

บทที่ 5

บทสรุป

ผลที่ได้จากการวิจัย

1. ให้ (X, M, μ') เป็นเมเชอร์สเปซที่มีเมเชอร์จำกัด

$\{f_n\}$ เป็นลำดับของนอนเนกาทีฟอินทิเกรเบิลบน (X, M, μ')

ถ้า $\int_X f \, d\mu' < \infty$ โดยที่ $f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup f_n$

แล้วจะได้ว่า $\{f_n\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_E \int f_n \, d\mu' \leq \int_E f \, d\mu', \quad \forall E \in M$$

2. ให้ (X, M, μ) เป็นพรอบาบิลิตีสเปซ

และ $\{f_k\}$ เป็นลำดับของนอนเนกาทีฟอินทิเกรเบิลฟังก์ชันบน (X, M, μ)

ถ้า $\left\{ \int_{E_n} f_k \, d\mu \right\}_{n=1}^{\infty}$ ลู่เข้าสู่ 0 แบบยูนิฟอร์มบน k

โดยที่ $E_n = \{x / f(x) \geq n\}$ และ $f = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup f_k$

แล้วจะได้ว่า $\{f_k\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int f_k \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu, \quad \forall E \in M$$

3. ให้ (X, M, μ) เป็นเมเชอร์สเปซใด

และ $\{f_k\}$ เป็นลำดับของนอนเนกาทีฟอินทิเกรเบิลฟังก์ชันบน (X, M, μ)

ถ้า สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $E \in M$ และ $\mu(E) < \delta$

แล้ว $\int_E f \, d\mu < \varepsilon$, $f = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup f_k$

และ สำหรับ $E \in M$

มี $\{E_n\}$ เป็นลำดับของเมเชอร์เบิลเซตที่ $E_i \cap E_j = \emptyset$

เมื่อ $i \neq j$, $\mu(E_n) < \infty$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

ซึ่งทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_ε ที่ทำให้

$$\sum_{n=m}^{\infty} \sup_{E_n} \left\{ \int_{E_n} f_1 d\mu, \int_{E_n} f_2 d\mu, \dots \right\} < \varepsilon, \quad \forall m \geq N_\varepsilon$$

แล้วจะได้ว่า $\{f_k\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล บน (X, M, μ)

ก็ต่อเมื่อ $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int f_k d\mu \leq \int f d\mu, \quad \forall E \in M$

4. ให้ (X, M, μ) เป็นเมเชอร์สเปซใดๆ

และ $\{f_k\}$ เป็นลำดับของนอนเนกาทิฟอินทิเกรเบิลฟังก์ชันบน

(X, M, μ)

ถ้า $\int_X f d\mu < \infty$ โดยที่ $f = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup f_k$

และ สำหรับ $E \in M$ มี $\{E_n\}$ เป็นลำดับของเมเชอร์เบิลเซตที่

$E_i \cap E_j = \emptyset$ เมื่อ $i \neq j$, $\mu(E_n) < \infty$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

ซึ่งทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_ε ที่ทำให้

$$\sum_{n=m}^{\infty} \sup_{E_n} \left\{ \int_{E_n} f_1 d\mu, \int_{E_n} f_2 d\mu, \dots \right\} < \varepsilon, \quad \forall m \geq N_\varepsilon$$

แล้วจะได้ว่า $\{f_k\}$ เป็นยูนิฟอร์มอินทิเกรเบิล บน (X, M, μ)

ก็ต่อเมื่อ $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_E \int f_k d\mu \leq \int f d\mu, \quad \forall E \in M$