \right\} < \varepsilon \quad \text{สำหรับ } m \geq N_\varepsilon$$

(3) จะแสดงว่า $\{f_k\}$ เป็นอนุกรมอินทิเกรเบิล บน $([1, \infty), M_{[1, \infty)}, \mu)$

ให้ $\varepsilon > 0$

พิจารณาในชั้นที่ m จะได้ว่า

$$\int_X f_k d\mu = \int_{[1,\infty)} f_k d\mu \leq 1 \cdot \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^m}$$

ดังนั้น f_k เป็นอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน สำหรับ $k \geq 1$

มีจำนวนเต็มบวก N_ϵ ที่ทำให้ $\frac{1}{2^m} < \epsilon$ สำหรับ $m \geq N_\epsilon$

ดังนั้น สำหรับทุก f_k ในชั้นที่ $m \geq N_\epsilon$ จะได้ว่า

$$\int_E f_k d\mu \leq \int_X f_k d\mu < \epsilon \quad \text{สำหรับ } E \in M_{[1,\infty)}$$

พิจารณา f_i ในชั้นที่ $1, 2, \dots, N_\epsilon - 1$

เนื่องจาก f_i เป็นอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน

จะได้อามี δ_i ที่ทำให้ $\int_E f_i d\mu < \epsilon$ สำหรับ $E \in M_{[1,\infty)}$

และ $\mu(E) < \delta_i$

ให้ $\delta = \min \{ \delta_i / f_i \}$ เป็นฟังก์ชันในชั้นที่ $1, 2, 3, \dots, N_\epsilon - 1$

ดังนั้น $\int_E f_i d\mu < \epsilon$ เมื่อ $E \in M_{[1,\infty)}$ และ $\mu(E) < \delta$

นั่นคือ สำหรับ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $E \in M_{[1,\infty)}$

และ $\mu(E) < \delta$ แล้ว $\int_E f_k d\mu < \epsilon, \forall k \geq 1$

Copyright© by Chiang Mai University

All rights reserved

(4) จะแสดงว่า สำหรับ $E \in M$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int f_k d\mu \leq \int_E f d\mu$

ให้ $E \in M$
 $[1, \infty)$

เนื่องจาก $f_k(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [1, \infty)$ และ $\forall k \geq 1$

ดังนั้น $\int_E f_k d\mu \leq \int_E f d\mu$, $\forall k \geq 1$

ดังนั้น $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int f_k d\mu \leq \int_E f d\mu$

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างที่แสดงว่า "สำหรับ $E \in M$ มีลำดับ $\{E_n\}$ เป็นลำดับ

ของเมเชอร์เบิลเซตที่ $E_1 \cap E_j = \emptyset$ เมื่อ $i \neq j$, $\mu(E_n) < \infty$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

ซึ่งสำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_ϵ ที่ทำให้

$\sum_{n=m}^{\infty} \sup \left\{ \int_{E_n} f_1 d\mu, \int_{E_n} f_2 d\mu, \dots \right\} < \epsilon$, $\forall m \geq N_\epsilon$ ไม่จริง,

และสำหรับ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ จะได้ $\mu(E) < \delta$ แล้ว $\int_E f d\mu < \epsilon$

โดยที่ $\{f_k\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล บนเมเชอร์สเปซ (X, M, μ)

และ $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int f_k d\mu \leq \int_E f d\mu$, $E \in M$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright© by Chiang Mai University

All rights reserved

ตัวอย่าง 4.3.3 ให้ $([0, \infty), M_{[0, \infty)}, \mu)$ เป็นเมเชอร์สเปซ

โดยที่ $M_{[0, \infty)} = \{E \cap [0, \infty) / E \subseteq \mathbb{R} \text{ และ } E$

เป็นเลเบกเมเชอร์เบิลเซต}

μ เป็นเลเบกเมเชอร์

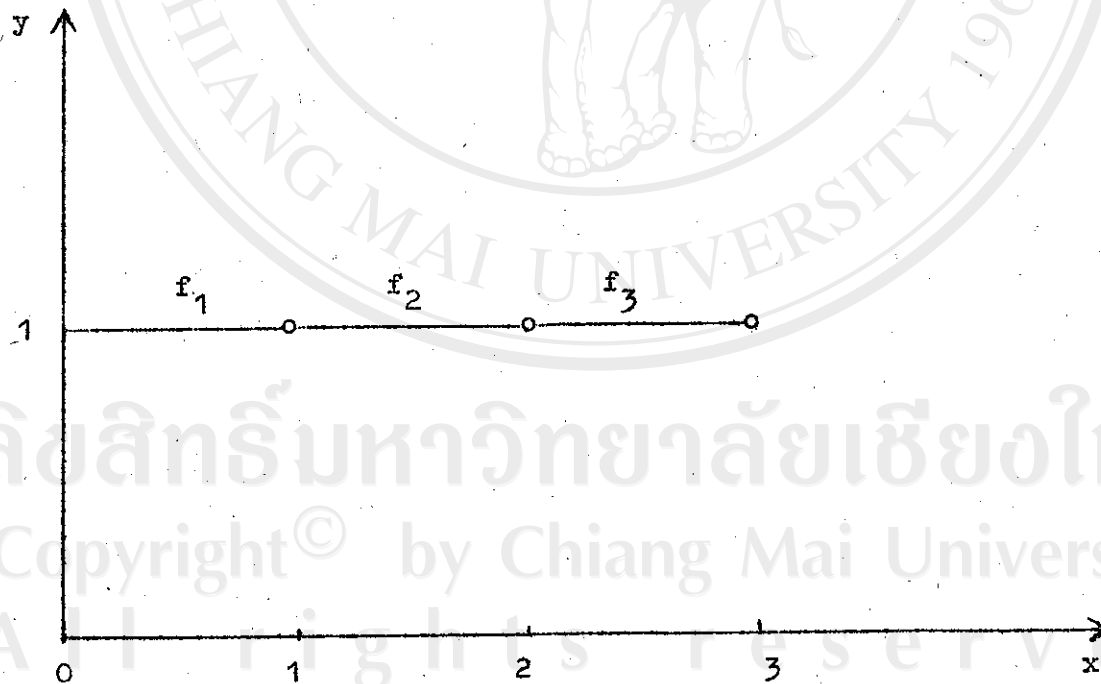
ให้ $f_k(x) = \chi_{[0, k)}(x)$, $x \in [0, \infty)$

(1) จะแสดงว่า มี $E \in M$ และ $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

โดยที่ $\{E_n\}$ เป็นลำดับของเมเชอร์เบิลเซตที่

$E_i \cap E_j = \emptyset$ เมื่อ $i \neq j$, $\mu(E_n) < \infty$ และ

$$\sum_{n=m}^{\infty} \sup \left\{ \int_{E_n} f_1 d\mu, \int_{E_n} f_2 d\mu, \dots \right\} = \infty \quad \forall m$$



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright© by Chiang Mai University

All rights reserved

ให้ $E = [0, \infty)$ และ $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

โดยที่ (E_n) เป็นลำดับของเมเชอวเปิดเซตที่ $E_i \cap E_j = \emptyset$

เมื่อ $i \neq j$, $\mu(E_n) < \infty$ เนื่องจาก

$$\sup \left\{ \int_{E_n} f_1 d\mu, \int_{E_n} f_2 d\mu, \dots \right\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu([0, k) \cap E_n \cap E)$$

$$= \mu(E_n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup \left\{ \int_{E_n} f_1 d\mu, \int_{E_n} f_2 d\mu, \dots \right\} = \infty, \quad \forall_m$$

$$\text{นั่นคือ } \sum_{n=m}^{\infty} \sup \left\{ \int_{E_n} f_1 d\mu, \int_{E_n} f_2 d\mu, \dots \right\} = \infty, \quad \forall_m$$

(2) จะแสดงว่า ทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ถ้า $\mu(E) < \delta$

$$\text{แล้ว } \int_E f d\mu < \varepsilon$$

$$\text{เนื่องจาก } f(x) = 1, \quad \forall x \in [0, \infty)$$

$$\text{ให้ } \varepsilon > 0 \quad \text{เลือก } \delta = \varepsilon$$

$$\text{ให้ } E \in \mathcal{M}_{[0, \infty)} \quad \text{และ } \mu(E) < \delta$$

$$\text{จะได้ว่า } \int_E f d\mu = \int_E 1 d\mu = \mu(E) < \delta = \varepsilon$$

(3) จะแสดงว่า $\{f_k\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล

$$\text{เนื่องจาก } \int_X f_k d\mu = \int_{[0, \infty)} \chi_{[0, k)} d\mu = k$$

ดังนั้น f_k เป็นอินทิเกรเบิลฟังก์ชัน

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \varepsilon$ ให้ $E \in M_{[0, \infty)}$

และ $\mu(E) < \delta$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } \int_E f_k d\mu &= \int_E \chi_{[0, k)} d\mu \\ &= \mu(E \cap [0, k)) \leq \mu(E) \\ &< \delta = \varepsilon, \quad \forall k \end{aligned}$$

ดังนั้น $\{f_k\}$ เป็นอนุกรมอินทิเกรตเปิด บนเมเชอร์สเปซ $([0, \infty), M_{[0, \infty)}, \mu)$

(4) จะแสดงว่า สำหรับ $E \in M$ จะได้ว่า $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int f_k d\mu \leq \int_E f d\mu$

ให้ $E \in M_{[0, \infty)}$

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } f(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup f_k(x) = 1, \quad x \in [0, \infty) \\ &= 1, \quad x \in [0, \infty) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $f_k(x) \leq f(x), \quad \forall x \in [0, \infty)$ และ $\forall k$

$$\int_E f_k d\mu \leq \int_E f d\mu \quad \forall k$$

นั่นคือ $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int f_k d\mu \leq \int_E f d\mu$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Copyright© by Chiang Mai University

All rights reserved