บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

2.1 เวกเตอร์สเปซ

ในการศึกษาเรื่องเวกเตอร์สเปซ ก่อนอื่นเราควรที่จะศึกษาลักษณะของเวกเตอร์เพื่อประกอบในการเรียนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นเพื่อให้เข้าใจง่ายขึ้น ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เช่น แรง ความเร็ว ความเร่ง เป็นต้น เรียกว่า ปริมาณเวกเตอร์ หรือเรียกสั้น ๆ ว่าเวกเตอร์ และเวกเตอร์เขียนแทนด้วยส่วนของเส้นตรงที่มีลูกศรกำกับเพื่อแทนขนาดและทิศทาง เช่น ถ้าเวกเตอร์มีจุดเริ่มต้นที่จุด A จุดปลายที่จุด B เขียนแทนด้วย $\overrightarrow{AB}$ หรือสัญลักษณ์แทนเวกเตอร์อาจใช้อักษรตัวเดียวที่มีเครื่องหมาย → หรือ - กำกับ เช่น $\vec{u}$, $\vec{v}$ หรือ $\bar{u}$, $\bar{v}$

คุณสมบัติของเวกเตอร์

1. $\bar{u} = \bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากัน และทิศทางเดียวกัน และใช้สัญลักษณ์ $|\bar{u}|$ แทนขนาดของ $\bar{u}$

2. ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นจุดเดียวกัน ผลบวกของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $\bar{u} + \bar{v}$ หาได้โดยสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานและหาผลบวกของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ได้ดังรูป 4.1 ก.

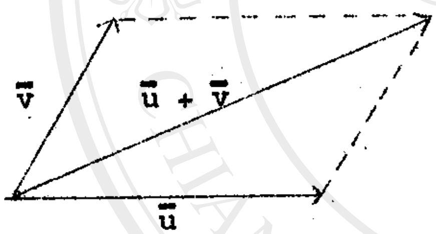
3. เวกเตอร์ศูนย์ คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ 0 จะมีจุดเริ่มต้นและจุดปลายเป็นจุดเดียวกัน เขียนแทนด้วย $\bar{0}$

4. ถ้า a เป็นจำนวนจริง (สกาลาร์) และ $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ ผลคูณของ a และ $\bar{u}$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $a\bar{u}$ แบ่งออกเป็น 3 กรณีคือ

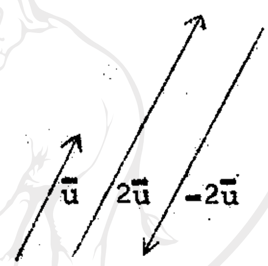
ก. ถ้า $a = 0$ แล้ว $a\bar{u} = \bar{0}$

ข. ถ้า $a > 0$ แล้ว $a\bar{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|a||\bar{u}|$ และมีทิศทางเดียวกัน

ค. ถ้า $a < 0$ แล้ว $a\bar{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|a||\bar{u}|$ และทิศทางตรงข้าม (รูป 4.1.ข)



รูป 4.1ก

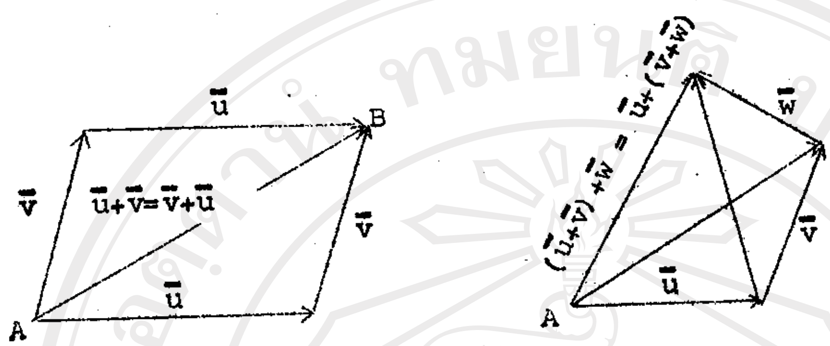


รูป 4.1 ข

ถ้า $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ $\bar{0}$ เป็นเวกเตอร์ศูนย์ และถ้า c, d เป็นสกาลาร์ใด ๆ จะได้ว่า

1. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$
2. $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$
3. $\bar{u} + \bar{0} = \bar{u}$
4. $\bar{u} + (-\bar{u}) = \bar{0}$ กำหนดให้ $-\bar{u} = (-1)\bar{u}$
5. $(c + d)\bar{u} = c\bar{u} + d\bar{u}$
6. $c(\bar{u} + \bar{v}) = c\bar{u} + c\bar{v}$
7. $1.\bar{u} = \bar{u}$

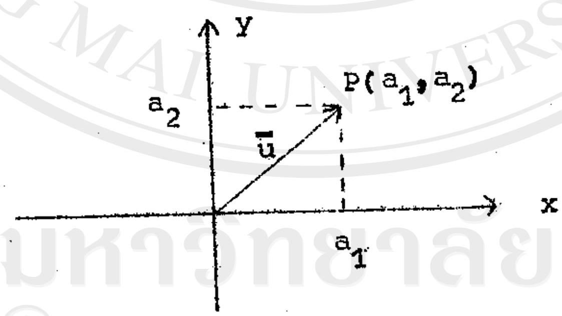
รูป 4.2 ต่อไปนี้แสดงคุณสมบัติข้อ 1 และข้อ 2



$\overrightarrow{AB} = \bar{u}+\bar{v} = \bar{u}+ \bar{u}$

$\overrightarrow{AB} = \bar{u}+(\bar{v}+\bar{w}) = (\bar{u}+\bar{v})+\bar{w}$

ในการศึกษาคุณสมบัติของการบวกเวกเตอร์ และการคูณเวกเตอร์ด้วยสกาลาร์ เราสามารถพิจารณาเวกเตอร์ในสเปซ n มิติได้ เช่นถ้าเราพิจารณาเวกเตอร์ในระนาบ (R^2) เวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบสามารถกำหนดได้ด้วยคู่ลำดับ (a_1, a_2) เมื่อ a_1, a_2 เป็นจำนวนจริง



จากรูป แทน $\bar{u}$ ด้วย $\overrightarrow{OP}$ โดย $\overrightarrow{OP}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด O และจุดปลายที่จุด P และมีขนาด a_1 หน่วยตามแนวแกน x และขนาด a_2 หน่วยไปตามแนวแกน y ดังนั้นสามารถใช้คู่ลำดับแทนเวกเตอร์ในระนาบ (R^2) ได้ และต่อไปจะใช้อักษรตัวใหญ่ เช่น A, B, C, ... แทนเวกเตอร์ เช่น

ถ้า $A = (a_1, a_2)$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ (R^2)

$B = (a_1, a_2, a_3)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3

ดังนั้นสำหรับเวกเตอร์ใน R^n (สเปซ n มิติ) สำหรับ $A \in R^n$ จะได้ว่า $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

<u>นิยาม 2.1.1</u> ให้ $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ และ $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n จะเรียกเวกเตอร์ A เท่ากับ B ก็ต่อเมื่อ $a_i = b_i$ โดย $i = 1, 2, \ldots, n$ ใช้สัญลักษณ์ $A = B$ แทน A เท่ากับ B

<u>ตัวอย่าง 2.1.1</u> ให้ $A = (4, 5, -2)$ และ $B = (4, 5, -2)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3 จากนิยาม 2.1.1 จะได้ว่า $A = B$ เพราะว่า $a_i = b_i$ เมื่อ $i = 1, 2, 3$

<u>นิยาม 2.1.2</u> ให้ $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ และ $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ ผลบวกของ A + B และผลคูณ cA กำหนดดังนี้

$$A + B = (a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n)$$

$$cA = (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n)$$

ตัวอย่าง 2.1.2 ให้ $A = (2,3,-1)$, $B = (1,2,4)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3 และ $c = 2$

จะได้ว่า $A + B = (3,5,3)$

$$cA = 2(2,3,-1) = (4,6,-2)$$

ทฤษฎี 2.1.1 ถ้า A, B, C เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน R^n และ c_1, c_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$
2. $A + B = B + A$
3. $c_1(A + B) = c_1A + c_1B$
4. $(c_1 + c_2)A = c_1A + c_2A$
5. ถ้าให้ 0 แทนเวกเตอร์ $(0,0,\ldots,0)$ ใน R^n แล้วจะได้ว่า

   $$0 + A = A + 0 = A$$
6. ถ้า $1.A = A$ และถ้าเขียนสัญลักษณ์ $-A$ แทน $(-1)A$

   จะได้ว่า $A + (-A) = 0$ และเขียนสัญลักษณ์ $A - B$ แทน $A+(-B)$

พิสูจน์ จะพิสูจน์กรณี 1,3 และ 6 เท่านั้น

1. ให้ $A = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $B = (b_1,b_2,\ldots,b_n)$

   $C = (c_1,c_2,\ldots,c_n)$

   เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}(A+B)+C &= ((a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n)+(c_1,c_2,\ldots,c_n))\\ &= ((a_1+b_1)+c_1,(a_2+b_2)+c_2,\ldots,(a_n+b_n)+c_n)\\ &= (a_1+(b_1+c_1),(a_2+(b_2+c_2),\ldots,a_n+(b_n+c_n))\\ &= A + (B + C)\end{aligned}$$

3. ให้ $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} c(A+B) &= c(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n) \\ &= (ca_1+cb_1, ca_2+cb_2, \ldots, ca_n+cb_n) \\ &= (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n)+(cb_1, cb_2, \ldots, cb_n) \\ &= c(a_1, a_2, \ldots, a_n)+c(b_1, b_2, \ldots, b_n) \end{aligned}$$

ดังนั้น $c(A+B) = cA + cB$

6. ให้ $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

ดังนั้น $-A = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$

เพราะฉะนั้น $A+(-A) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)+(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$

$$\begin{aligned} &= (a_1-a_1, a_2-a_2, \ldots, a_n-a_n) \\ &= (0, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

ฉะนั้น $A + (-A) = 0$

<u>ตัวอย่าง 2.1.3</u> ให้ $A = (2,-3,0,4)$, $B = (2,-1,3,5)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^4 ให้หาค่าของ $2A-3B$, $A + 5B$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned} 2A - 3B &= 2(2,-3,0,4) -3(2,-1,3,5) \\ &= (4,-6,0,8) + (-6,3,-9,-15) \\ &= (-2,-3,-9,-7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A + 5B &= (2,-3,0,4) + 5(2,-1,3,5) \\ &= (2,-3,0,4) + (10,-5,15,25) \\ &= (12,-8,15,29) \end{aligned}$$

<u>นิยาม 2.1.3</u> ให้ $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ และ $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n ผลคูณสกาลาร์(scalar product หรือ dot product) ซึ่งเขียนแทนด้วย $A.B$ กำหนดดังนี้

$$A.B = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

<u>ตัวอย่าง 2.1.4</u> ให้ $A = (1,3,-2)$, $B = (-1,4,-3)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3 จะได้ว่า $A.B = -1 + 12 + 6 = 17$

<u>ทฤษฎี 2.1.2</u> ให้ A, B, C เป็นเวกเตอร์ใน R^n จะได้ว่า

1. $(A + B).C = A.C + B.C$
2. ถ้า c เป็นสกาลาร์ จะได้ว่า

   $cA.B = c(A.B) = A.cB$

3. $A.B = B.A$
4. $A.A \geq 0$ และ $A.A = 0$ ก็ต่อเมื่อ $A = 0$

<u>พิสูจน์</u> พิสูจน์ในกรณี 1

เนื่องจาก A, B, C เป็นเวกเตอร์ใน R^n เวกเตอร์ A, B, C สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$
$$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

พิจารณา $A + B = (a_1 + b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n)$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}(A+B).C &= (a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2+\ldots+(a_n+b_n)c_n \\ &= a_1c_1+b_1c_1+a_2c_2+b_2c_2+\ldots+a_nc_n+b_nc_n \\ &= (a_1c_1+a_2c_2+\ldots+a_nc_n)+(b_1c_1+b_2c_2+\ldots+b_nc_n)\end{aligned}$$

$\therefore (A+B).C = A.C + B.C$

นั่นคือ $(A+B).C = A.C + B.C$

<u>นิยาม 2.1.4</u> ถ้า A เป็นเวกเตอร์ใน R^n นอร์ม (norm) ของเวกเตอร์ A ซึ่งเขียนแทนด้วย $\| A \|$ กำหนดดังนี้

$$\| A \| = \sqrt{A \cdot A}$$

ดังนั้นถ้าให้ $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ จะได้

$$\| A \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$

และ $\| A \| = \| -A \|$

<u>ตัวอย่าง 2.1.5</u> ให้ $A = (2,3,-1)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3 ดังนั้น

$$\| A \| = \sqrt{2^2+3^2+(-1)^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{15}$$

<u>ทฤษฎี 2.1.3</u> ให้ c เป็นสกาลาร์ใด ๆ และ A เป็นเวกเตอร์ใน R^n จะได้ว่า

$$\| cA \| = |c| \, \| A \|$$

<u>พิสูจน์</u> จากนิยาม 2.1.4 จะได้ว่า $\| cA \|^2 = (cA) \cdot (cA)$

$$= c^2 (A \cdot A)$$

ดังนั้น $\| cA \| = |c| \, \| A \|$

<u>นิยาม 2.1.5</u> ถ้า A,B เป็นเวกเตอร์ใน R^n ระยะระหว่างเวกเตอร์ A และ B คือนอร์มของเวกเตอร์ A-B ซึ่งคือ

$$\| A-B \| = \sqrt{(A-B) \cdot (A-B)}$$

ถ้า $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

A-B จะเท่ากับ $(a_1-b_1, a_2-b_2, \ldots, a_n-b_n)$ ดังนั้น

$$\| A-B \| = \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2}$$

<u>ตัวอย่าง 2.1.6</u> ให้ $A = (-1,2)$, $B = (3,4)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^2
ให้หาระยะระหว่างเวกเตอร์ A, B

<u>วิธีทำ</u> $A-B = (-4,-2)$

ดังนั้น $\|A-B\| = \sqrt{(-4)^2+(-2)^2} = \sqrt{20}$

<u>นิยาม 2.1.6</u> ถ้า E เป็นเวกเตอร์ใน R^n และ $\|E\|$ เท่ากับ 1 จะเรียกเวกเตอร์ E ว่าเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

และถ้า A เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ใน R^n

แล้ว $E = \frac{A}{\|A\|}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ A

<u>ตัวอย่าง 2.1.7</u> ให้ $A = (1,2,-3)$ จะได้ $\|A\| = \sqrt{14}$ ดังนั้นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ A คือ E

$E = (\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}})$ และ $\|E\| = \sqrt{\frac{1}{14}+\frac{4}{14}+\frac{9}{14}} = 1$

<u>ทฤษฎี 2.1.4</u> ถ้า A, B เป็นเวกเตอร์ใน R^n จะได้ว่า $|A.B| \leq \|A\|\|B\|$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $A = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $B = (b_1,b_2,\ldots,b_n)$

ถ้า $A = 0$, $B = 0$ หรือ $A = 0$, $B \neq 0$

จะได้ว่า $0 = |A.B| \leq \|A\|\|B\| = 0$

ถ้า $A \neq 0$, $B \neq 0$ ดังนั้น $\|A\| \neq 0$ และ $\|B\| \neq 0$

จากทฤษฎี 2.1.2 ข้อ 4 เนื่องจาก

$$|A.B| = |a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n| \leq |a_1b_1|+|a_2b_2|+\ldots+|a_nb_n|$$

$$= \Sigma|a_ib_i|$$

เมื่อ $i = 1,2,\ldots,n$

ถ้า $x,y \in R$ ดังนั้น $0 \leq (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

และจะได้ว่า

$$2xy \leq x^2 + y^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ให้ $x = \frac{|a_i|}{\|A\|}$, $y = \frac{|b_i|}{\|B\|}$ แทนค่า x,y ใน (1) จะได้

$$\frac{2|a_i||b_i|}{\|A\|\|B\|} \leq \frac{|a_i|^2}{\|A\|^2} + \frac{|b_i|^2}{\|B\|^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

จากนิยาม 2.1.4 ได้ว่า $\|A\|^2 = \Sigma a_i^2 = \Sigma |a_i|^2$

$$\|B\|^2 = \Sigma b_i^2 = \Sigma |b_i|^2$$

จาก (2) ใส่เครื่องหมาย Σ (ผลรวม) เทียบกับ i และเนื่องจาก

$|a_i||b_i| = |a_ib_i|$

จะได้ว่า

$$\frac{2\Sigma|a_ib_i|}{\|A\|\|B\|} \leq \frac{\Sigma|a_i|^2}{\|A\|^2} + \frac{\Sigma|b_i|^2}{\|B\|^2} = \frac{\|A\|^2}{\|A\|^2} + \frac{\|B\|^2}{\|B\|^2} = 2$$

ดังนั้น $\frac{\Sigma|a_ib_i|}{\|A\|\|B\|} \leq 1$

$$\Sigma|a_ib_i| \leq \|A\|\|B\|$$

เนื่องจาก $|A.B| = |a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n| \leq |a_1b_1| + \ldots + |a_nb_n|$

$$= \Sigma|a_ib_i|$$

นั่นคือ $|A.B| \leq \|A\|\|B\|$ อสมการนี้เรียกว่า

Cauchy-Schwary Inequality

<u>ทฤษฎี 2.1.5</u> ให้ A, B เป็นเวกเตอร์ใน R^n จะได้ว่า

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า

$$\|A+B\|^2 = (A+B)\cdot(A+B)$$
$$= A\cdot A + 2A\cdot B + B\cdot B$$

ดังนั้น

$$\|A+B\|^2 = \|A\|^2 + 2A\cdot B + \|B\|^2$$
$$\leq \|A\|^2 + 2|A\cdot B| + \|B\|^2$$
$$\leq \|A\|^2 + 2\|A\|\|B\| + \|B\|^2$$
$$= (\|A\| + \|B\|)^2$$

ดังนั้น $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

<u>นิยาม 2.1.7</u> ให้ F เป็นเซตที่ไม่ว่าง ซึ่งมีการกระทำ 2 ชนิดบนเซต F คือ การบวก และการคูณ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ " + " และ " . " จะเรียกเซต F ภายใต้การกระทำ + และ . ว่าเป็นฟิลด์(field) เมื่อสอดคล้องคุณสมบัติต่อไปนี้

1. สำหรับทุก ๆ a, b ใน F, $a+b = F$
2. สำหรับทุก ๆ a, b ใน F, $a+b = b+a$
3. สำหรับทุก ๆ a, b, c ใน F, $(a+b)+c = a+(b+c)$
4. สำหรับทุก ๆ a ใน F จะมีสมาชิก 0 เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $a+0 = 0+a = a$
5. สำหรับแต่ละ a ใน F จะมี $-a$ เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $a + (-a) = 0 = (-a) + a$

6. สำหรับทุก ๆ a,b ใน F, $ab \in F$

7. สำหรับทุก ๆ a,b ใน F, $ab = ba$

8. สำหรับทุก ๆ a,b,c ใน F, $(ab)c = a(bc)$

9. สำหรับทุก ๆ a ใน F จะมีสมาชิก 1 ใน F ที่ทำให้
   $a.1 = a = 1.a$

10. สำหรับแต่ละ a ใน F จะมี a^{-1} (อินเวอร์สของ a) ใน F
    ที่ทำให้ $a.a^{-1} = 1 = a^{-1}.a$

11. สำหรับ a,b,c ใน F, $a.(b+c) = a.b + a.c$

<u>ตัวอย่าง 2.1.8</u> เซตของจำนวนเชิงซ้อนเขียนแทนด้วย C ภายใต้การกระทำ $+$ และ $.$ เป็นฟิลด์ เซตของจำนวนจริง เขียนแทนด้วย R ภายใต้การกระทำ$+$ และ $.$ เป็นฟิลด์ เซตของจำนวนเต็มบวก เขียนแทนด้วยI^+ ภายใต้การกระทำ $+$ และ $.$ ไม่เป็นฟิลด์ เพราะไม่มีอินเวอร์สภายใต้การบวกและคูณ และไม่มีสมาชิกศูนย์

<u>นิยาม 2.1.8</u> ให้ F เป็นฟิลด์ของสกาลาร์ และ V เป็นเซตที่ไม่ว่าง (nonempty set) สมาชิกใน V เรียกว่า "เวกเตอร์" เรียกเซตV ภายใต้การกระทำ 2 ชนิด คือการกระทำภายใต้การบวก (vector addition) และการคูณด้วยสกาลาร์(scalar multiplication) ว่าเวกเตอร์สเปซบนฟิลด์ F (vector space over F) ก็ต่อเมื่อ

1. สำหรับทุก ๆ $X,Y \in V$, $X+Y \in V$
2. สำหรับทุก ๆ $X,Y \in V$, $X+Y = Y+X$
3. สำหรับทุก ๆ $X,Y,Z \in V$, $(X+Y)+Z = X+(Y+Z)$
4. มีสมาชิก 0 ในV ที่ทำให้ $0+X = X+0 = X$ สำหรับทุก ๆ X ใน V เวกเตอร์ 0 เรียกว่าเวกเตอร์ศูนย์ (zero vector)

5. แต่ละสมาชิก X ใน V จะมี $-X$ ใน V ที่ทำให้

$$X + (-X) = (-X) + X = 0$$

เวกเตอร์ $-X$ เรียกว่าอินเวอร์สของ X

6. สำหรับทุก ๆ $X \in V$ และ $a \in F$, $aX \in V$

7. สำหรับทุก ๆ $X \in V$ และ $a, b \in F$, $(ab)X = a(bX)$

8. สำหรับทุก ๆ $X \in V$ และ $a, b \in F$, $(a+b)X = aX + bX$

9. สำหรับทุก ๆ $X, Y \in V$ และ $a \in F$, $a(X+Y) = aX + aY$

10. สำหรับทุก ๆ $X \in V$ และ $1 \in F$, $1X = X$

<u>ตัวอย่าง 2.1.9</u> ให้ $V = R^n$ เป็นสเปซของจำนวนจริงที่มี n มิติ และ F เป็นฟิลด์ของจำนวนจริง

ถ้า $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ และ $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

เป็นเวกเตอร์ใน R^n และ $c \in F$ กำหนดการบวกและการคูณดังนี้

$$A + B = (a_1+b_1,\ a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n)$$

$$cA = (ca_1,\ ca_2, \ldots,\ ca_n)$$

จะได้ว่า V เป็นเวกเตอร์สเปซบนฟิลด์ F

<u>ตัวอย่าง 2.1.10</u> ให้ V เป็นเซตของโพลิโนเมียลใน x (polynomial in x)

ซึ่ง $V = \{a_0+a_1x+a_2x^2 / a_0, a_1, a_2 \in R\}$ สำหรับ

$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2,\quad q = b_0 + b_1x + b_2x^2,\quad p, q \in V$$

และ $\alpha \in R$ กำหนดว่า

$$p + q = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2$$

$$\alpha p = \alpha a_0 + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2$$

จะได้ว่า V เป็นเวกเตอร์สเปซบน R แสดงได้ดังนี้

1. สำหรับ $p, q \in V$

$$p + q = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 \in V$$

2. สำหรับ $p, q \in V$

$$p + q = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2$$
$$= (b_0+a_0) + (b_1+a_1)x + (b_2+a_2)x^2 = q + p$$

3. สำหรับ $p, q, r \in V$ จะได้ว่า $(p+q) + r = p + (q + r)$

4. ให้ o เป็นโพลิโนเมียลศูนย์ใน V จะได้ว่า $p+0 = p = 0+p$

5. สำหรับ $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$
ให้ $-p = -a_0 - a_1x - a_2x^2 \in V$
จะได้ว่า $p + (-p) = 0 = (-p) + p$

6. สำหรับ $c \in R$ และ $p \in V$ จะได้ว่า $cp \in V$

7. สำหรับ $c_1, c_2 \in R, p \in V$ จะได้ว่า $(c_1c_2)p = c_1(c_2p)$

8. สำหรับ $c_1, c_2 \in R$, $p \in V$

$$(c_1+c_2)p = (c_1+c_2)a_0 + (c_1+c_2)a_1x + (c_1+c_2)a_2x^2$$
$$= (c_1a_0+c_1a_1x+c_1a_2x^2)+(c_2a_0+c_2a_1x+c_2a_2x^2)$$

ฉะนั้น $(c_1+c_2)p = c_1p + c_2p$

9. สำหรับ $c \in R$, $p, q \in V$ จะได้ว่า $c(p+q) = cp+cq$

10. สำหรับ $1 \in R$, $p \in V$ จะได้ว่า $1.p = p$

<u>ตัวอย่าง 2.1.11</u> ให้ V เป็นเซตของฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วงปิด $[a,b]$ ให้ $f,g \in V$ และ $c \in R$ นิยาม $f + g$ และ cf ดังนี้

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(cf)(x) = cf(x)$$

จะได้ว่า V เป็นเวกเตอร์สเปซบน R แสดงได้ดังนี้

1. สำหรับ $f,g \in V$
   จะได้ว่า $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \in V$

2. สำหรับ $f,g \in V$

   $$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x)$$

   ดังนั้น $f + g = g + f$

3. สำหรับ $f,g,h \in V$

   $$\begin{aligned}((f + g)+ h)(x) &= (f + g)(x) + h(x)\\ &= (f(x) + g(x)) + h(x)\\ &= f(x) + (g(x) + h(x)+f(x)+(\text{[illegible]})(x)\\ &= (f + (g + h)(x)\end{aligned}$$

   ดังนั้น $(f + g)+ h = f + (g + h)$

4. ให้ 0 เป็นฟังก์ชันศูนย์ โดย $0(x) = 0$
   จะได้ว่า $(f + 0)(x) = f(x) = (0 + f)(x)$
   ดังนั้น $f + 0 = 0 + f$

5. ให้ $-f$ เป็นอินเวอร์สของฟังก์ชัน โดย $(-f)(x) = -f(x)$

จะได้ว่า $(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x)$

$= f(x) - f(x)$

$= 0$

$= ((-f) + f)(x)$

ดังนั้น $f + (-f) = (-f) + f$

6. ให้ $a,b \in R$ และ $f \in V$

พิจารณา $((ab)f)(x) = (ab)(f(x)$

$= a((bf)(x))$

$= (a(bf))(x)$

ดังนั้น $(ab)f = a(bf)$

7. ให้ $a,b \in R$ และ $f \in V$

พิจารณา $((a + b)f)(x) = (a + b)(f(x))$

$= (a(f(x) + b(f(x))$

$= (af)(x) + (bf)(x)$

$= (af + bf)(x)$

ดังนั้น $(a + b)f = af + bf$

8. สำหรับ $f,g \in V$ และ $a \in R$

พิจารณา $(a(f + g))(x) = a((f + g)(x))$

$= a(f(x) + g(x))$

$= (af)(x) + (ag)(x)$

$= (af + ag)(x)$

ดังนั้น $a(f + g) = af + ag$

9. สำหรับ $a \in R$ และ $f \in V$ จะได้ว่า $af \in V$

10. สำหรับทุก ๆ $f \in V$ จะได้ว่า $(1f)(x) = 1(f(x)) = f(x)$

ดังนั้น $1f = f$

นั่นคือ V เป็นเวกเตอร์สเปซบน R

<u>ตัวอย่าง 2.1.12</u> ให้ F เป็นฟิลด์ของจำนวนจริง และ V เป็นเซตของฟังก์ชันf ทั้งหมด จาก F ไปยัง F ถ้า $f, g \in V$ และ $c \in F$ กำหนดการบวก และการคูณดังนี้

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(kf)(x) = kf(x), \quad x \in V$$

จะได้ว่า V เป็นเวกเตอร์สเปซบนฟิลด์ F

<u>ทฤษฎี 2.1.6</u> ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซบนฟิลด์F จะได้ว่า

1. ถ้า $k \in F$ และ $0 \in V$, $k0 = 0$
2. ถ้า $0 \in F$ และ $X \in V$, $0X = 0$
3. $(-k)X = -(kX)$ สำหรับ $k \in F$, $X \in V$
4. ถ้า $kX = 0$ แล้ว $k = 0$ หรือ $X = 0$

<u>พิสูจน์</u> พิสูจน์กรณี 1 และ 3 เท่านั้น

1. เพราะว่า $k0 = k(0 + 0) = k0 + k0$

ฉะนั้น $k0 = 0$

3. เนื่องจาก $0 = (k + (-k))X = kX + (-k)X$

บวก $-kX$ ทั้งสองข้าง

จะได้ว่า $-kX = (-k)X$

<u>นิยาม 2.1.9</u> ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซบนฟิลด์ F และ W เป็นสับเซตที่ไม่ว่างของ V

W เรียกว่าเป็นสับสเปซ (subspace) ของ V ก็ต่อเมื่อ W เป็นเวกเตอร์สเปซบนฟิลด์ F ภายใต้การบวกและการคูณด้วยสกาลาร์

<u>ทฤษฎี 2.1.7</u> ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซบนฟิลด์ F และ W เป็นสับเซตที่ไม่ว่างของ V เรียก W ว่าสับสเปซของ V ก็ต่อเมื่อ

1. ถ้า $X,Y \in W$ แล้ว $X + Y \in W$
2. ถ้า $X \in W$ และ $k \in F$ แล้ว $kX \in W$

หรือ สำหรับ W เป็นสับเซตที่ไม่ว่างของ V เรียก W ว่าสับสเปซของ V ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $X,Y \in W$ และ $a,b \in F$ แล้ว $aX + bY \in W$

<u>ตัวอย่าง 2.1.13</u> ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซ เซตที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ศูนย์ $\{0\}$ เพียงตัวเดียวเป็นสับสเปซของ V และ V เป็นสับสเปซของตัวมันเอง เรียกสับสเปซทั้งสองนี้ว่าทริเวียลสับสเปซ (trivial subspace)

<u>ตัวอย่าง 2.1.14</u> ให้ $V = R^3$ และ $W = \{(a,b,c)/a + b + c = 0$ และ $a,b,c \in R\}$

จะได้ว่า W เป็นสับสเปซของ V แสดงได้ดังนี้

ให้ $X = (a,b,c)$ และ $Y = (a',b',c') \in W$

ดังนั้น $a + b + c = 0,\ a' + b' + c' = 0$

ให้ $k, k' \in R$ พิจารณา

$$\begin{aligned} kX + k'Y &= k(a,b,c) + k'(a',b',c') \\ &= (ka,kb,kc) + (k'a', k'a', k'c') \\ &= (ka + k'a', kb + k'b', kc + k'c') \\ &= (ka + k'a') + (kb + k'b') + (kc + k'c') \\ &= k(a+b+c) + k'(a'+b'+c') = k0 + k'0 = 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $kX + k'Y \in W$ จะได้ว่า W เป็นสับสเปซของ V

<u>ตัวอย่าง 2.1.15</u> พิจารณาสมการโฮโมจีเนียสเชิงเส้น มีค่าตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ บนฟิลด์ R ซึ่งเขียนอยู่ในรูป

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$$

ให้แสดงว่าเซตของคำตอบของ W เป็นสับสเปซของ R^n

<u>วิธีทำ</u> ให้ $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ และ $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in W$

ดังนั้น $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$

และ $a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_ny_n = 0$

ให้ $a, b \in R$ ดังนั้น

$$aX + bY = (ax_1 + by_1, ax_2 + by_2, \ldots, ax_n + by_n)$$

พิจารณา

$$a_1(ax_1+by_1) + a_2(ax_2+by_2) + \ldots + a_n(ax_n+by_n)$$

$$= a(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n) + b(a_1y_1+a_2y_n+\ldots+a_ny_n)$$

$$= a0 + b0 = 0$$

ดังนั้น $aX + bY \in W$ จะได้ว่า W เป็นสับสเปซของ R^n

<u>ทฤษฎี 2.1.8</u> ให้ U และ W เป็นสับสเปซของเวกเตอร์สเปซ V บนฟิลด์ F จะได้ว่า $U \cap W$ เป็นสับสเปซของ V

<u>พิสูจน์</u> ให้ $X \in U \cap W$ และ $Y \in U \cap W$

ดังนั้น $X \in U$ และ $Y \in U$

เพราะว่า U เป็นสับสเปซ จะได้ว่า $X + Y \in U$

และ $X \in W$ และ $Y \in W$

เพราะว่า W เป็นสับสเปซ จะได้ว่า $X + Y \in W$

ดังนั้น $X + Y \in U \cap W$

ให้ $c \in F$ เนื่องจาก U และ W เป็นสับสเปซ และ $X \in U \cap W$

ดังนั้น $cX \in U$ และ $cX \in W$ จะได้ว่า $cX \in U \cap W$

นั่นคือ $U \cap W$ เป็นสับสเปซของ V

<u>นิยาม 2.1.10</u> ให้ U และ W เป็นสับสเปซของเวกเตอร์สเปซ V ผลบวก(sum) ของ U และ W ซึ่งเขียนแทนด้วย U + W กำหนดดังนี้

$$U + W = \{X + Y / X \in U \text{ และ } Y \in W\}$$

<u>ทฤษฎี 2.1.9</u> ถ้า U และ W เป็นสับสเปซของเวกเตอร์สเปซ V บนฟิลด์ F จะได้ว่า U + W เป็นสับสเปซของ V

<u>พิสูจน์</u> ให้ $X, Y \in U + W$ และให้ $X = X_1 + Y_1$, $Y = X_2 + Y_2$

โดย $X_1, X_2 \in U$ และ $Y_1, Y_2 \in W$

พิจารณา $X + Y = (X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2)$

$$= (X_1 + X_2) + (Y_1 + Y_2) \in U + W$$

ให้ $c \in F$ พิจารณา

$$cX = c(X_1 + Y_1) = cX_1 + cY_1 \in U + W$$

นั่นคือ U + W เป็นสับสเปซของ V

<u>นิยาม 2.1.11</u> ถ้า U และ W เป็นสับสเปซของ V ผลรวมโดยตรง (direct sum) ของ U และ W ซึ่งเขียนแทนด้วย $U \oplus W$ ถูกนิยามดังนี้

ทุก ๆ สมาชิก $X \in U \oplus W$ จะมีสมาชิก $Y \in U$ เพียงตัวเดียว และ $Z \in W$ เพียงตัวเดียวที่ทำให้ $X = Y + Z$

<u>ทฤษฎี 2.1.10</u> ถ้า U และ W เป็นสับสเปซของ V $V = U \oplus W$
ก็ต่อเมื่อ $V = U + W$ และ $U \cap W = \{0\}$

<u>พิสูจน์</u> ถ้า $V = U \oplus W$ จากนิยาม 2.1.11 จะได้ว่าทุก ๆ สมาชิก $X \in V$ จะมี $Y \in U$ และ $Z \in W$ เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $X = Y + Z$ ดังนั้น $V \subseteq U + W$ และเนื่องจาก U และ W เป็นสับสเปซของ V จากทฤษฎี 2.1.9 $U + W$ ก็เป็นสับสเปซของ V ดังนั้น $U + W \subseteq V$ จะได้ว่า $V = U + W$

ให้ $X \in U \cap W$ เนื่องจาก $X = X+0$, $X \in U$ และ $0 \in W$ และ $X = 0 + X$, $0 \in U$ และ $X \in W$ เพราะว่าผลบวกของ X มีเพียงแบบเดียวเท่านั้น จะได้ว่า $X = 0$ นั่นคือ $U \cap W = \{0\}$

ในทางกลับกัน ให้ $V = U + W$, $U \cap W = \{0\}$
ให้ $X \in V$ จะแสดงว่า X สามารถเขียนในรูปผลรวมโดยตรงของ U และ W ได้ เพียงแบบเดียวเท่านั้น

ให้ $X \in V$, $X = X_1 + Y_1$ และ $X = X_2 + Y_2$
เมื่อ $X_1, X_2 \in U$, $Y_1, Y_2 \in W$

ดังนั้น $X_1 + Y_1 = X_2 + Y_2$
$X_1 - X_2 = Y_2 - Y_1$

แต่ $X_1 - X_2 \in U$ และ $Y_2 - Y_1 \in W$

เนื่องจาก $U \cap W = \{0\}$

ดังนั้น $X_1 - X_2 = 0$, $Y_2 - Y_1 = 0$

จะได้ว่า $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$

นั่นคือ $V = U \oplus W$

ตัวอย่าง 2.1.16 ให้ $V = R^3 = \{(a,b,c)/a,b,c \in R\}$

และกำหนดสับสเปซดังนี้

$U = \{(a,b,c)/a = b = c\}$, $W = \{(0,b,c)/b,c \in R\}$

ให้แสดงว่า $V = U \oplus W$

วิธีทำ ให้ $X = (a,b,c) \in R^3$

จะได้ $X = (a,a,a) + (0,b-a,c-a)$

โดย $(a,a,a) \in U$ และ $(0,b-a,c-a) \in W$

จะได้ว่า $V = U + W$

ให้ $X = (a,b,c) \in U \cap W$

ดังนั้น $a = b = c$ และ $a = 0$

ทำให้ $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ จะได้ $X = (0,0,0)$

ฉะนั้น $U \cap W = \{0\}$

แสดงว่า $V = U \oplus W$

ตัวอย่าง 2.1.17 ให้ $V = \{(a,b,c)/a,b,c \in R\}$

ให้ $U = \{(0,b,c)/b,c \in R\}$ และ $W = \{(a,b,0)/a,b \in R\}$

แล้ว V ไม่เป็นผลรวมโดยตรงของ U และ W

เพราะว่า $(0,1,0) \in U \cap W$ ดังนั้น $U \cap W \neq \{0\}$

<u>นิยาม 2.1.12</u> ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซบนฟิลด์ F เวกเตอร์ X ใน V จะเรียกว่าเป็นผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ของเวกเตอร์ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ใน V ถ้ามี $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ใน F ที่ทำให้

$$X = k_1X_1 + k_2X_2 + \ldots + k_nX_n$$

<u>ทฤษฎี 2.1.11</u> ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซบนฟิลด์ F และ $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ใน V เซตของสมาชิกที่เป็นผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S ซึ่งเขียนแทนด้วย L(S) หรือ $L\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ จะเป็นสับสเปซของ V

(ถ้า $Y \in L\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ แล้ว $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$
$a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$)

<u>พิสูจน์</u>

ให้ $Y, Z \in L(S)$

ดังนั้น $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n,\ a_i \in F\ (i = 1, 2, \ldots, n)$

$Z = b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots + b_nX_n,\ b_i \in F\ (i = 1, 2, \ldots, n)$

จะได้ $Y + Z = (a_1+b_1)X_1 + (a_2+b_2)X_2 + \ldots + (a_n+b_n)X_n \in L(S)$

และถ้า $k \in F$ และ $Y \in L(S)$

พิจารณา $kY = k(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n)$

$= (ka_1)X_1 + (ka_2)X_2 + \ldots + (ka_n)X_n \in L(S)$

จะได้ว่า L(S) เป็นสับสเปซของ V

<u>นิยาม 2.1.13</u> ให้ $S = \{X_1, \ldots, X_n\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ในเวกเตอร์สเปซ V บนฟิลด์ F ถ้าทุก ๆ เวกเตอร์ใน V สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S จะเรียกว่า S สแปน(span) V เขียนแทนด้วย $V = L(S)$ หรือ $V = L\{X_1, \ldots, X_n\}$

<u>ตัวอย่าง 2.1.18</u> เวกเตอร์ $E_1 = (1,0,0)$, $E_2 = (0,1,0)$, $E_3 = (0,0,1)$ สแปน R^3 เพราะว่าสำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $(a,b,c) \in R^3$ จะได้ว่า

$$(a,b,c) = aE_1 + bE_2 + cE_3$$

<u>ตัวอย่าง 2.1.19</u> ให้ $X_1 = (1,1,2)$, $X_2 = (1,0,2)$, $X_3 = (1,1,0)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^3 ให้แสดงว่า $R^3 = L\{X_1, X_2, X_3\}$

<u>วิธีทำ</u> เราจะต้องแสดงว่าสำหรับทุก ๆ $X = (a,b,c) \in R^3$ สามารถหา $c_1, c_2, c_3 \in R$ ที่ทำให้ $X = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3$

ดังนั้น $X = c_1(1,1,2) + c_2(1,0,2) + c_3(0,1,0)$

$$(a,b,c) = (c_1+c_2+c_3,\ c_1+c_3,\ 2c_1+2c_2)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= a \\ c_1 \quad\quad + c_3 &= b \\ 2c_1 + 2c_2 \quad\quad &= c \end{aligned}$$

จากสมการทั้ง 3 ได้

$$c_1 = -\frac{2a + 2b + c}{3}$$

$$c_2 = \frac{a - b + c}{3}$$

$$c_3 = \frac{4a - b - 2c}{3}$$

ดังนั้น $R^3 = L\{X_1, X_2, X_3\}$

<u>นิยาม 2.1.14</u> ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซบนฟิลด์ F ให้ $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ใน V แล้ว S จะเรียกว่าเชิงเส้นไม่อิสระ (linearly dependent) ถ้ามีสกาลาร์ $a_1, a_2, \ldots, a_r$ ใน F ซึ่งไม่เป็นศูนย์หมดทุกตัว ที่ทำให้

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_rX_r = 0$$

ถ้าไม่สามารถหา a_i ลักษณะดังกล่าวได้ แล้ว S จะเรียกว่าเชิงเส้นอิสระ (linearly independent) นั่นคือถ้า $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นเชิงเส้นอิสระ และ

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_rX_r = 0 \quad \text{แล้ว} \quad a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 0$$

<u>ข้อสังเกต</u> เซต $\{0\}$ เชิงเส้นไม่อิสระเพราะว่า $a.0 = 0$ โดย $a \neq 0$

<u>ตัวอย่าง 2.1.20</u> ให้ $S = \{E_1 = (1,0,0), E_2 = (0,1,0), E_3 = (0,0,1)\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ใน R^3 แล้ว S เป็นเชิงเส้นอิสระ เพราะว่า ถ้า $a, b, c \in R$

$$a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = 0$$

แล้วจะได้ว่า $a = 0,\ b = 0,\ c = 0$

<u>ตัวอย่าง 2.1.21</u> ให้ $S = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ใน R^4 โดย $X_1 = (1,1,1,0)$, $X_2 = (0,1,1,0)$, $X_3 = (0,1,0,0)$ และ $X_4 = (0,0,1,0)$

เนื่องจาก $0.X_1 + 1.X_2 - 1.X_3 - 1.X_4 = 0$

ดังนั้น S เป็นเชิงเส้นไม่อิสระ

ตัวอย่าง 2.1.22 ให้ $V = P_1$ และ $S = \{v_1 = 1+x,\ v_2 = 1-x\}$
ให้แสดงว่า S เป็นเชิงเส้นอิสระ

วิธีทำ ให้ $S = \{v_1, v_2\}$ เป็นเชิงเส้นไม่อิสระ ดังนั้นสามารถหาสกาลาร์ a_1, a_2 ไม่เป็นศูนย์ทั้งคู่ที่ทำให้

$$a_1v_1 + a_2v_2 = 0$$

$$a_1(1+x)+a_2(1-x) = 0$$

$$(a_1+a_2)+(a_1-a_2)x = 0$$

จากคุณสมบัติของโพลิโนเมียล จะได้ว่า $a_1+a_2=0,\ a_1-a_2=0$
นั่นคือ $a_1 = a_2 = 0$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น S เป็นเชิงเส้นอิสระ

ทฤษฎี 2.1.12 ให้ $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์สเปซ V และแต่ละเวกเตอร์ใน S ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์แล้ว เซต S จะเป็นเชิงเส้นไม่อิสระก็ต่อเมื่อมีเวกเตอร์ X_k ใน S ซึ่ง $k > 1$ ที่ทำให้ X_k เขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ที่นำหน้าใน S (นั่นคือ X_k สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของ $X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$)

พิสูจน์ ให้ S เป็นเชิงเส้นไม่อิสระ ดังนั้นจะมีสกาลาร์ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ที่ไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด ที่ทำให้

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n = 0$$

ให้ k เป็นจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุด ที่ทำให้ $a_k \neq 0$
ดังนั้น $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n = 0$ เมื่อ k น้อยกว่า n
จะได้ว่า

$$a_1X_1+a_2X_2+\ldots+a_kX_k+0X_{k+1}+\ldots+0X_n = 0$$

ให้ $k = 1$ ดังนั้น $a_2 = \dots = a_n = 0$
และจะได้ว่า $a_1 X_1 = 0$ เพราะว่า $X_1 \neq 0$ ดังนั้น $a_1 = 0$
จะได้ว่า a_i เป็นศูนย์ทั้งหมด เกิดข้อขัดแย้ง
ดังนั้น $k > 1$ และจะได้ว่า

$$a_1X_1+a_2X_2+\dots+a_kX_k = 0 \quad \text{และ} \quad a_k \neq 0$$

จะได้ว่า $X_k = (\frac{-a_1}{a_k})X_1+(\frac{-a_2}{a_k})X_2+\dots+(\frac{-a_{k-1}}{a_k})X_{k-1}$

นั่นคือ X_k สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของ $X_1, X_2, \dots, X_{k-1}$, $k > 1$

ในทางกลับกัน สำหรับ $k > 1$ แล้ว X_k สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของ $X_1, X_2, \dots, X_{k-1}$ ดังนั้น
$X_k = a_1X_1+a_2X_2+\dots+a_{k-1}X_{k-1}$ โดย $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ เป็นสกาลาร์ ดังนั้น

$$a_1X_1+a_2X_2+\dots+a_{k-1}X_{k-1} - X_k+0X_{k+1}+\dots+X_n = 0$$

เนื่องจาก $a_1, a_2, \dots, a_n$ ไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด จะได้ว่า
$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ เป็นเชิงเส้นไม่อิสระ

<u>ทฤษฎี 2.1.13</u> ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซบนฟิลด์ F ให้ $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ในเวกเตอร์สเปซ V ถ้า $V = L\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ จะได้ว่า

1. ถ้า $Y \varepsilon V$ แล้ว $W = \{Y, X_1, \ldots, X_n\}$ เป็นเชิงเส้นไม่อิสระ และ $V = L\{Y, X_1, X_2, \ldots, X_n\}$
2. ถ้า X_i เป็นผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ที่นำหน้าใน S แล้ว $V = L\{X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n\}$

<u>พิสูจน์</u> 1. เพราะว่า $V = L\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$

ดังนั้น $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ สแปน V

ให้ $Y \varepsilon V$ ดังนั้น Y สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของ S ได้ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$

จะได้ว่า $W = \{Y, X_1, \ldots, X_n\}$ เป็นเชิงเส้นไม่อิสระ และเนื่องจากทุก ๆ เวกเตอร์ใน S อยู่ใน W ดังนั้น $Y \varepsilon V$ ก็สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน W ได้

นั่นคือ $V = L\{Y, X_1, \ldots, X_n\}$

2. เพราะว่า $X_i = k_1X_1 + k_2X_2 + \ldots + k_{i-1}X_{i-1}$

ให้ $Y \varepsilon V$ ดังนั้น Y สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของ S ได้

จะได้ว่า $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$ ....(1)

แทนค่า X_i ใน (1)

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_i(k_1X_1 + k_2X_2 + \ldots + k_{i-1}X_{i-1}) + \ldots + a_nX_n$$

$$= (a_1 + a_ik_1)X_1 + \ldots + (a_{i-1} + a_ik_{i-1})X_{i-1} + a_{i+1}X_{i+1} + \ldots + a\,X$$

ดังนั้น $\{X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n\}$ สแปน V

หรือ $V = L\{X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n\}$

<u>ทฤษฎี 2.1.14</u> ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซบนฟิลด์ F และ $V = L\{X_1, X_2, \ldots$
และถ้า $S = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ของ V ที่เป็นเชิงเส้นอิสระแล้ว $m \leq n$

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า $V = L\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$

ดังนั้น $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ สแปน V

เพราะว่า $Y_1 \varepsilon V$ จากทฤษฎี 2.1.13 จะได้ว่า

$S_1 = \{Y_1, X_1, X_2, \ldots, X_n\}$

เป็นเชิงเส้นไม่อิสระ และสแปน V

ให้ X_i เป็นเวกเตอร์ที่เป็นผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S_1

ให้ $T_1 = \{Y_1, X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n\}$

จากทฤษฎี 2.1.13 จะได้ว่า T_1 สแปนV และเนื่องจาก $Y_2 \varepsilon V$

จากทฤษฎี 2.1.13 $S_2 = \{Y_1, Y_2, X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n\}$
เป็นเชิงเส้นไม่อิสระ และสแปน V และจะมีเวกเตอร์บางตัวใน S_2 ที่เป็นผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ที่นำหน้าใน S_2 เนื่องจาก S เป็นเชิงเส้นอิสระ ดังนั้นเวกเตอร์ดังกล่าวต้องไม่ใช่ Y_1, Y_2 ดังนั้นเวกเตอร์นี้ต้องเป็น X_j โดย $i \neq j$ ทำขบวนการเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ โดยแต่ละเวกเตอร์ Y ที่เพิ่มเข้ามา แต่ละเวกเตอร์ X จะถูกตัดทิ้งไป จะได้ว่า

$m \leq n$

<u>นิยาม 2.1.15</u> ให้ $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ในเวกเตอร์สเปซ V

ถ้า S เป็นเชิงเส้นอิสระ และ $V = L\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$

จะเรียกว่า S เป็นฐาน (basis) ของเวกเตอร์สเปซ V

เวกเตอร์สเปซที่มีฐานเป็นเซตจำกัด เรียกว่าเป็นเวกเตอร์สเปซในมิติจำกัด

จำนวนเวกเตอร์ในฐาน V เรียกว่ามิติ (dimension) ของเวกเตอร์สเปซ V และใช้สัญลักษณ์ dim V แทนมิติของเวกเตอร์สเปซ V

ถ้า $V = \{0\}$ แล้วเราจะกล่าวว่า V มีมิติ 0 หรือ $\dim V = 0$

<u>ตัวอย่าง 2.1.23</u> ให้ $S = \{E_1, E_2, E_3\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ใน R^3

โดย $E_1 = (1,0,0)$, $E_2 = (0,1,0)$, $E_3 = (0,0,1)$

จากตัวอย่าง 2.1.16 $\{E_1, E_2, E_3\}$ สแปน R^3

จากตัวอย่าง 2.1.18 $\{E_1, E_2, E_3\}$ เป็นเชิงเส้นอิสระ

ดังนั้น S เป็นฐานของ R^3 และฐานนี้เรียกว่าฐานมาตรฐานของ R^3 (usual basis หรือ standard basis) และเวกเตอร์สเปซนี้มีมิติ 3 หรือ $\dim R^3 = 3$

<u>ตัวอย่าง 2.1.24</u> ให้ $S = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ใน R^n โดย $E_1 = (1,0,\ldots,0)$, $E_2 = (0,1,0,\ldots,0)$, $E_n = (0,0,\ldots,1)$ จะได้ว่า $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ เป็นฐานมาตรฐานของ R^n

ตัวอย่าง 2.1.25 ให้ $V = P_n$ เป็นโพลิโนเมียลดีกรี $\leq n$ และ

$S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ใน P_n แล้ว S จะเป็นฐานของ P_n เพราะว่าโพลิโนเมียลใน P_n เขียนอยู่ในรูป

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

ดังนั้น S สแปน V และเนื่องจาก $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0$

สำหรับ $x \neq 0$ แล้ว $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$

จะได้ว่า S เป็นเชิงเส้นอิสระ ดังนั้น S เป็นฐานของ V และฐานนี้เป็นฐานมาตรฐานของ P_n

ทฤษฎี 2.1.16 ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซในมิติจำกัด ให้ $S_1 = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ และ $S_2 = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}$ เป็นฐานของเวกเตอร์สเปซ V แล้ว $m = n$

พิสูจน์ เนื่องจาก S_1 สแปน V และ S_2 เป็นเชิงเส้นอิสระ

จากทฤษฎี 2.1.14 จะได้ $n \geq m$ และเนื่องจาก S_2 สแปน V และ S_1 เป็นเชิงเส้นอิสระ จะได้ $m \geq n$ เพราะฉะนั้น $m = n$

ทฤษฎี 2.1.17 ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซมิติ n ให้ $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ เป็นเชิงเส้นอิสระ ใน V แล้วจะมีเวกเตอร์ $X_{m+1}, \ldots, X_n$ ใน V ที่ทำให้ $W = \{X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}, \ldots, X_n\}$ เป็นฐานชุดหนึ่งของ V

พิสูจน์ เพราะว่า $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ เป็นเชิงเส้นอิสระ ถ้า

$V = L\{X_1, \ldots, X_m\}$ จะได้ว่า $\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$

เป็นฐานชุดหนึ่งของ V

ถ้า $V \neq L\{X_1,X_2,\ldots,X_m\}$ ให้ Y_1 เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน V โดย $Y_1 \notin L\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$ จะได้ว่า $\{X_1,\ldots,X_m, Y_1\}$ เป็นเชิงเส้นอิสระ เพราะว่า ถ้า $\{X_1,X_2,\ldots,X_m, Y_1\}$ เป็นเชิงเส้นไม่อิสระ แล้ว จากทฤษฎี 2.1.11 จะมีเวกเตอร์ใน $\{X_1,X_2,\ldots,X_m, Y_1\}$ สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ที่อยู่นำหน้า และเวกเตอร์ดังกล่าวต้องไม่ใช่ $X_1,X_2,\ldots,X_m$ เพราะว่า $X_1,X_2,\ldots,X_m$ เป็นเชิงเส้นอิสระ และไม่ใช่ Y_1 เพราะว่า $Y_1 \notin L\{X_1,X_2,\ldots,X_m\}$ดังนั้นเกิดข้อขัดแย้ง จะได้ว่า $\{X_1,X_2,\ldots,X_m, Y_1\}$ เป็นเชิงเส้นอิสระ

และถ้า $V = L\{X_1,X_2,\ldots,X_m, Y_1\}$

แล้ว $\{X_1,\ldots,X_m, Y_1\}$ เป็นฐานของ V

ถ้า $V \neq L\{X_1,X_2,\ldots,X_m, Y_1\}$ และทำขบวนการเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ เนื่องจาก $\dim V = n$ จะได้ว่า $\{X_1,X_2,\ldots,X_m,Y_1,\ldots,Y_{n-m}\}$ เป็นเชิงเส้นอิสระ และ $V = L\{X_1,X_2,\ldots,X_m,Y_1,\ldots,Y_{n-m}\}$

จะได้ว่า $\{X_1,X_2,\ldots,X_m, Y_1,\ldots,Y_{n-m}\}$ เป็นฐานของ V

ถ้าให้ $Y_1 = X_{m+1}, Y_2=X_{m+2},\ldots, Y_{n-m} = X_n$

จะได้ว่า $\{X_1,X_2,\ldots,X_m,X_{m+1},\ldots,X_n\}$

เป็นฐานชุดหนึ่งของ V

<u>ทฤษฎี 2.1.18</u> ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซบนฟิลด์ F โดย

$S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ใน V โดย $X_i \neq 0$

สำหรับทุก ๆ i และ $V = L\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ ดังนั้นจะมี $W \subseteq S$

เป็นฐานของ V

<u>พิสูจน์</u> ไม่มี $W \subseteq S$ เป็นฐานของ V นั่นคือ $W \subseteq S$ เป็นเชิงเส้นไม่อิสระ ไม่สแปน V

เพราะว่า W เป็นเซตของเวกเตอร์ที่เป็นเชิงเส้นไม่อิสระ จาก ทฤษฎี 2.1.2 ให้ X_i เป็นเวกเตอร์ที่เป็นผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ที่อยู่นำหน้าใน W ตัด X_i ทิ้งเกิดเซตใหม่สมมุติให้เป็น W_1 จาก ทฤษฎี 2.1.13 จะได้ว่า W_1 สแปน V เนื่องจาก $W_1 \subseteq W$ แต่ W ไม่สแปน V

ดังนั้น W_1 ไม่สแปน V เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้นจะมี $W \subseteq S$ เป็นฐานของ V

<u>ทฤษฎี 2.1.19</u> ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซมิติ n

1. ถ้า $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นเชิงเส้นอิสระ จะได้ว่า S เป็นฐานของ V

2. ถ้า $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ และ $V = L\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ จะได้ว่า S เป็นฐานของ V

<u>พิสูจน์</u> 1. ถ้า S เป็นเชิงเส้นอิสระที่มีเวกเตอร์ n เวกเตอร์ และ S ไม่เป็นฐานของ V จากทฤษฎี 2.1.17 ดังนั้นจะมีเวกเตอร์ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$, $k > 0$ ที่ทำให้ $\{X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$ เป็นฐานของ V ดังนั้น $\dim V = n+k$ แต่ $\dim V = n$ ดังนั้น $n + k = n$ เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น S เป็นฐานของ V

2. เนื่องจาก $S = \{X_1, \ldots, X_n\}$ และ $V = L\{X_1, \ldots, X_n\}$ แสดงว่า $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ สแปน V จากทฤษฎี 2.1.18 จะมีฐาน W สำหรับ V โดย $W \subseteq S$ เนื่องจาก V เป็นเวกเตอร์สเปซมิติ n ดังนั้นฐาน W จะ มีจำนวนเวกเตอร์ n เวกเตอร์ แสดงว่า $W = S$ ดังนั้น S เป็นฐานของ V

<u>ทฤษฎี 2.1.20</u> ให้ U และ W เป็นสับสเปซของเวกเตอร์สเปซ V โดย V เป็นเวกเตอร์สเปซในมิติจำกัด แล้ว

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

และถ้า $V = U \oplus W$ แล้ว $\dim V = \dim(U+W) = \dim U + \dim W$

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า $U \cap W$ เป็นสับสเปซของ U และ W

ให้ $\dim U = m$, $\dim W = n$ และ $\dim(U \cap W) = r$

และ $S = \{X_1, \ldots, X_r\}$ เป็นฐานของ $U \cap W$ ดังนั้นจะมีเวกเตอร์ $Y_{r+1}, \ldots, Y_m$ และ $Z_{r+1}, \ldots, Z_n$ ที่ทำให้

$$S_1 = \{X_1, \ldots, X_r, Y_{r+1}, \ldots, Y_m\}$$

และ $S_2 = \{X_1, \ldots, X_r, Z_{r+1}, \ldots, Z_n\}$ เป็นฐานของ U และ W ตามลำดับ

ให้ $B = \{X_1, \ldots, X_r, Y_{r+1}, \ldots, Y_m, Z_{r+1}, \ldots, Z_n\}$

จะแสดงว่าเซต B เป็นฐานของ $U + W$

เนื่องจากทุกเวกเตอร์ใน $U + W$ เขียนอยู่ในรูป $u + w$ โดย $u \in U$ และ $w \in W$ และ u, w สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้น

ของ S_1 และ S_2ได้ ดังนั้น $u + w$ เขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของเซต B ได้ นั่นคือ B สแปน $U + W$

ต่อไปจะแสดงว่า B เป็นเชิงเส้นอิสระ

ให้ $a_1X_1+\cdots+a_rX_r+b_{r+1}Y_{r+1}+\cdots+b_mY_m+c_{r+1}Z_{r+1}+\cdots+c_nZ_n=0$ ....(1)

ให้ $v = a_1X_1+\cdots+a_rX_r+b_{r+1}Y_{r+1}+\cdots+b_mY_m$ ....(2)

จาก(1) จะได้ว่า

$$v = -c_{r+1}Z_{r+1} - \cdots - c_nZ_n \qquad \text{..........(3)}$$

จาก(2) จะได้ว่า $v \in U$ จาก(3) จะได้ว่า $v \in W$

ดังนั้น $v \in U \cap W$

เนื่องจาก $S = \{X_1,\ldots,X_r\}$ เป็นฐานของ $U \cap W$ ดังนั้น จะมีสเกลาร์ $d_1,\ldots, d_r$ ที่ทำให้

$v = d_1X_1+d_2X_2+\cdots+d_rX_r$ จาก(3) จะได้ว่า

$$d_1X_1+\cdots+d_rX_r + c_{r+1}Z_{r+1}+\cdots+c_nZ_n = 0$$

แต่ $S_2 = \{X_1,\ldots,X_r, Z_{r+1},\ldots, Z_n\}$ เป็นฐานของ U
ดังนั้น S_2 เป็นเชิงเส้นอิสระ จะได้ว่า $c_{r+1} =\cdots= c_n = 0$
แทนค่าใน (1)

$$a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_rX_r+b_{r+1}Y_{r+1}+\cdots+b_mY_m = 0$$

แต่ $S_1 = \{X_1,\ldots,X_r, Y_{r+1},\ldots,Y_m\}$ เป็นฐานของ W
ดังนั้น S_1 เป็นเชิงเส้นอิสระ จะได้ว่า

$$a_1 = \cdots = a_n = b_{r+1} = \cdots = b_m = 0$$

ดังนั้น B เป็นเชิงเส้นอิสระ

จะได้ว่า B เป็นฐานของ $U + W$

ดังนั้น $\dim(U + W) = r + (m-r) + (n-r) = m+n-r$

นั่นคือ $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

และถ้า $V = U \oplus W$ จะได้ว่า $V = U + W$

และ $U \cap W = \{0\}$

ดังนั้น $\dim V = \dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

<u>ทฤษฎี 2.1.21</u> ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซในมิติจำกัด และ $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ เป็นฐานของ V แล้วทุก ๆ เวกเตอร์ $x \in V$ สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของฐาน S ได้เพียงวิธีเดียวเท่านั้น

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ เป็นฐานของ V

ให้ $x \in V$ ดังนั้น x สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ได้

ฉะนั้น $x = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ ....(1)

สมมุติ x สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ได้อีกวิธีหนึ่ง

ฉะนั้น $x = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n$ ....(2)

จาก(1) และ(2) จะได้ว่า

$$(a_1-b_1)x_1 + (a_2-b_2)x_2 + \ldots + (a_n-b_n)x_n = 0$$

แต่ $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ เป็นเชิงเส้นอิสระ

จะได้ว่า $a_1-b_1 = 0,\ a_2-b_2 = 0, \ldots, a_n-b_n = 0$

หรือ $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$

ดังนั้นทุก ๆ $X \varepsilon V$ เขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของฐาน

$S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ ได้เพียงวิธีหนึ่งและวิธีเดียวเท่านั้น

<u>หมายเหตุ</u> จากทฤษฎี 2.1.21 ทุก ๆ เวกเตอร์ $X \varepsilon V$ สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของฐาน $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ ได้เพียงวิธีเดียวเท่านั้น

นั่นคือ $X = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$

เรียก $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ว่าโคออร์ดิเนตเวกเตอร์ (coordinate vector) ของ X ที่สัมพันธ์ต่อฐาน S และใช้สัญลักษณ์ $[X]_S$ แทน

จะได้ว่า $[X]_S = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

<u>ตัวอย่าง 2.1.26</u> ให้ $V = P_2$ เป็นโพลิโนเมียลดีกรี ≤ 2 โดย

$V = \{at^2 + bt + c / a,b,c \ \varepsilon \ R\}$

และ $S = \{E_1 = 1,\ E_2 = t-1,\ E_3 = (t-1)^2\}$

เป็นฐานของ V กำหนดให้ $X = 2t^2 - 5t + 6$ ให้หาโคออร์ดิเนตเวกเตอร์ของ X ที่สัมพันธ์ต่อฐาน S

<u>วิธีทำ</u> เพราะว่า $X \varepsilon V$ และ $S = \{E_1, E_2, E_3\}$ เป็นฐานของ V

จะได้ว่า $2t^2-5t+6 = a(1)+b(t-1)+c(t^2-2t+1)$

เมื่อ $a,b,c \ \varepsilon \ R$

ดังนั้น $2t^2-5t+6 = a + bt - b + ct^2 - 2ct + c$

$$= ct^2 + (b-2c)t + (a-b+c)$$

จะได้ว่า $a - b + c = 6$ ....(1)

$b - 2c = -5$ ....(2)

$c = 2$ ....(3)

จาก(1),(2),(3) ได้ $a = 3,\ b = -1,\ c = 2$

ดังนั้น $X = 3E_1 - E_2 + 2E_3$

เพราะฉะนั้น $[X]_S = (3,-1,2)$

2.2 การเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น (Linear Tranformation)

ในหัวข้อนี้จะพูดถึงการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นจากเวกเตอร์สเปซหนึ่งไปยังเวกเตอร์สเปซหนึ่ง

นิยาม 2.2.1 ให้ V และ W เป็นเวกเตอร์สเปซบนฟิลด์ F ฟังก์ชัน$T:V \to W$ เรียกว่าการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น ถ้า T สอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

1. สำหรับ $X,Y \in V$, $T(X+Y) = T(X) + T(Y)$
2. สำหรับ $a \in F$ และ $X \in V$, $T(aX) = aT(X)$

ตัวอย่าง 2.2.1 ให้ $T: R^3 \to R^3$ และกำหนดให้

$T(x,y,z) = (x-y,0,y+z)$

จงแสดงว่า T เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น

วิธีทำ ให้ $X = (x_1,y_1,z_1)$, $Y = (x_2,y_2,z_2)$ เป็นเวกเตอร์ในR^3

พิจารณา $T(X+Y) = T(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$

$= ((x_1+x_2)-(y_1+y_2),0,(y_1+y_2)+(z_1+z_2))$

$= (x_1-y_1,0,y_1+z_1)+(x_2-y_2,0,y_2+z_2)$

ฉะนั้น $T(X+Y) = T(X) + T(Y)$

และ $T(aX) = T(ax_1, ay_1, az_1) = (ax_1 - ay_1, 0, ay_1 + az_1)$

$$= a(x_1 - y_1, 0, y_1 + z_1) = aT(X)$$

ดังนั้น T เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น

<u>ตัวอย่าง 2.2.2</u> ให้ $T: R^3 \dashrightarrow R^2$ และกำหนดให้ $T(x,y,z) = (x^2, 0)$

แล้ว T ไม่เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น เพราะว่า

$$T(3(2,1,1)) = T(6,3,3) = (36,0)$$

แต่ $3T(2,1,1) = 3(4,0) = (12,0) \neq (36,0)$

ดังนั้น T ไม่เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น

ต่อไปจะกล่าวถึงคุณสมบัติของการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น

<u>ทฤษฎี 2.2.1</u> ถ้า $T: V \dashrightarrow W$ เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นแล้ว $T(0) = 0$

<u>ทฤษฎี 2.2.2</u> ถ้า $T: V \dashrightarrow W$ เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น และถ้า $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นเวกเตอร์ใน V และ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นสกาลาร์ใด ๆ แล้ว

$$T(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n) = a_1T(X_1) + a_2T(X_2) + \ldots + a_nT(X_n)$$

<u>พิสูจน์</u> ใช้ Mathematical induction เมื่อn=1 จะได้ $T(a_1X_1) = a_1T(X_1)$

ให้ n=k เป็นจริง

จะได้ $T(a_1X_1 + \ldots + a_kX_k) = a_1T(X_1) + \ldots + a_kT(X_k)$

พิจารณาเมื่อ $n = k+1$

$$T(a_1X_1 + \ldots + a_{k+1}X_{k+1}) = T(a_1X_1 + \ldots + a_kX_k) + T(a_{k+1}X_{k+1})$$

$$= a_1T(X_1) + \ldots + a_kT(X_k) + a_{k+1}T(X_{k+1})$$

นั่นคือ $T(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n) = a_1T(X_1) + a_2T(X_2) + \ldots + a_nT(X_n)$

<u>ทฤษฎี 2.2.3</u> ถ้า V เป็นเวกเตอร์สเปซบนฟิลด์ F มี $S_1 = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นฐานของ V และถ้า $S_2 = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\}$ เป็นเวกเตอร์ในเวกเตอร์สเปซ W แล้วจะมีการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น $T: V \to W$ เพียงวิธีหนึ่งและวิธีเดียวเท่านั้น ที่ทำให้

$T(X_i) = Z_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $X \in V$ เนื่องจาก $S_1 = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นฐานของ V ดังนั้นจะมี $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$ ที่ทำให้

$$X = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$$

กำหนด $T: V \to W$ โดย

$$T(X) = a_1Z_1 + a_2Z_2 + \ldots + a_nZ_n$$

เนื่องจาก $X_i = 0X_1 + \ldots + 1X_i + \ldots + 0X_n,\ i = 1, 2, \ldots, n$

เพราะฉะนั้น $T(X_i) = 0Z_1 + \ldots + 1Z_i + \ldots + 0Z_n = Z_i$

ให้ $X = a_1X_1 + \ldots + a_nX_n$

และ $Y = b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots + b_nX_n$

จะได้ $X+Y = (a_1+b_1)X_1 + (a_2+b_2)X_2 + \ldots + (a_n+b_n)X_n$

และ $kX = ka_1X_1 + ka_2X_2 + \ldots + ka_nX_n,\ k \in F$

เพราะว่า $T(X_i) = Z_i$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} T(X+Y) &= (a_1+b_1)Z_1 + (a_2+b_2)Z_2 + \ldots + (a_n+b_n)Z_n \\ &= (a_1Z_1 + a_2Z_2 + \ldots + a_nZ_n) + (b_1Z_1 + b_2Z_2 + \ldots + b_nZ_n) \\ &= T(X) + T(Y) \end{aligned}$$

และ $T(kX) = k(a_1Z_1 + a_2Z_2 + \ldots + a_nZ_n) = kT(X)$

ดังนั้น T เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น

ต่อไป สมมุติให้ $S: V \longrightarrow W$ เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นอีกวิธีหนึ่ง

ที่ทำให้ $S(X_i) = Z_i,\ i = 1,2,\ldots, n$

และ $X = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$

ดังนั้น $S(X) = a_1Z_1 + a_2Z_2 + \ldots + a_nZ_n = T(X)$

ฉะนั้น $S = T$

ดังนั้น จะมีการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น $T : V \longrightarrow W$ เพียงวิธีหนึ่ง และ

วิธีเดียวเท่านั้น ที่ทำให้ $T(X_i) = Z_i,\ i = 1,2,\ldots,n$

<u>ตัวอย่าง 2.2.3</u> กำหนดให้ $S = \{X_1 = (1,0,0),\ X_2 = (1,1,0), X_3 = (1,1,1)\}$

เป็นฐานของ R^3 และถ้า $T: R^3 \longrightarrow R^2$ เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นที่ทำให้ $T(X_1) = (-1,0),\ T(X_2) = (2,1),\ T(X_3) = (3,3)$

ให้หา $T(x,y,z)$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $X = (x,y,z)$ เนื่องจาก S เป็นฐานของ R^3 ดังนั้น

$$X = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3$$

แทนค่า $X,\ X_1, X_2, X_3$ จะได้ว่า

$$(x,y,z) = a_1(1,0,0) + a_2(1,1,0) + a_3(1,1,1)$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3,\ a_2, a_3)$$

เพราะฉะนั้น

$$a_1 + a_2 + a_3 = x$$

$$a_2 + a_3 = y$$

$$a_3 = z$$

จะได้ว่า $a_1 = x - y$, $a_2 = y - z$, $a_3 = z$

ดังนั้น $X = (x - y)X_1 + (y - z) + X_2 + zX_3$

จากทฤษฎี 2.2.2 จะได้ว่า

$$T(x,y,z) = (x-y)(-1,0) + (y-z)(2,1) + z(3,3)$$

$$\therefore T(x,y,z) = (-x + 3y + z, y + 2z)$$

<u>นิยาม 2.2.2</u> ให้ $T: V \dashrightarrow W$ เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น อิมเมจ (image) ของ T เขียนแทนด้วย Im T ถูกกำหนดดังนี้

$$\text{Im } T = \{Y \in W / \text{มี } X \in V \text{ ที่ทำให้ } T(X) = Y\}$$

เคอร์เนล (kernel) ของ T ซึ่งเขียนแทนด้วย Ker T ถูกกำหนดดังนี้

$$\text{Ker } T = \{X \in V / T(X) = 0\}$$

<u>ตัวอย่าง 2.2.4</u> ให้ $T: R^3 \dashrightarrow R^3$ เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น ถูกกำหนดโดย $T(x,y,z) = (x,y,0)$ จะได้ว่า

$$\text{Im } T = \{(x,y,0) / x,y \in R\}$$

$$\text{Ker } T = \{(0,0,z) / z \in R\}$$

<u>ทฤษฎี 2.2.4</u> ให้ $T: V \longrightarrow W$ เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น แล้วอิมเมจของ T คือสับสเปซของ W และเคอร์เนลของ T คือสับสเปซของ V

<u>พิสูจน์</u> 1. จะพิสูจน์ว่า $\operatorname{Im} T$ เป็นสับสเปซ

เพราะว่า V เป็นเวกเตอร์สเปซ $0 \in V$ และ $T : V \longrightarrow W$ เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น ดังนั้น $T(0) = 0$ จะได้ว่า $0 \in \operatorname{Im} T$

ดังนั้น $\operatorname{Im} T$ ไม่เป็นเซตว่าง

ให้ $Y_1, Y_2 \in \operatorname{Im} T$ จะแสดงว่า $Y_1 + Y_2 \in \operatorname{Im} T$

เพราะว่า $Y_1, Y_2 \in \operatorname{Im} T$ ดังนั้นจะมีเวกเตอร์ X_1, X_2 ใน V

ที่ทำให้ $T(X_1) = Y_1$, $T(X_2) = Y_2$

พิจารณา $Y_1 + Y_2 = T(X_1) + T(X_2) = T(X_1 + X_2)$

เพราะว่า $X_1 + X_2 \in V$ ดังนั้นจะได้ว่า $Y_1 + Y_2 \in \operatorname{Im} T$

ให้ a เป็นสกาลาร์ และ $Y_1 \in \operatorname{Im} T$ ดังนั้นจะมี $X_1 \in V$

ที่ทำให้ $T(X_1) = Y_1$

พิจารณา $aY_1 = aT(X_1) = T(aX_1)$ ดังนั้น $aY_1 \in \operatorname{Im} T$

นั่นคือ $\operatorname{Im} T$ เป็นสับสเปซของ W

2. จะพิสูจน์ว่า $\operatorname{Ker} T$ เป็นสับสเปซของ V

เพราะว่า T เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น ดังนั้น $T(0) = 0$

จะได้ว่า $0 \in \operatorname{Ker} T$ ดังนั้น $\operatorname{Ker} T$ ไม่เป็นเซตว่าง

ให้ $X, Z \in \operatorname{Ker} T$ จะแสดงว่า $X + Z \in \operatorname{Ker} T$

เพราะว่า $X, Z \in \operatorname{Ker} T$ และ T เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น

ทำให้ $T(X) = 0$, $T(Z) = 0$

พิจารณา $T(X+Z) = T(X)+T(Z) = 0+0 = 0$

ดังนั้น $X+Z = \text{Ker } T$

ให้ a เป็นสกาลาร์ และ $X \varepsilon \text{ Ker } T$ จะแสดงว่า $aX \varepsilon \text{ Ker } T$

เพราะว่า T เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น

พิจารณา $T(aX) = aT(X) = a.0 = 0$

ดังนั้น $aX \varepsilon \text{ Ker } T$

จะได้ว่า Ker T เป็นสับสเปซของ V

<u>ทฤษฎี 2.2.5</u> ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซในมิติจำกัด และ $T:V \dashrightarrow W$ เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น

$$\dim V = \dim(\text{Ker } T) + \dim(\text{Im } T)$$

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า V เป็นเวกเตอร์สเปซในมิติจำกัด จากทฤษฎี 2.2.4 จะได้ว่า Ker T เป็นสับสเปซของ V ให้ $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ เป็นฐานของ Ker T

1. ถ้า $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ เป็นฐานของ V จะได้ว่า $V = \text{Ker } T$ และ จะได้ว่า $T(X) = 0$ สำหรับทุก ๆ $X \varepsilon V$ ซึ่งจะได้ว่า $\text{Im } T = \{0\}$ ดังนั้น Ker T และ V มีมิติเท่ากัน และ Im T มีมิติเป็นศูนย์ นั่นคือ

$$\dim V = \dim(\text{Ker } T) + \dim(\text{Im } T)$$

2. ถ้า $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ ไม่เป็นฐานของ V

เนื่องจาก $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ เป็นเชิงเส้นอิสระ

ดังนั้น จะได้ว่า $\{X_1, X_2, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_l\}$ เป็นฐานของ V

จากทฤษฎี 2.1.17 ดังนั้น $\dim V = k + l$

ให้ W^* เป็นอิมเมจของ T และให้

$$W^* = \{T(Y_1), T(Y_2), \ldots, T(Y_l)\}$$

จะแสดงว่า W^* เป็นฐานของ Im T

ขั้นแรก จะแสดงว่า W^* สแปน Im T

ให้ $Y \varepsilon$ Im T ดังนั้นจะมีเวกเตอร์ X ใน V ที่ทำให้ $T(X) = Y$

เนื่องจาก $\{X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_l\}$ เป็นฐานของ V ดังนั้นจะมี

สกาลาร์ $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l$ ที่ทำให้

$$X = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_kX_k + b_1Y_1 + \ldots + b_lY_l$$

เพราะฉะนั้น

$$T(X) = a_1T(X_1) + a_2T(X_2) + \ldots + a_kT(X_k) + b_1T(Y_1) + \ldots + b_lT(Y_l)$$

เพราะว่า $X_1, X_2, \ldots, X_k \;\varepsilon$ Ker T

ดังนั้น $T(X_i) = 0$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, k$ จะได้ว่า

$$Y = T(X) = b_1T(Y_1) + b_2T(Y_2) + \ldots + b_lT(Y_l)$$

ดังนั้นทุก ๆ เวกเตอร์ใน Im T สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของ

$T(Y_1), T(Y_2), \ldots, T(Y_n)$ ได้

จะได้ว่า W^* สแปน Im T

ต่อไปจะแสดงว่า W^* เป็นเชิงเส้นอิสระ

เนื่องจาก $W^* = \{T(Y_1), T(Y_2), \ldots, T(Y_l)\}$

ให้ $a_1, a_2, \ldots, a_l$ เป็นสกาลาร์ใด ๆ ที่ทำให้

$$a_1T(Y_1)+a_2T(Y_2)+\ldots+a_lT(Y_l) = 0$$

เพราะว่า T เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น จะได้ว่า

$$T(a_1Y_1+a_2Y_2+\ldots+a_lY_l) = 0$$

ดังนั้น $a_1Y_1+a_2Y_2+\ldots+a_lY_l \in \text{Ker } T$

แต่ $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ เป็นฐานของ Ker T

ดังนั้น $a_1Y_1+a_2Y_2+\ldots+a_lY_l = b_1X_1+b_2X_2+\ldots+b_kX_k$

ฉะนั้น $-b_1X_1-b_2X_2-\ldots-b_kX_k+a_1Y_1+a_2Y_2+\ldots+a_lY_l = 0$

เนื่องจาก $\{X_1, X_2, \ldots, X_k, Y_1, Y_2, \ldots, Y_l\}$ เป็นฐานของ V

จะได้ว่า $\{X_1, X_2, \ldots, X_k, Y_1, Y_2, \ldots, Y_l\}$ เป็นเชิงเส้นอิสระ

จะทำให้ $-b_1 = -b_2 = \ldots = -b_k = a_1 = a_2 = \ldots = a_l = 0$

ดังนั้น $W^* = \{T(Y_1), T(Y_2), \ldots, T(Y_l)\}$ เป็นเชิงเส้นอิสระ

จะสรุปได้ว่า W^* เป็นฐานของ Im T

จะได้ว่า $\dim(\text{Im } T) = l$

นั่นคือ $\dim V = \dim(\text{Ker } T) + \dim(\text{Im } T)$

<u>ทฤษฎี 2.2.6</u> ให้ $T:V \rightarrow W$ เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น และ $Ker\ T=\{0\}$ ดังนั้นแต่ละเวกเตอร์ Y ใน $Im\ T$ จะมีเวกเตอร์ X ใน V เพียงเวกเตอร์เดียวเท่านั้นที่ทำให้ $T(X) = Y$

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า Y เป็นเวกเตอร์ใน $Im\ T$ ดังนั้นจะมีเวกเตอร์ X ใน V อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ทำให้ $T(X) = Y$ ให้ Z เป็นเวกเตอร์อีกเวกเตอร์หนึ่งใน V ที่ทำให้ $T(Z) = Y$

พิจารณา $T(X-Z) = T(X) - T(Z) = Y-Y = 0$

ดังนั้น $X-Z \in Ker\ T=\{0\}$ จะได้ว่า $X-Z = 0$ หรือ $X = Z$

<u>นิยาม 2.2.3</u> ถ้า $T:V \rightarrow W$ และ $S:V \rightarrow W$ เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น และ r เป็นสกาลาร์ การเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น $T + S$ และ rT จาก V ไปยัง W ถูกกำหนดโดย

1. $(T + S)(X) = T(X) + S(X)$
2. $(rT)(X) = rT(X)$

<u>ทฤษฎี 2.2.7</u> ถ้า $T:V \rightarrow W$ และ $S: V \rightarrow W$ เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นแล้ว $T + S$ และ rT เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น

<u>พิสูจน์</u> ให้ $X,Y \in V$

เพราะว่า $(T + S)(X + Y) = T(X + Y) + S(X + Y)$

เนื่องจาก T และ S เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
(T+S)(X+Y) &= T(X) + T(Y) + S(X) + S(Y) \\
&= T(X) + S(X) + T(Y) + S(Y) \\
&= (T+S)(X) + (T+S)(Y)
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
(T+S)(rX) &= T(rX) + S(rX) \\
&= rT(X) + rS(X) \\
&= r(T(X) + S(X)) \\
&= r((T+S)(X))
\end{aligned}
$$

ดังนั้นจะได้ $T + S$ เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า rT เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น

<u>ทฤษฎี 2.2.8</u> ถ้า $T: V \to U$ และ $S: U \to W$ เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น แล้ว $S \circ T : V \to W$ ถูกกำหนดโดย $(S \circ T)(X) = S(T(X))$ จะเป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น

<u>พิสูจน์</u> ให้ $X, Y \in V$ จะได้ว่า

$(S \circ T)(X+Y) = S(T(X+Y))$

$= S(T(X) + T(Y))$ เพราะว่า T เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น

$= S(T(X)) + S(T(Y))$ เพราะว่า S เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น

$= (S \circ T)(X) + (S \circ T)(Y)$

และ $(S \circ T)(rX) = S(T(rX))$

$= S(rT(X))$ เพราะว่า T เป็นการเปลี่ยนแปลง-เชิงเส้น

$= r(S(T(X)))$ เพราะว่า S เป็นการเปลี่ยนแปลง-เชิงเส้น

$= r((S \circ T)(X))$

นิยาม 2.2.4 ถ้า $T : V \dashrightarrow V$ เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นจากเวกเตอร์สเปซ V ไปยังเวกเตอร์สเปซ V แล้ว การเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นนี้ จะเรียกว่า ลิเนียร์โอเปอเรเตอร์ (linear operator) หรือ เอนโดมอร์ฟิซึม (endomorphism)

ตัวอย่าง 2.2.5 ถ้า $T : V \dashrightarrow V$ กำหนดโดย $T(X) = X$ จะเป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นชนิดเอนโดมอร์ฟิซึม และการเปลี่ยนแปลงชนิดนี้เรียกว่าการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นเอกลักษณ์ (identity transformation) และอาจใช้สัญลักษณ์ $I : V \dashrightarrow V$ โดย $I(X) = X$ แทนการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นเอกลักษณ์

2.3 เมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น

พิจารณาการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น $T : V \dashrightarrow W$

โดย $S_1 = \{X_1, \ldots, X_n\}$, $S_2 = \{Y_1, \ldots, Y_m\}$ เป็นฐานของ V และ W ตามลำดับ เวกเตอร์ $T(X_1), T(X_2), \ldots, T(X_n)$ ใน W สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$T(X_1) = a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + \cdots + a_{m1}Y_n$$

$$T(X_2) = a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 + \cdots + a_{m2}Y_m$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots(2.4)$$

$$T(X_n) = a_{1n}Y_1 + a_{2n}Y_2 + \cdots + a_{mn}Y_m$$

เรานำสัมประสิทธิ์ a_{ij}, $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$ ที่กำหนด T มาเขียนในรูป

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \ldots\ldots(2.5)$$

<u>นิยาม 2.3.1</u> เมตริกซ์คือการเรียงจำนวนในรูปแบบ (2.5) มี m แถว (row) และ n หลัก (column) แถวที่ i ของเมตริกซ์เขียนอยู่ในรูป

$$(a_{i1} \quad a_{i2} \cdots a_{in}) \quad \text{เมื่อ } i = 1,2,\ldots,m$$

หลักที่ j ของเมตริกซ์เขียนอยู่ในรูป

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \qquad \text{เมื่อ } j = 1,2,\ldots,n$$

สมาชิกที่อยู่แถวที่ i และหลักที่ j เขียนแทนด้วย a_{ij} และเรียก a_{ij} ว่าเอนทรี (entry) ของเมตริกซ์ และใช้อักษร A,B,C,... แทนเมตริกซ์ ดังนั้นถ้าเมตริกซ์ A มี m แถว n หลัก หรือ A เป็น

$m \times n$ เมตริกซ์ หรือมีขนาด (order) $m \times n$ จะเขียนสัญลักษณ์แทน เมตริกซ์ A ดังนี้ $A = (a_{ij})$ และ $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mn}$ เรียกว่าไดอาโกนอลเอนทรี (diagonal entries) ของเมตริกซ์ A

<u>นิยาม 2.3.2</u> ถ้า A และ B เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ เมตริกซ์ A เท่ากับเมตริกซ์ B ก็ต่อเมื่อสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันเท่ากัน นั่นคือ $a_{ij} = b_{ij}$

<u>นิยาม 2.3.3</u> ให้ $T: V \dashrightarrow W$ เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น และ

$S_1 = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, $S_2 = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}$

เป็นฐานของ V และ W ตามลำดับ และเขียน $T(X_1), T(X_2), \ldots, T(X_n)$ ในรูปของฐาน $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ ของ W ดังสมการ(2.4) แล้ว เมตริกซ์(2.5) ที่ได้เรียกว่าเมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นที่สัมพันธ์ต่อฐาน S_1 และ S_2

<u>ข้อสังเกต</u> จากนิยาม 2.3.3 เพราะว่า $S_1 = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นฐานของ V ดังนั้น $\dim V = n$ และ $S_2 = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}$ เป็นฐานของ W ดังนั้น $\dim W = m$ จะได้เมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นที่สัมพันธ์ต่อฐาน S_1 และ S_2 มีขนาด $m \times n$

<u>ตัวอย่าง 2.3.1</u> ให้ $T : R^3 \rightarrow R^4$ เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น และ

$S_1 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ เป็นฐานมาตรฐานของ R^3

$S_2 = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

เป็นฐานมาตรฐานของ R^4 กำหนดให้ $T(1,0,0) = (0,1,0,2)$

$T(0,1,0) = (0,1,1,0)$, $T(0,0,1) = (0,1,-1,4)$

ให้หาเมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นที่สัมพันธ์ต่อฐาน S_1 และ S_2

<u>วิธีทำ</u>

$$T(1,0,0) = (0,1,0,2)$$
$$= 0(1,0,0,0) + 1(0,1,0,0) + 0(0,0,1,0) + 2(0,0,0,1)$$
$$T(0,1,0) = (0,1,1,0)$$
$$= 0(1,0,0,0) + 1(0,1,0,0) + 1(0,0,1,0) + 0(0,0,0,1)$$
$$T(0,0,1) = (0,1,-1,4)$$
$$= 0(1,0,0,0) + 1(0,1,0,0) - 1(0,0,-1,0) + 4(0,0,0,1)$$

ดังนั้นเมตริกซ์ของ T ที่สัมพันธ์ต่อฐาน S_1 และ S_2 คือ

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ เป็น 4×3 เมตริกซ์

<u>ตัวอย่าง 2.4.2</u> ให้ $T: R^2 \rightarrow R^2$ และ $S = \{E_1 = (1,0), E_2 = (0,1)\}$

เป็นฐานมาตรฐานของ R^2 และ $T(x,y) = (2y, 3x-y)$

ให้หาเมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น

<u>วิธีทำ</u> เพราะว่า $T(E_1) = T(1,0) = (0,3) = 0E_1 + 3E_2$

$T(E_2) = T(0,1) = (2,-4) = 2E_1 - E_2$

ดังนั้นเมตริกซ์ของ T ที่สัมพันธ์ต่อฐานมาตรฐาน $\{E_1, E_2\}$ คือ

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{เป็น } 2 \times 2 \text{ เมตริกซ์}$$

<u>ตัวอย่าง 2.4.3</u> ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซของโพลีโนเมียลดีกรี ≤ 3 ให้ $D: V \longrightarrow V$ เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น ที่กำหนดโดย $D(p(t)) = \frac{d}{dt}(p(t))$

ให้หาเมตริกซ์ของ T ที่สัมพันธ์กับฐานมาตรฐานของโพลีโนเมียล

<u>วิธีทำ</u> เพราะว่า $\{1, t, t^2, t^3\}$ เป็นฐานมาตรฐานของโพลีโนเมียล เราสามารถหาได้ว่า

$$D(1) = 0 = 0 + 0t + 0t^2 + 0t^3$$

$$D(t) = 1 = 1 + 0t + 0t^2 + 0t^3$$

$$D(t^2) = 2t = 0 + 2t + 0t^2 + 0t^3$$

$$D(t^3) = 3t^2 = 0 + 0t + 3t^2 + 0t^3$$

ดังนั้นเมตริกซ์ของ T คือ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{เป็น } 4 \times 4 \text{ เมตริกซ์}$$

<u>ตัวอย่าง 2.3.4</u> ให้ $T : R^2 \rightarrow R^2$ เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น กำหนด

เมตริกซ์ของ T ที่สัมพันธ์ต่อฐานมาตรฐาน $\{E_1, E_2\}$ ใน R^2 คือ

$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ให้หา $T(x,y)$

<u>วิธีทำ</u> เมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นที่สัมพันธ์ต่อฐานมาตรฐาน $\{E_1, E_2\}$

คือ $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

ดังนั้น จะได้ว่า $T(E_1) = 0E_1 + 3E_2 = (0,3)$

$T(E_2) = 2E_1 - E_2 = (2,-1)$

ให้ $(x,y) \in R^2$ ดังนั้น (x,y) สามารถเขียนในรูป

$$(x,y) = xE_1 + yE_2$$

ฉะนั้น
$$\begin{aligned} T(x,y) &= xT(E_1) + yT(E_2) \\ &= x(0,3) + y(2,-1) \\ &= (0,3x) + (2y,-y) \end{aligned}$$

ดังนั้น $T(x,y) = (2y,\ 3x-y)$

ต่อไปจะพิจารณาการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น ซึ่งสามารถนำไปสู่นิยามการบวกและการคูณเมตริกซ์

<u>ตัวอย่าง 2.3.5</u> ให้ T_1 และ T_2 เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นจาก R^2 ไปยัง R^2

กำหนดโดย

$$T_1(x_1,x_2) = (2x_1 + x_2,\ x_2 - x_1)$$

$$T_2(x_1,x_2) = (x_1 - x_2,\ 3x_1 + 2x_2)$$

ให้ $\{E_1 = (1,0), E_2 = (0,1)\}$ เป็นฐานมาตรฐานของ R^2 จะได้ว่า

$$T_1(E_1) = T_1(1,0) = (2,-1) = 2E_1 - E_2$$

$$T_1(E_2) = T_1(0,1) = (1,1) = E_1 + E_2$$

$$T_2(E_1) = T_2(1,0) = (1,3) = E_1 + 3E_2$$

$$T_2(E_2) = T_2(0,1) = (-1,2) = -E_1 + 2E_2$$

ให้ A แทนเมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น T_1 ซึ่งสัมพันธ์กับฐานมาตรฐาน $\{E_1, E_2\}$

ดังนั้น $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

ให้ B แทนเมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น T_2 ซึ่งสัมพันธ์กับฐานมาตรฐาน $\{E_1, E_2\}$

ดังนั้น $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

ต่อไปจะพิจารณาเมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นของ $T_1 + T_2$ จะได้ว่า

$$(T_1+T_2)(E_1) = (2E_1-E_2) + (E_1+3E_2)$$

$$= (2+1)E_1 + (-1+3)E_2$$

$$(T_1+T_2)(E_2) = (E_1+E_2) + (-E_1+2E_2)$$

$$= (1-1)E_1 + (1+2)E_2$$

ให้ c แทนเมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น $T_1 + T_2$ ซึ่งสัมพันธ์กับฐานมาตรฐาน $\{E_1, E_2\}$

ดังนั้น $C = \begin{pmatrix} 2+1 & 1-1 \\ -1+3 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

จากตัวอย่าง 2.3.5 จะได้ว่าเมตริกซ์ $A + B = C$ แสดงว่าการหาผลบวกของเมตริกซ์ก็คือ การนำสมาชิกตำแหน่งเดียวกันมารวมกัน และเมตริกซ์ทั้งสองต้องมีขนาดเท่ากัน สามารถทำให้อยู่ในรูปทั่วไปดังนี้

ให้ T_1 และ T_2 เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นจากเวกเตอร์สเปซ V ไปยังเวกเตอร์สเปซ W ให้ $\{X_1, \ldots, X_n\}$, $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ เป็นฐานของ V และ W ตามลำดับ ให้ $A = (a_{ij})_{m \times n}$ และ $B = (b_{ij})_{m \times n}$ แทนเมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น T_1 และ T_2 ตามลำดับ จะได้ว่า

$$T_1(X_j) = a_{1j}Y_1 + a_{2j}Y_2 + \cdots + a_{mj}Y_m$$

$$T_2(X_j) = b_{1j}Y_1 + b_{2j}Y_2 + \cdots + b_{mj}Y_m \; , \; j = 1,2,\ldots,n$$

$$\begin{aligned}(T_1+T_2)(X_j) &= T_1(X_j) + T_2(X_j) \\ &= (a_{1j}+b_{1j})Y_1 + (a_{2j}+b_{2j})Y_2 + \cdots + (a_{mj}+b_{mj})Y_m\end{aligned}$$

ดังนั้นหลักที่ j ของเมตริกซ์ $T_1 + T_2$ คือการรวมสมาชิกหลักที่ j ของเมตริกซ์ A และ B ถ้าให้ $C = (c_{ij})_{m \times n}$ เป็นเมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น $T_1 + T_2$

ดังนั้นจะได้ว่า $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

ถ้า k เป็นสกาลาร์ ดังนั้น

$(kT_1)(X_j) = k(T_1(X_j))$

$= k(a_{1j}Y_1+a_{2j}Y_2+\ldots+ a_{mj}Y_m)$

$(kT_1)(X_j) = ka_{1j}Y_1 + ka_{2j}Y_2 +\ldots+ ka_{mj}Y_m$

นั่นคือเมตริกซ์ kT_1 หาได้โดยการนำเอาสกาลาร์ k คูณทุก ๆ สมาชิกใน A

ดังนั้นจะนิยามการบวกและการคูณเมตริกซ์ด้วยสกาลาร์ดังนี้

นิยาม 2.3.4 ถ้า $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ ผลบวกของเมตริกซ์ A และ B ซึ่งเขียนแทนด้วย $A + B$ คือเมตริกซ์ $C = (c_{ij})$ ซึ่งเป็น $m \times n$ เมตริกซ์ และถูกกำหนดโดย

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$

และเมื่อ k เป็นสกาลาร์ใด ๆ kA คือ $m \times n$ เมตริกซ์ โดย $kA = (ka_{ij})$

ตัวอย่าง 2.3.6 กำหนดเมตริกซ์ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

ดังนั้น $A + B = \begin{pmatrix} 2+8 & 3+2 \\ 4+3 & 5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

$$2A = 2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

<u>ทฤษฎี 2.3.1</u> ถ้า A, B, C เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ แล้ว

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. ถ้า A เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ จะมีเมตริกซ์ 0 (อ่านว่า เมตริกซ์ศูนย์) ที่มีขนาด $m \times n$ เพียงเมตริกซ์เดียวเท่านั้น ที่ทำให้ $A + 0 = A$
4. ถ้า A เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ จะมี $-A$ (อินเวอร์สของ-เมตริกซ์ A) ที่ทำให้ $A + (-A) = 0$

   และกำหนดให้ $-A = (-1)A$, $A-B = A + (-B)$, $A-A = 0$

พิจารณาการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น $T_1 : V \dashrightarrow W_1$ และ $T_1 : W_1 \dashrightarrow W_2$ ให้ $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_p\}$, $\{Z_1, \ldots, Z_m\}$ เป็นฐานของ V, W_1, W_2 ตามลำดับ ดังนั้นเวกเตอร์สเปซ V, W_1, W_2 จะมีมิติเท่ากับ n, p, m ตามลำดับ ให้ $A = (a_{ij})_{m \times p}$, $B = (b_{ij})_{p \times n}$

แทนเมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น T_2 และ T_1 ตามลำดับ

พิจารณา
$$\begin{aligned}
(T_2T_1)(X_j) &= T_2(b_{1j}Y_1+b_{2j}Y_2+\ldots+b_{pj}Y_p) \\
&= b_{1j}T_2(Y_1)+b_{2j}T_2(Y_2)+\ldots+b_{pj}T_2(Y_p) \\
&= b_{1j}(a_{11}Z_1+a_{21}Z_2+\ldots+a_{m1}Z_m) \\
&\quad +b_{2j}(a_{12}Z_1+a_{22}Z_2+\ldots+a_{m2}Z_m)+\ldots+ \\
&\quad b_{pj}(a_{1p}Z_1+a_{2p}Z_2+\ldots+a_{mp}Z_m) \\
&= (b_{1j}a_{11}+b_{2j}a_{12}+\ldots+b_{pj}a_{1p})Z_1 + \\
&\quad (b_{1j}a_{21}+b_{2j}a_{22}+\ldots+b_{pj}a_{2p})Z_2 \\
&\quad +\ldots+(b_{1j}a_{m1}+b_{2j}a_{m2}+\ldots+b_{pj}a_{mp})Z_m
\end{aligned}$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ z_i เขียนอยู่ในรูป

$$b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \cdots + b_{pj}a_{ip}$$

หรือ $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$

ซึ่งเป็นสมาชิกตำแหน่งแถวที่ i และหลักที่ j ของเมตริกซ์ T_2T_1

ให้ $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$

$$= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

ดังนั้น T_2T_1 เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ จะสรุปได้ว่าผลคูณของเมตริกซ์ 2 เมตริกซ์เกิดขึ้นจากการนำ $m \times p$ เมตริกซ์ คูณกับ $p \times n$ เมตริกซ์ จะได้ $m \times n$ เมตริกซ์ สรุปนิยามการคูณได้ดังนี้

<u>นิยาม 2.3.5</u> ให้ $A = (a_{ij})$ เป็น $m \times p$ เมตริกซ์ และ $B = (b_{ij})$ เป็น $p \times n$ เมตริกซ์ ผลคูณของเมตริกซ์ A และ B ซึ่งเขียนแทนด้วย AB คือ $m \times n$ เมตริกซ์ $C = (c_{ij})$ กำหนดได้ดังนี้

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

และ $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$

<u>ตัวอย่าง 2.3.7</u> ให้ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$$

และ $AB \neq BA$

และให้ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

จะได้ว่า $AB = BA$

<u>ทฤษฎี 2.3.2</u> 1. ถ้า A, B, C เป็น $m \times p$, $p \times q$ และ เมตริกซ์ แล้ว

$$A(BC) = (AB)C$$

2. ถ้า A เป็น $m \times p$ เมตริกซ์ และ B กับ C เป็น $p \times n$ เมตริกซ์ แล้ว

$$A(B + C) = AB + AC$$

3. ถ้า A และ B เป็น $m \times p$ เมตริกซ์ และ C เป็น $p \times n$ เมตริกซ์ แล้ว

$$(A + B)C = AC + BC$$

4. การคูณไม่มีคุณสมบัติการสลับที่ นั่นคือ $AB \neq BA$

(Anti commutative)

<u>นิยาม 2.3.6</u> ถ้า $A = (a_{ij})$ เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ แล้ว $n \times m$ เมตริกซ์ $A^T = (a_{ij}^T)$ โดย $a_{ij}^T = a_{ji}$ เมื่อ $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$ จะเรียกว่าทรานสโพส ของเมตริกซ์ A (transpose of A)

นั่นคือ ทรานสโพสของเมตริกซ์ A ได้จากการเปลี่ยนสมาชิกแถวไปเป็นหลัก และจากสมาชิกหลักไปเป็นแถวในเมตริกซ์ A

<u>ตัวอย่าง 2.3.8</u> ให้ $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = (3\ -5\ 1)$

ดังนั้น $A^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>ทฤษฎี 2.3.3</u> ให้ r เป็นจำนวนจริง และ A, B เป็นเมตริกซ์ แล้ว

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(AB)^T = B^T A^T$
4. $(rA)^T = rA^T$

<u>พิสูจน์</u> พิสูจน์ 1 และ 3 เท่านั้น

1. ให้ $A = (a_{ij})$ เป็น $m \times n$ เมตริกซ์

ดังนั้น $A^T = (a_{ij}^T)$ โดย $a_{ij}^T = a_{ji}$

นั่นคือ $A^T = (a_{ji})$ และ $(A^T)^T = (a_{ji}^T) = (a_{ij})$

ดังนั้น $(A^T)^T = A$

3. ให้ $A = (a_{ij})$ เป็น $m \times p$ เมตริกซ์ และ $B = (b_{ij})$ เป็น $p \times n$ เมตริกซ์

ให้ $AB = C = (c_{ij})$ จะได้ว่า c_{ij} เป็น $m \times n$ เมตริกซ์

ดังนั้น $(AB)^T = C^T = (c^T_{ij})$ เป็น $n \times m$ เมตริกซ์

ให้ $B^TA^T = D = (d_{ij})$ เป็น $n \times m$ เมตริกซ์ โดย

$$dij = \sum_{k=1}^{p} b^T_{ik} \; a^T_{kj}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad c^T_{ij} &= c_{ji} \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{jk}b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{p} a^T_{kj} \; b^T_{ik} \\ &= \sum_{k=1}^{p} b^T_{ik} \; a^T_{kj} \\ &= d_{ij} \end{aligned}$$

นั่นคือ $(AB)^T = B^TA^T$

<u>ชนิดต่าง ๆ ของเมตริกซ์</u>

<u>นิยาม 2.3.7</u> เมตริกซ์จัตุรัส (square matrix) คือเมตริกซ์ที่มี n แถว r หลัก และมีขนาด $n \times n$ หรือมีขนาด n

เช่น

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{เป็นเมตริกซ์จัตุรัส}$$

<u>นิยาม 2.3.8</u> ไดอาโกนอลเมตริกซ์ (diagonal matrix) คือเมตริกซ์จัตุรัส ซึ่งสมาชิกที่ไม่ใช่ไดอาโกนอลเอนทรี (diagonal entries) เป็น 0 หมด

เช่น

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & a_n \end{pmatrix}$$

ถ้าไดอาโกนอลเอนทรีเป็น 1 หมด เมตริกซ์นี้เรียกว่าเมตริกซ์เอกลักษณ์ เขียนแทนด้วย I_n หรือ I

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

และถ้า A เป็น n x n เมตริกซ์ จะได้ว่า $AI_n = I_nA = A$

<u>นิยาม 2.3.9</u> เมตริกซ์สามเหลี่ยม (triangular matrix) คือเมตริกซ์จัตุรัส ซึ่งสมาชิกใต้ไดอาโกนอลเอนทรีเป็น 0 หมด

เช่น

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

<u>นิยาม 2.3.10</u> ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส เมตริกซ์ A จะเรียกว่าเมตริกซ์สมมาตร (symmetric matrix) ถ้า $A = A^T$

<u>ตัวอย่าง 2.3.9</u> เมตริกซ์ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ และ

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ เป็นเมตริกซ์สมมาตร

<u>หมายเหตุ</u> ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส แล้วสามารถหา AA ได้ จะเขียนแทนด้วย A^2 ดังนั้น $\underbrace{AA \ldots A}_{n \text{ ครั้ง}}$ จะเขียนแทนด้วย A^n

เช่น $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

ดังนั้น $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{pmatrix}$

<u>นิยาม 2.3.11</u> จำนวนเชิงซ้อนคือจำนวนที่เขียนอยู่ในรูป $a + bi$ โดย a, b เป็นจำนวนจริง และ $i^2 = -1$

คอนจูเกตของจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ คือ $a - bi$ เขียนแทนด้วย $\bar{z}$

<u>นิยาม 2.3.12</u> ถ้า A เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนเชิงซ้อน คอนจูเกตของเมตริกซ์ A เขียนแทนด้วย $\bar{A}$ คือเมตริกซ์ที่ได้จาก A โดยการแทนแต่ละสมาชิกของ A ด้วยคอนจูเกตของมัน

เช่น $A = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 2i & 3 \end{pmatrix}$ ดังนั้น $\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ -2i & 3 \end{pmatrix}$

<u>นิยาม 2.3.13</u> ทรานสโพสเมตริกซ์ $\overline{A}$ เรียกว่าทรานสโพสคอนจูเกต (transpose conjugate) เขียนแทนด้วย A^*

นั่นคือ $A^* = (\overline{A})^T$

เช่น $A = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 2i & 3 \end{pmatrix}$ จะได้ $\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ -2i & 3 \end{pmatrix}$

ดังนั้น $A^* = (\overline{A})^T = \begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix}$

<u>นิยาม 2.3.14</u> เมตริกซ์ A จะเรียกว่าเป็นแฮร์มิเทียนเมตริกซ์ (hermitian matrix) ถ้า $A = A^*$

เช่น $A = \begin{pmatrix} 2 & 5i & 2-3i \\ -5i & 3 & 4 \\ 2+3i & 4 & 0 \end{pmatrix}$ เป็นแฮร์มิเทียนเมตริกซ์

เพราะว่า $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 5i & 2-3i \\ -5i & 3 & 4 \\ 2+3i & 4 & 0 \end{pmatrix} = A$

<u>นิยาม 2.3.15</u> ถ้า A เป็น $n \times n$ เมตริกซ์ จะเรียก A ว่าเป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ถ้ามี $n \times n$ เมตริกซ์ B ที่ทำให้ $AB = BA = I$ และเรียกเมตริกซ์ B ว่าอินเวอร์สของเมตริกซ์ A เขียนแทนด้วย A^{-1} ถ้าไม่มีเมตริกซ์ B ดังกล่าวที่ทำให้ $AB = BA = I$ แล้วจะเรียก A ว่าเป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์

<u>ทฤษฎี 2.3.4</u> ถ้า B และ C เป็นอินเวอร์สของเมตริกซ์ A โดย A เป็น $n \times n$ เมตริกซ์ แล้ว $B = C$

<u>พิสูจน์</u> ให้ B และ C เป็นอินเวอร์สของ A

ดังนั้น $BA = AC = I$

เนื่องจาก $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$

ดังนั้น $B = C$

<u>ตัวอย่าง 2.3.10</u> ให้ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ให้หา A^{-1}

<u>วิธีทำ</u> เพราะว่า $AA^{-1} = I$ ให้ $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

จะได้ว่า $a + 2c = 1$ $\quad b + 2d = 0$

$3a + 4c = 0$ $\quad 3b + 4d = 0$

และได้ว่า $a = -2$, $c = \frac{3}{2}$, $b = 1$ และ $d = \frac{1}{2}$

ดังนั้น A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ และ

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

<u>ทฤษฎี 2.3.5</u> 1. ถ้า A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ แล้ว A^{-1} เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ และ $(A^{-1})^{-1} = A$

2. ถ้า A และ B เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ แล้ว AB เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ และ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3. ถ้า A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ แล้ว $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

<u>พิสูจน์</u> พิสูจน์เฉพาะข้อ 2

เนื่องจาก A และ B เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์

พิจารณา
$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1}\\ &= AIA^{-1}\\ &= AA^{-1}\\ &= I\end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned}(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B\\ &= B^{-1}IB\\ &= B^{-1}B\\ &= I\end{aligned}$$

ดังนั้น AB เป็นนอนซิงกูลาร์ และ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

<u>ทฤษฎี 2.3.6</u> ถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_r$ เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ แล้ว $A_1A_2 \cdots A_r$ เป็นนอนซิงกูลาร์ และ
$$(A_1A_2\cdots A_r)^{-1} = A_r^{-1}A_{r-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

<u>พิสูจน์</u> ใช้ Mathematical induction

เมื่อ $r = 1$ เป็นจริง เพราะว่าถ้า A_1 เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ขนาด n แล้ว A_1 เป็นนอนซิงกูลาร์ และ $A_1^{-1} = A_1^{-1}$

สมมติให้ $r = k$ เป็นจริง นั่นคือถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_k$ เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์แล้ว $A_1, A_2, \ldots, A_k$ เป็นนอนซิงกูลาร์ และ

$$(A_1A_2\ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1}\, A_{k-1}^{-1} \ldots A_2^{-1}\, A_1^{-1}$$

จะแสดงว่า $r = k + 1$ เป็นจริง ให้ $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$ เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ให้ $B = A_1A_2 \ldots A_k$

ดังนั้น $A_1A_2 \ldots A_kA_{k+1} = BA_{k+1}$ เป็นนอนซิงกูลาร์

เพราะว่า B เป็นนอนซิงกูลาร์ และ $B^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1} \ldots A_2^{-1}A_1^{-1}$

จากทฤษฎ 2.3.5 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(BA_{k+1})^{-1} &= A_{k+1}^{-1}\, B^{-1} \\ &= A_{k+1}^{-1}\, A_k^{-1} \ldots A_1^{-1}\end{aligned}$$

ดังนั้นถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_r$ เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ แล้ว $A_1A_2 \ldots A_r$ เป็นนอนซิงกูลาร์ และ

$$(A_1A_2\ldots A_r)^{-1} = A_r^{-1}\, A_{r-1}^{-1} \ldots A_2^{-1}\, A_1^{-1}$$

2.4 <u>การเปลี่ยนฐาน</u> (Change of basis)

จากทฤษฎี 2.1.21 เมื่อ V เป็นเวกเตอร์สเปซในมิติจำกัด แล้ว V จะมีฐานที่มีสมาชิก n เวกเตอร์ ถ้าให้ $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นฐานของ V แล้ว สำหรับ $X \in V$ แล้วเราสามารถเขียน X ได้ในรูปผลรวมเชิงเส้นของ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ได้ นั่นคือ สามารถเขียน X ได้ในรูป

$$X = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$$

และโคออร์ดิเนตเวกเตอร์ของ x ที่สัมพันธ์กับฐาน S ซึ่งเขียนแทนด้วย $[X]_S$ มีค่าเท่ากับ

$$[X]_S = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{หรือ} \quad [X]_S = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

<u>ตัวอย่าง 2.4.1</u> ให้ $E = \{E_1 = (1,0), E_2 = (0,1)\}$ เป็นเซตของฐานมาตรฐาน และ

$S = \{X_1 = (1,1), X_2 = (2,1)\}$ เป็นฐานของ R^2

ให้หา $[X]_E$ และ $[X]_S$ เมื่อ $X = (7,2)$

<u>วิธีทำ</u> $X = (7,2) = 7(1,0) + 2(0,1) = 7E_1 + 2E_2$

และ $X = (7,2) = -3(1,1) + 5(2,1) = -3X_1 + 5X_2$

ดังนั้น $[X]_E = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ และ $[X]_S = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

จากตัวอย่าง 2.4.1 เมื่อกำหนดฐาน E และ S ซึ่งเป็นฐานของเวกเตอร์สเปซหนึ่ง เราสามารถหาโคออร์ดิเนตเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับฐานทั้งสองได้ ซึ่งต่อไปเราจะศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างโคออร์ดิเนตเวกเตอร์ทั้งสอง ดังต่อไปนี้

พิจารณา เมื่อ V เป็นเวกเตอร์สเปซที่มีมิติเท่ากับ 2

ให้ $E = \{E_1, E_2\}$ และ $S = \{X_1, X_2\}$ เป็นฐานของ V

ให้ $X \in V$ ดังนั้น X สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของ $\{X_1, X_2\}$ ได้

นั่นคือ $X = k_1X_1 + k_2X_2$ ....(1)

และ $[X]_S = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$

และ $X_1, X_2 \in V$ และ E เป็นเซตของฐาน ดังนั้น X_1, X_2 ก็สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของ $\{E_1, E_2\}$ ได้

จะได้ว่า $X_1 = aE_1 + bE_2$ ....(1)

$X_2 = cE_1 + dE_2$ ....(2)

แทนค่า (2), (3) ใน (1) จะได้ว่า

$$X = k_1(aE_1 + bE_2) + k_2(cE_1 + dE_2)$$

$$= (k_1a + k_2c)E_1 + (k_1b + k_2d)E_2$$

ดังนั้นโคออร์ดิเนตเวกเตอร์ของ X ที่สอดคล้องกับฐาน E คือ

$$[X]_E = \begin{pmatrix} k_1a + k_2c \\ k_1b + k_2d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$[X]_E = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} [X]_S \quad \text{.........(4)}$$

ให้ $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ โดย P เป็นเมตริกซ์ที่มีแต่ละหลักคือโคออร์ดิเนตเวกเตอร์ของ X_1, X_2 ที่สอดคล้องกับฐาน S และ P จะเรียกว่า ทรานสิชันเมตริกซ์ จากฐาน E ไปยังฐาน S ดังนั้นสามารถเขียน(4) ได้ในรูป

$$[X]_E = P[X]_S$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า Q เป็นทรานสิชันเมตริกซ์จากฐาน S ไปยังฐาน E จะได้ว่า

$$Q[X]_E = [X]_S$$

<u>ตัวอย่าง 2.4.2</u> จากตัวอย่าง 2.4.1 เมื่อกำหนดให้

$$E = \{E_1 = (1,0),\ E_2 = (0,1)\}$$

เป็นเซตของฐานมาตรฐาน และ

$$S = \{X_1 = (1,1),\ X_2 = (2,1)\}$$

เป็นฐานอีกชุดหนึ่งของ R^2 จะได้

$$[X]_E = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [X]_S = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

และ $X_1 = (1,1) = E_1 + E_2$

$X_2 = (2,1) = 2E_1 + E_2$

ดังนั้นทรานสิชันเมตริกซ์จากฐาน E ไปยังฐาน S คือ $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

จะได้ว่า $P[X]_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = [X]_E$

และเนื่องจาก $E_1 = (1,0) = -X_1 + X_2$

$E_2 = (0,1) = 2X_1 + X_2$

ดังนั้นทรานสิชันเมตริกซ์จากฐาน S ไปยังฐาน E คือ

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

จะได้ว่า $Q[X]_E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = [X]_S$

พิจารณา $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ดังนั้น $Q = P^{-1}$

นั่นคือ P จะเป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ที่ทำให้ $[X]_S = P^{-1}[X]_E$ จะได้ทฤษฎีต่อไปนี้

__ทฤษฎี 2.4.1__ ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซในมิติจำกัดบนฟิลด์ F ให้ $X \in V$ โดย $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ และ $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นฐานของ V แล้วจะได้ว่า

1. $[X]_E = P[X]_S$
2. $[X]_S = P^{-1}[X]_E$

โดย P เป็นทรานสิชันเมตริกซ์จากฐาน E ไปยังฐาน S และ P เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์

__พิสูจน์__ ให้ $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ และ $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นฐานของ V ดังนั้นแต่ละเวกเตอร์ใน S สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของ $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ได้

ให้
$$X_1 = a_{11}E_1 + a_{21}E_2 + \ldots + a_{n1}E_n$$
$$X_2 = a_{12}E_1 + a_{22}E_2 + \ldots + a_{n2}E_n$$
$$\vdots$$
$$X_n = a_{1n}E_1 + a_{2n}E_2 + \ldots + a_{nn}E_n$$

ดังนั้นโคออร์ดิเนตเวกเตอร์ของ X_j ที่สอดคล้องกับฐาน E คือ

$$[X_j]_E = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

และ $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

ให้ $X \in V$ จะได้ว่าเวกเตอร์ X สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ และ $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ได้

นั่นคือ $X = b_1E_1 + b_2E_2 + \cdots + b_nE_n$

$= c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n$

และจะได้ว่า

$$[X]_E = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad [X]_S = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

พิจารณา $X = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n$

แทนค่า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ จะได้

$$\begin{aligned} X &= c_1(a_{11}E_1 + a_{21}E_2 + \cdots + a_{n1}E_n) + \\ &\quad c_2(a_{12}E_1 + a_{22}E_2 + \cdots + a_{n2}E_n) + \cdots + \\ &\quad c_n(a_{1n}E_1 + a_{2n}E_2 + \cdots + a_{nn}E_n) \\ &= (c_1a_{11} + c_2a_{12} + \cdots + c_na_{1n})E_1 + \\ &\quad (c_1a_{21} + c_2a_{22} + \cdots + c_na_{2n})E_2 + \cdots + \\ &\quad (c_1a_{n1} + c_2a_{n2} + \cdots + c_na_{nn})E_n \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$[X]_E = \begin{pmatrix} c_1a_{11} + c_2a_{12} + \dots + c_na_{1n} \\ c_1a_{21} + c_2a_{22} + \dots + c_na_{2n} \\ \vdots \\ c_1a_{n1} + c_2a_{n2} + \dots + c_na_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

ดังนั้น $[X]_E = P[X]_S$ ....(1)

ในทำนองเดียวกัน ให้ Q เป็นทรานสิชันเมตริกซ์จากฐาน S ไปยังฐาน E จะได้ว่า

$[X]_S = Q[X]_E$ แทนค่าใน (1)

จะได้ $[X]_E = PQ[X]_E$

และให้ $PQ = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$

จาก $[X]_E = PQ[X]_E$ ....(2)

แทนค่า $X = E_1$ ใน (2) จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าแทน $X = E_2, E_3, \ldots, E_n$ จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

นั่นคือ $PQ = I$ จะได้ว่า $Q = P^{-1}$

ดังนั้น เมื่อ P เป็นทรานสิชันเมตริกซ์จากฐาน E ไปยังฐาน S แล้ว P จะเป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ และจะได้ว่า

$$[X]_S = P^{-1}[X]_E$$

<u>ทฤษฎี 2.4.2</u> ให้ $T : V \rightarrow V$ เป็นเอนโดมอร์ฟิซึมบนเวกเตอร์สเปซ V โดย V เป็นเวกเตอร์สเปซในมิติจำกัด ให้ A แทนเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ สำหรับทุก ๆ $X \in V$ จะได้ว่า

$$A[X]_E = [T(X)]_E$$

โดย $[T(X)]_E$ เป็นโคออร์ดิเนตเวกเตอร์ของ $T(X)$ ที่สอดคล้องกับฐาน E

<u>พิสูจน์</u> จะแสดงในกรณี $n = 2$

ให้ $E = \{E_1, E_2\}$ เป็นฐานของ V

ดังนั้น $T(E_1) = a_1X_1 + a_2X_2$

$T(E_2) = b_1X_1 + b_2X_2$

ดังนั้น $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$

ให้ $X \in V$ ดังนั้น $X = k_1E_1 + k_2E_2$ และ $[X]_E = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$

เพราะว่า T เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น ดังนั้น

$$\begin{aligned} T(X) &= k_1T(E_1) + k_2T(E_2) \\ &= k_1(a_1X_1 + a_2X_2) + k_2(b_1X_1 + b_2X_2) \\ &= (k_1a_1 + k_2b_1)X_1 + (k_1a_2 + k_2b_2)X_2 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $[T(X)]_E = \begin{pmatrix} k_1a_1 + k_2b_1 \\ k_1a_2 + k_2b_2 \end{pmatrix}$

และ $A[X]_E = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1a_1 + k_2b_1 \\ k_1a_2 + k_2b_2 \end{pmatrix}$

ดังนั้น $A[X]_E = [T(X)]_E$

<u>ทฤษฎี 2.4.3</u> ให้ $T : V \longrightarrow V$ เป็นเอนโดมอร์ฟิซึมบนเวกเตอร์สเปซ V โดย V เป็นเวกเตอร์สเปซในมิติจำกัด ให้ A แทนเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน $E = \{E_1, \ldots, E_n\}$ และ B แทนเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน $S = \{X_1, \ldots, X_n\}$ แล้วจะได้ว่า $B = P^{-1}AP$ เมื่อ P เป็นทรานสิชันเมตริกซ์ จากฐาน E ไปยังฐาน S

<u>พิสูจน์</u> สำหรับทุก ๆ $X \in V$,

$$P^{-1}AP[X]_S = P^{-1}A[X]_E = P^{-1}[T(X)]_E = [T(X)]_S = B[X]_S$$

ดังนั้นจะได้ว่า $B = P^{-1}AP$

<u>ตัวอย่าง 2.4.3</u> ให้ $T : R^2 \longrightarrow R^2$ เป็นเอนโดมอร์ฟิซึม โดย

$T(x,y) = (4x-2y,\ 2x+y)$ และ $E = \{E_1=(1,0), E_2=(0,1)\}$,

$S = \{X_1 = (1,1),\ X_2 = (-1,0)\}$

ให้หาเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน S

<u>วิธีทำ</u> เพราะว่า P เป็นทรานสิชันเมตริกซ์จากฐาน E ไปยังฐาน S ดังนั้น

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{และ } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

และ $T(E_1) = T(1,0) = (4,2) = 4E_1 + 2E_2$

$T(E_2) = T(0,1) = (-2,1) = -2E_1 + E_2$

ให้ A แทนเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน E

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ให้ B แทนเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน S จากทฤษฎี 2.4.3 จะได้ว่า

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>นิยาม 2.4.1</u> ให้ A และ B เป็นเมตริกซ์จัตุรัส และ P เป็นนอนซิงกูลาร์-เมตริกซ์ที่ทำให้ $B = P^{-1}AP$ แล้วเมตริกซ์ B จะคล้ายเมตริกซ์ A

จากตัวอย่าง 2.4.2

เมตริกซ์ $B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ คล้ายเมตริกซ์ $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

<u>ทฤษฎี 2.4.4</u> เมตริกซ์ที่คล้ายกันเป็นความสัมพันธ์สมมูลย์ ถ้า A, B เป็น m x n เมตริกซ์ จะได้ว่า

1. เมตริกซ์ A คล้ายเมตริกซ์ A
2. ถ้าเมตริกซ์ A คล้ายเมตริกซ์ B แล้วเมตริกซ์ B คล้ายเมตริกซ์ A
3. ถ้าเมตริกซ์ A คล้ายเมตริกซ์ B และเมตริกซ์ B คล้ายเมตริกซ์ C แล้วเมตริกซ์ A คล้ายเมตริกซ์ C

<u>พิสูจน์</u> 1. เพราะว่าเมตริกซ์เอกลักษณ์ I เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ และ $A = I^{-1}AI$ ดังนั้นเมตริกซ์ A คล้ายเมตริกซ์ A

2. เมตริกซ์ A คล้ายเมตริกซ์ B ดังนั้นจะมีเมตริกซ์ P เป็นนอน-ซิงกูลาร์เมตริกซ์ ที่ทำให้ $A = P^{-1}BP$ ดังนั้น $B = PAP^{-1} = (P^{-1})^{-1}AP^{-1}$ และ P^{-1} เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ จะได้ว่าเมตริกซ์ B คล้ายเมตริกซ์ A

3. เมตริกซ์ A คล้ายเมตริกซ์ B ดังนั้นจะมีนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ P ที่ทำให้ $A = P^{-1}BP$ และเมตริกซ์ B คล้ายเมตริกซ์ C ดังนั้นจะมีนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ Q ที่ทำให้ $B = Q^{-1}CQ$

พิจารณา $A = P^{-1}BP = P^{-1}(Q^{-1}CQ)P$

$$= (QP)^{-1}C\,(QP)$$

และ QP เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ จะได้ว่าเมตริกซ์ A คล้ายเมตริกซ์ C

<u>ทฤษฎี 2.4.5</u> ถ้า A และ B เป็น $n \times n$ เมตริกซ์ที่คล้ายกัน นั่นคือ $B = P^{-1}AP$ โดย P เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ดังนั้น

$B^k = P^{-1}A^kP$ หรือ $A^k = PB^kP^{-1}$

<u>พิสูจน์</u> ใช้ Mathematical induction สำหรับ k เป็นจำนวนนับ และ $k \geq 2$ เมื่อ $k = 2$ จะได้

$$\begin{aligned}
B^2 &= (P^{-1}AP)^2 \\
&= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \\
&= P^{-1}A(PP^{-1})AP \\
&= P^{-1}AIAP \\
&= P^{-1}AAP = P^{-1}A^2P
\end{aligned}$$

เมื่อ $k = n - 1$ เป็นจริง จะได้

$$B^{n-1} = P^{-1}A^{n-1}P$$

พิจารณาเมื่อ $B^n = B^{n-1}B$

$$= (P^{-1}A^{n-1}P)(P^{-1}AP)$$

$$= P^{-1}A^{n-1}(PP^{-1})AP$$

$$= P^{-1}A^{n-1}IAP$$

$$= P^{-1}A^nP$$

นั่นคือ $B^k = P^{-1}A^kP$ หรือ $A^k = PB^kP^{-1}$

2.5 <u>ระบบสมการเชิงเส้น</u>

พิจารณาสมการ

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b$$

เป็นสมการที่มีตัวแปรค่า x_1, x_2, x_3 โดย 1,2,3 เป็นสัมประสิทธิ์ของ x_1, x_2, x_3 และ b เป็นค่าคงที่ สมการนี้เรียกว่าสมการเชิงเส้น

<u>นิยาม 2.5.1</u> สมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรค่า n ค่า คือสมการที่เขียนอยู่ในรูป

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

โดย a_i, $i = 1,2,\dots,n$ เป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปรค่า $x_1, x_2, \dots, x_n$ และ b เป็นค่าคงที่

นิยาม 2.5.2 ระบบสมการเชิงเส้นที่มี m สมการ และตัวแปรค่า n ค่าคือเซตของสมการเชิงเส้นที่เขียนอยู่ในรูป

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_n
\end{aligned}
\qquad \dots\dots\dots(1)
$$

โดย a_{ij}, $i = 1,2,\dots,m$ และ $j = 1,2,\dots,n$ เป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปรค่า $x_1, x_2, \dots, x_n$ และ $b_i = 1,2,\dots,n$ เป็นค่าคงที่ ระบบสมการนี้เรียกว่าระบบสมการนอนโฮโมจีเนียสเชิงเส้น (nonhomogeneous of linear equation system)

และถ้า $b_i = 0$ เมื่อ $i = 1,2,\dots,n$ แล้วระบบสมการนี้จะเรียกว่าระบบสมการโฮโมจีเนียสเชิงเส้น (homogeneous of linear equation system)

ดังนั้นระบบสมการโฮโมจีเนียสเชิงเส้นเขียนอยู่ในรูป

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\
\vdots \qquad\qquad & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}
\qquad \dots\dots\dots(2)
$$

<u>นิยาม 2.5.3</u> ราก หรือคำตอบ (solution) ของระบบสมการ (1), (2) คือเซตของจำนวนจริง n ตัว $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ เรียกว่า n - tuple โดยเมื่อนำไปแทนค่าในระบบสมการ (1), (2) แล้วทำให้สมการเป็นจริง

ถ้าระบบสมการใดหารากได้ เรียกว่าเป็นระบบสมการชนิดคอนซิสเทนต์ (consistent) และถ้าหารากไม่ได้ เรียกว่าเป็นระบบชนิดอินคอนซิสเทนต์ (inconsistent) และสำหรับระบบสมการโฮโมจีเนียสคือระบบสมการ (2) ถ้า (0,0,...,0) เป็นรากแล้ว รากชนิดนี้เรียกว่า trivial solution และราก $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ไม่เป็นศูนย์หมด ของระบบสมการนี้เรียกว่า nontrivial solution

<u>การหารากของระบบสมการเชิงเส้น</u>

การหารากของระบบสมการเชิงเส้น สามารถทำได้ดังนี้

1. สมการ 2 สมการใดสามารถเปลี่ยนกันได้
2. คูณสมการหนึ่งสมการใดด้วยค่าคงที่ที่ไม่เท่ากับศูนย์
3. สามารถรวมสมการใด ๆ ที่คูณด้วยค่าคงที่ที่ไม่เท่ากับศูนย์กับสมการที่เหลือในระบบสมการเชิงเส้นนั้น

<u>ตัวอย่าง 2.5.1</u> จงหารากของระบบสมการเชิงเส้น

$$x + 2y = 10 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$2x - 2y = -4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$3x + 5y = 20 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

<u>วิธีทำ</u> กำจัด x ในสมการ(2) โดยนำ -2 คูณสมการ(1) แล้วรวมกับสมการ(2) จะได้ระบบสมการ

$$x + 2y = 10 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$y = 4 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$3x + 5y = 20 \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

ต่อไปกำจัด x ในสมการ(3) โดยนำ -3 คูณสมการ(1) แล้วรวมกับสมการ(2) จะได้ระบบสมการ

$$x + 2y = 10 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$y = 4 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$y = 10 \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

จากสมการ(2) และ(3) จะได้ 4 = 10 ดังนั้นระบบสมการนี้ไม่มีราก และเป็นระบบสมการชนิดอินคอนซิสเทนต์

<u>ตัวอย่าง 2.5.2</u> จงหารากของระบบสมการเชิงเส้น

$$x - 3y = -3 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$2x + y = 8 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

<u>วิธีทำ</u> กำจัด x ใน(2) นำ -2 คูณสมการ(1) แล้วรวมกับสมการ(2) จะได้

$$x - 3y = -3 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$7y = 14 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

คูณ(2) ด้วย $\frac{1}{7}$ จะได้

$$x - 3y = -3 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$y = 2 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

แทน y ใน(1) จะได้ x = 3

ดังนั้น $x = 3, y = 2$ เป็นรากของระบบสมการเชิงเส้นนี้ และมีเพียงรากเดียวเท่านั้น และเป็นระบบสมการชนิดคอนซิสเทนต์

<u>ตัวอย่าง 2.5.3</u> จงหารากของระบบสมการเชิงเส้น

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \quad \text{.......(1)}$$
$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \quad \text{.......(2)}$$

<u>วิธีทำ</u> กำจัด x จาก (2) โดยนำ -2 คูณสมการ (1) แล้วรวมกับสมการ (2) จะได้ว่า

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \quad \text{.......(1)}$$
$$- 3x_2 + 3x_3 = 12 \quad \text{.......(2)}$$

จาก (2) จะได้ $x_2 = x_3 - 4$ แทนในสมการ (1)

$$\text{จะได้ } x_1 = -4 - 2x_2 + 3x_3$$
$$= -4 -2(x_3 - 4) + 3x_3$$
$$\text{ดังนั้น } x_1 = x_3 + 4$$

เมื่อแทนค่า x_1, x_2 ในสมการ (1),(2) ที่โจทย์กำหนดให้แล้วทำให้ระบบสมการเป็นจริง คือ $-4 = -4$, $4 = 4$ แสดงว่าระบบสมการนี้มีรากมากมาย นั่นคือ ถ้า $x_3 = s$ โดย s เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้รากของระบบสมการนี้คือ $x_1 = s + 4$, $x_2 = s - 4$, $x_3 = s$ เมื่อ $s = 1$ จะได้ $(5, -3, 1)$ เป็นรากของสมการ ถ้า $s = 2$ จะได้ $(2, -6, -2)$ เป็นรากของสมการ

จาก 3 ตัวอย่างที่กล่าวไว้ รากของสมการเป็นไปได้ 3 กรณี คือไม่มีราก มีเพียงรากเดียวเท่านั้น และมีรากมากมาย (infinitely many solution) ซึ่งต่อไปเราจะพิจารณาระบบสมการที่หารากได้เท่านั้น

การหารากของระบบสมการเชิงเส้น เราสามารถใช้เมตริกซ์มาช่วยในการหารากได้ พิจารณาระบบสมการต่อไปนี้

$$
\begin{array}{lcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_n + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \quad \ldots\ldots(3)
\end{array}
$$

ให้ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ เรียกเมตริกซ์ A ว่าเป็นเมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ เรียกเมตริกซ์ B ว่าเป็นเมตริกซ์ของค่าคงที่

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ เรียกเมตริกซ์ X ว่าเป็นเมตริกซ์ของตัวแปรค่า

ดังนั้นระบบสมการ (3) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์คือ

$$AX = B$$

และเมตริกซ์

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ เรียกว่าอัคเมนต์เมตริกซ์ (Augmented matrices) ของระบบสมการ (3)

และระบบสมการโฮโมจีเนียสคือ ระบบสมการ (2) จะได้

$$B = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ดังนั้นสามารถเขียนสมการนี้ในรูปเมตริกซ์คือ $AX = 0$

<u>ตัวอย่าง 2.5.4</u> พิจารณาระบบสมการ

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 5 \\ -2x \quad\quad + z &= 7 \\ 2x + 2y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

และอัคเมนท์เมตริกซ์ คือ $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

<u>นิยาม 2.5.4</u> ให้ A เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ เมตริกซ์ A อยู่ในรูปโรรีดิวส์-เอชชีลอน (row - reduced echelon form) เมื่อ

1. สมาชิกตัวแรกในแถวที่ไม่เป็นศูนย์มีค่าเท่ากับ 1
2. แถวที่ไม่ใช่ศูนย์ทั้งหมด จะต้องอยู่เหนือแถวที่เป็นศูนย์ทั้งหมด
3. ถ้าแต่ละแถวที่ไม่เป็นศูนย์ทั้งหมดมีสมาชิกตัวแรกอยู่ในหลักที่ j แล้วสมาชิกตัวอื่น ๆ ในหลักที่ j จะต้องเป็นศูนย์หมด

4. สมาชิกตัวแรกของแต่ละแถวที่สมาชิกไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด จะอยู่เรียงลงมาจากซ้ายไปขวา

ตัวอย่าง 2.5.5 เมตริกซ์ต่อไปนี้อยู่ในรูปโรว์ริดิวส์เอชชีลอน

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

แต่เมตริกซ์ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ไม่อยู่ในรูปโรว์ริดิวส์-เอชชีลอน

ต่อไปจะศึกษาวิธีการที่จะทำเมตริกซ์ให้อยู่ในรูปโรว์ริดิวเอชชีลอน

นิยาม 2.5.5 ถ้า A เป็น m x n เมตริกซ์ การกระทำแถวเบื้องต้นของ A คือ การกระทำอย่างใดอย่างหนึ่งต่อไปนี้

1. การสลับที่ระหว่างแถวที่ i และ j เขียนแทนด้วย R_{ij}
2. การคูณแถวที่ i ด้วยค่าคงที่ $k \neq 0$ เขียนแทนด้วย $R_i \dashrightarrow kR_i$
3. การคูณแถวที่ j ของเมตริกซ์ A ด้วยค่าคงที่ $k \neq 0$ แล้วรวมกับแถวที่ i เขียนแทนด้วย $R_i \dashrightarrow R_i + kR_j$

นิยาม 2.5.6 ถ้า A และ B เป็น m x n เมตริกซ์ จะเรียกว่า A สมมูลย์แถวกับ B (A row equivalent to B) ถ้า B เป็นเมตริกซ์ที่ได้จากเมตริกซ์ A โดยการกระทำแถวเบื้องต้นกับเมตริกซ์ A เป็นจำนวนครั้งจำกัด

ตัวอย่าง 2.5.6

เมตริกซ์ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ สมมูลย์แถวกับ

เมตริกซ์ $D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

เพราะว่าถ้านำ 2 คูณแถวที่ 3 ของ A แล้ว รวมกับแถวที่ 2 ซึ่งเขียนแทนด้วย $R_2 \dashrightarrow R_2 + 2R_3$ จะได้เมตริกซ์

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

สลับที่แถวที่ 2 และ 3 ของเมตริกซ์ B ซึ่งเขียนแทนด้วย R_{23} จะได้

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

นำ 2 คูณแถวที่ 1 ของ C ซึ่งเขียนแทนด้วย $R_1 \dashrightarrow 2R_1$
จะได้

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

นั่นคือ เมตริกซ์ D ได้จากเมตริกซ์ A โดยการกระทำแถวเบื้องต้นเป็นจำนวนครั้งจำกัด ดังนั้น A จะสมมูลย์แถวกับเมตริกซ์ D

<u>ทฤษฎี 2.5.1</u> ทุก ๆ m x n เมตริกซ์ที่ไม่ใช่เมตริกซ์ศูนย์จะสมมูลย์แถวกับโรรีดิวส์เอชชีลอนเมตริกซ์

<u>ตัวอย่าง 2.5.7</u> ให้ $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -4 & 1 & -6 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & -26 \\ 0 & -9 & -26 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & -26 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{9}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{-26}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-7}{9} \\ 0 & 1 & \frac{-21}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

จะได้เมตริกซ์ A สมมูลย์แถวกับโรรีดิวส์เอชชีลอนเมตริกซ์ B

สำหรับการหารากของระบบนอนโฮโมจีเนียสเชิงเส้น สามารถนำเมตริกซ์ที่อยู่ในรูปโรรีดิวส์เอชซีลอนมาหารากของระบบสมการได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 2.5.8</u> ให้หารากของระบบสมการนอนโฮโมจีเนียส

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= -1 \\ 2x - y + 2y &= 2 \\ 3x + y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

ดังนั้นอ๊คเมนต์เมตริกซ์ของระบบสมการนี้ คือ

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

สามารถทำให้อยู่ในรูปโรรีดิวส์เอชซีลอนดังนี้

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to 3R_1 + 2R_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2 \to 7R_2 + 4R_3]{R_1 \to 7R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 21 & 0 & 0 & 45 \\ 0 & 21 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 7 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2 \to \frac{1}{21}R_2 \\ R_3 \to \frac{1}{7}R_3}]{R_1 \to \frac{1}{21}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{15}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-10}{7} \end{pmatrix}$$

ซึ่งเป็นรูปโรว์รีดิวส์เอชชีลอน สามารถเขียนในรูประบบสมการเชิงเส้น คือ

$$x_1 = \frac{15}{7}, \quad x_2 = -\frac{4}{7}, \quad x_3 = -\frac{10}{7}$$

จะเห็นว่าระบบสมการนี้มีเพียงรากเดียวเท่านั้น

<u>ตัวอย่าง 2.5.9</u> ให้หารากของระบบสมการนอนโฮโมจีเนียส

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 3x_3 &= -2 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

ดังนั้นอ๊อกเมนต์เมตริกซ์ของระบบสมการนี้ คือ

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

สามารถทำให้อยู่ในรูปโรว์รีดิวส์เอชชีลอน

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

จะได้ว่า $x_1 = 6 + x_3$

$x_2 = 4 - 2x_3$

ให้ $x_3 = s$ จะได้ $x_1 = 6 + s$, $x_2 = 4 - 2s$

ให้ $s = 1$ จะได้ $x_1 = 7$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ เป็นราก

ของระบบสมการนี้ และจะเห็นว่าระบบสมการนี้มีรากมากมาย

<u>ทฤษฎี 2.5.2</u> ถ้า U เป็นรากของระบบสมการ $AX = B$ แล้ว $U + H$ จะเป็นรากของระบบสมการ $AX = B$ เมื่อ H เป็นรากของระบบสมการ $AX = O$

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า U เป็นรากของระบบสมการ $AX = B$ จะได้ว่า $AU = B$ และ H เป็นรากของระบบสมการ $AX = O$ จะได้ว่า $AH = O$

พิจารณา $A(U + H) = AU + AH = B + O = B$

ดังนั้น $U + H$ จะเป็นรากของสมการ $AX = B$ เมื่อ H เป็นรากของ $AX = O$

<u>ทฤษฎี 2.5.3</u> ถ้า $AX = B$ เป็นระบบสมการนอนโฮโมจีเนียส และ A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์แล้ว ระบบสมการนี้จะมีเพียงรากเดียวเท่านั้น

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ดังนั้นจะมี A^{-1} เป็นอินเวอร์สของ A คูณทั้งสองข้างของระบบสมการ $AX = B$ จะได้ว่า

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

ดังนั้นระบบสมการนี้จะมีเพียงรากเดียวเท่านั้น

<u>ทฤษฎี 2.5.4</u> ถ้า A เป็น $n \times n$ เมตริกซ์ ระบบสมการโฮโมจีเนียส $AX = 0$ โดย $X \neq 0$ ไม่มีรากเป็นศูนย์หมด ก็ต่อเมื่อ A เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์

<u>พิสูจน์</u> ให้ A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ดังนั้นจะมี A^{-1} เป็นอินเวอร์สของ A คูณทั้งสองข้างของระบบสมการ $AX = 0$ เมื่อ $X \neq 0$ จะได้ว่า

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}0$$
$$(A^{-1}A)X = 0$$
$$X = 0$$

เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้นถ้า $AX = 0$ โดย $X \neq 0$ ไม่มีรากเป็นศูนย์หมดแล้ว A เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์

ในทางพิสูจน์กลับกัน ถ้า $AX = 0$ มีรากเป็นศูนย์หมด คือ $X = 0$

ดังนั้น
$$IX = 0$$
$$(A^{-1}A)X = 0$$
$$A^{-1}(AX) = A^{-1}0$$

เพราะฉะนั้น $AX = 0$

แสดงว่า A^{-1} เป็นอินเวอร์สของ A

ดังนั้น A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ เกิดข้อขัดแย้ง

นั่นคือ ถ้า A เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์ แล้วระบบสมการ $AX = 0$ โดย $X \neq 0$ ไม่มีรากเป็นศูนย์หมด

<u>นิยาม 2.5.7</u> ให้ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ เป็น 2 x 2 เมตริกซ์ ดีเทอร์มินันท์ของ A ซึ่งเขียนแทนด้วย A ถูกกำหนดดังนี้

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

และถ้า $A = (a)$ เป็น 1 x 1 เมตริกซ์ ดังนั้น $|A| = a$

<u>นิยาม 2.5.8</u> ถ้า A เป็น n x n เมตริกซ์ ไมเนอร์ของเอนทรี a_{ij} ซึ่งเขียนแทนด้วย M_{ij} คือ ดีเทอร์มินันท์ของเมตริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของเมตริกซ์ A และโคแฟคเตอร์ของเอนทรี a_{ij} ซึ่งเขียนแทนด้วย C_{ij} ถูกกำหนดดังนี้

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

<u>ตัวอย่าง 2.5.10</u> ให้ $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

จะได้ว่า $M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$,

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 16$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26 ,$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -26$$

จากตัวอย่าง 2.5.9 เราจะพบว่า โคแฟคเตอร์และไมเนอร์ของเอนทรี a_{ij} แตกต่างกันเพียงเครื่องหมายเท่านั้น

นั่นคือ $C_{ij} = \pm M_{ij}$

เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของเครื่องหมายระหว่าง C_{ij} และ M_{ij} ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

จากตัวอย่าง 2.5.10

$C_{11} = M_{11}$, $C_{12} = -M_{12}$, $C_{13} = M_{13}$, $C_{21} = -M_{21}$

เป็นต้น

<u>นิยาม 2.5.9</u> ถ้า A เป็น n x n เมตริกซ์ แล้ว

$$|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(เมื่อกระจาย $|A|$ ตามแถวที่ i)

และ $|A| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$

(เมื่อกระจาย $|A|$ ตามหลักที่ j)

<u>ตัวอย่าง 2.5.11</u> ให้ $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ ให้หาค่าดีเทอร์มินันต์

ของ A เมื่อกระจายตามหลักที่ 1 ของ A และแถวที่ 3 ของ A

<u>วิธีทำ</u>

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$$

$$= 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) - (-2)(-2) + 5(3) = -1$$

$$|A| = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33}$$

$$= 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 5(3) - 4(9) + (-2)(-10) = -1$$

ต่อไปจะกล่าวถึงคุณสมบัติของดีเทอร์มินันท์ เพื่อใช้หาค่าดีเทอร์มินันท์ได้สะดวกขึ้น

1. ถ้า A เป็น n x n เมตริกซ์ จะได้ว่า $|A| = |A^T|$
2. ถ้า A เป็น n x n เมตริกซ์ แล้วถ้าเมตริกซ์ A มีแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) มีสมาชิกเป็นศูนย์หมด จะได้ว่า $|A| = 0$
3. ถ้า A เป็น n x n เมตริกซ์ แล้วถ้าเมตริกซ์ A มีแถว 2 แถว (หรือหลัก 2 หลัก) เท่ากันแล้วจะได้ว่า $|A| = 0$

4. ถ้า A , B เป็น n x n เมตริกซ์ จะได้ว่า $|AB| = |A||B|$

5. ถ้า A เป็น n x n เมตริกซ์ และเมตริกซ์ B เป็นเมตริกซ์ที่ได้จากเมตริกซ์ A โดยการคูณแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) ของเมตริกซ์ A ด้วยค่าคงที่ $k \neq 0$ จะได้ว่า $|B| = k|A|$

6. ถ้า A เป็น n x n เมตริกซ์ แล้วเปลี่ยนแถว 2 แถว (หลัก 2 หลัก) ได้เมตริกซ์ B จะได้ว่า $|B| = -|A|$

7. ถ้า A เป็น n x n เมตริกซ์ แล้วคูณแถวใดแถวหนึ่งของเมตริกซ์ A ด้วยค่าคงที่ $k \neq 0$ แล้วรวมกับแถวใดแถวหนึ่งของเมตริกซ์ A ได้เมตริกซ์ B จะได้ว่า $|B| = |A|$

8. ถ้า A เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยม แล้ว $|A|$ คือ ผลคูณของแนวทะแยงมุม

<u>ตัวอย่าง 2.5.12</u> จงหา A เมื่อ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u> นำ −3 คูณแถวที่ 2 แล้วรวมกับแถวที่ 1 และแถวที่ 4 และนำ −2 คูณแถวที่ 2 รวมกับแถวที่ 3 จะได้

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

แล้วกระจาย $|A|$ ตามหลักที่ 1 จะได้

$$|A| = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

รวมแถวที่ 1 กับแถวที่ 3 จะได้

$$|A| = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

กระจาย $|A|$ ตามหลักที่ 1 จะได้

$$|A| = -(-1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}$$

นำ -1 คูณหลัก 1 แล้วรวมกับหลักที่ 2 จะได้

$$|A| = -(-1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 9 & -6 \end{vmatrix} = -(-1)(3)(-6) = -18$$

<u>ทฤษฎี 2.5.5</u> ถ้า A เป็น $n \times n$ เมตริกซ์ แล้ว

$a_{i1}C_{k1} + a_{i2}C_{k2} + \cdots + a_{in}C_{kn} = 0$

เมื่อ $i \neq k$

$a_{1j}C_{1k} + a_{2j}C_{2k} + \cdots + a_{nj}C_{nk} = 0$

เมื่อ $j \neq k$

พิสูจน์ ให้

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ให้ B เป็นเมตริกซ์ที่ได้จากเมตริกซ์ A โดยการแทนแถวที่ k ของเมตริกซ์ A ด้วยแถวที่ i จะได้เมตริกซ์

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \longleftarrow \text{แถวที่ } k \\ \\ \\ \end{array}$$

เพราะว่าเมตริกซ์ B มีแถว 2 แถว เท่ากัน ดังนั้น $|B| = 0$

และ $|B| = a_{i1}C_{k1} + a_{i2}C_{k2} + \cdots a_{in}C_{kn}$

เมื่อกระจายตามแถวที่ k

$= 0$

ดังนั้น $a_{i1}C_{k1} + a_{i2}C_{k2} + \cdots + a_{in}C_{kn} = 0$

เมื่อ $i \neq k$

<u>ตัวอย่าง 2.5.13</u> ให้ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

จะได้ว่า $C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 19$, $C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -14$

$$C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

ดังนั้น $a_{31}C_{21} + a_{32}C_{22} + a_{33}C_{23}$

$$= (4)(19) + 5(-14) + (-2)(3) = 0$$

<u>นิยาม 2.5.10</u> ถ้า A เป็น n x n เมตริกซ์ และ C_{ij} เป็นโคแฟคเตอร์ของ a_{ij} แล้วแอดจอยท์ (adjont) ของ A คือ ทรานสโพสของเมตริกซ์ของโคแฟคเตอร์ของ A นั่นคือ

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

<u>ตัวอย่าง 2.5.14</u> ให้ $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

โคแฟคเตอร์ของ A คือ

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 12 \ , \quad c_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(-6) = 6$$

$$c_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -16 \ , \quad c_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -(-4) = 4$$

$$c_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \ , \quad c_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(-16) = 16$$

$$c_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 12 \ , \quad c_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(10) = -10$$

$$c_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 16$$

ดังนั้น $\text{adj } A = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix}$

จากการศึกษาเรื่องดีเทอร์มินันท์ สามารถนำไปใช้ในการหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ได้ ดังจะศึกษาต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 2.5.6</u> ถ้า A เป็น n x n เมตริกซ์

$$A \cdot (\text{adj } A) = (\text{adj } A) \cdot A = |A|\, I$$

เมื่อ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์

และถ้า $|A| \neq 0$ จะได้ว่า

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } (A)$$

<u>พิสูจน์</u> พิจารณาผลคูณของ

$$A(\text{adj } A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{j1} \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{j2} \cdots & c_{n2} \\ \vdots & & & & \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{jn} \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

ดังนั้น ij เอนทรีของ A(adj A) คือ

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn} = |A| \quad \text{เมื่อ } i = j$$
$$= 0 \quad \text{เมื่อ } i \neq j$$

ดังนั้น $A(\text{adj } A) = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|\, I$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $(\text{adj } A)A = |A|\, I$

ดังนั้น $A \cdot (\mathrm{adj}\ A) = (\mathrm{adj}\ A) \cdot A = |A|\, I$

และถ้า $|A| \neq 0$

$$A \cdot \frac{1}{|A|}(\mathrm{adj}\ A) = \frac{1}{|A|}(A(\mathrm{adj}\ A)) = \frac{1}{|A|}(|A|I) = I$$

ดังนั้น $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\mathrm{adj}\ A)$

<u>ตัวอย่าง 2.5.15</u> ให้หาอินเวอร์สของเมตริกซ์ A ในตัวอย่างที่ 2.5.12

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $|A| = 64$ ดังนั้น

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\mathrm{adj}\ A) = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{12}{64} & \frac{4}{64} & \frac{12}{64} \\ \frac{6}{64} & \frac{2}{64} & \frac{-10}{64} \\ \frac{-16}{64} & \frac{16}{64} & \frac{16}{64} \end{pmatrix}$$

ดังนั้น จากการหา A^{-1} และ $|A| \neq 0$ เราสรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้

<u>ทฤษฎี 2.5.7</u> A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ก็ต่อเมื่อ $|A| \neq 0$

<u>ทฤษฎี 2.5.8</u> ถ้า A เป็น $n \times n$ เมตริกซ์ และ $AX = 0$ เป็นระบบสมการเชิงเส้นที่มีรากไม่ใช่ศูนย์ $(X \neq 0)$ จะได้ว่า

$|A| = 0$

<u>พิสูจน์</u> ถ้า $|A| \neq 0$ ดังนั้น A จะเป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ จากทฤษฎี 2.5.3 ระบบสมการ $AX = 0$ จะมีเพียงรากเดียวเท่านั้นคือ $X = 0$ ซึ่งขัดแย้งกับที่โจทย์กำหนดให้ว่า $X \neq 0$ แสดงว่าระบบสมการ $AX = 0$ มีรากไม่ใช่ศูนย์ จะได้ว่า $|A| = 0$

นอกจากเราจะใช้ดีเทอร์มินันท์ หาอินเวอร์สของเมตริกซ์แล้ว ยังสามารถนำค่าดีเทอร์มินันท์ไปหาค่ารากของระบบสมการได้

<u>ทฤษฎี 2.5.9</u> (Crammer's Rule) ถ้า $AX = B$ เป็นระบบสมการเชิงเส้น n สมการ และมีตัวแปรค่า n ตัว ถ้า $|A| \neq 0$ แล้วระบบสมการจะมีเพียงรากเดียวเท่านั้น โดย

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \; x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \; \ldots, \; x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

เมื่อ A_j เป็นเมตริกซ์ที่ได้จากเมตริกซ์ A โดยแทนหลักที่ j ของ A ด้วย B

เมื่อ $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ และ $j = 1, 2, \ldots, n$

<u>พิสูจน์</u> ถ้า $|A| \neq 0$ แล้ว A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ จากทฤษฎี 2.5.7 ดังนั้นจากทฤษฎี 2.5.3 ระบบสมการ $AX = B$ จะมีเพียงรากเดียวเท่านั้น คือ $X = A^{-1}B$ จากทฤษฎี 2.5.6

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A)$$ ดังนั้น

$$X = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & & & \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ดังนั้น $$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_1c_{11} + b_2c_{21} + \cdots + b_nc_{n1} \\ b_1c_{12} + b_2c_{22} + \cdots + b_nc_{n2} \\ \vdots \\ b_1c_{1n} + b_2c_{2n} + \cdots + b_nc_{nn} \end{pmatrix}$$

จะได้แถวที่ j ของ X มีค่าเท่ากับ

$$x_j = \frac{b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj}}{A}$$

ให้ $$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

เนื่องจากเมตริกซ์ A_j แตกต่างจากเมตริกซ์ A ตรงหลักที่ j ดังนั้น

$$A_j = b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj}$$

ดังนั้น $x_j = \frac{|Aj|}{|A|}$ เมื่อ $j = 1,2,\ldots, n$

<u>ตัวอย่าง 2.5.15</u> ใช้ Crammer's Rule หารากของระบบสมการ

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad\; + 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

<u>วิธีทำ</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

และ $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

ดังนั้น $x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{-40}{44} = \dfrac{-10}{11}$,

$x_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|} = \dfrac{72}{44} = \dfrac{18}{11}$,

$x_3 = \dfrac{|A_3|}{|A|} = \dfrac{152}{44} = \dfrac{38}{11}$

2.6 ค่าไอเกนและไอเกนเวกเตอร์ (Eigen Value and Eigen Vector)

ในหัวข้อนี้จะศึกษาการเปลี่ยนแปลง $T : V \to V$ ซึ่งเป็นการเปลี่ยนแปลงแบบเอนโดมอร์ฟิซึมอีกครั้งหนึ่ง ซึ่งจะเป็นการศึกษาวิธีการหาฐานที่ทำให้เมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นเป็นไดอาโกนอลเมตริกซ์ โดยเริ่มต้นศึกษาการหาค่าไอเกนและไอเกนเวกเตอร์ของเมตริกซ์ก่อน

<u>นิยาม 2.6.1</u> ให้ A เป็น $n \times n$ เมตริกซ์บนฟิลด์ F เวกเตอร์ $X \neq 0$ จะเรียกว่าไอเกนเวกเตอร์ของ A ก็ต่อเมื่อ มีสกาลาร์ λ ใน F ที่ทำให้ $AX = \lambda X$ สกาลาร์ λ เรียกว่า ค่าไอเกนและเวกเตอร์ X เป็นไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน λ

<u>ตัวอย่าง 2.6.1</u> ให้ $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ แล้ว $\lambda = 5$ เป็นค่าไอเกนของ A และเวกเตอร์ $\binom{a}{a}$ เมื่อ $a \neq 0$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน 5 ทั้งนี้เพราะว่า

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 4a \\ 2a + 3a \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$$

และเนื่องจาก $a \neq 0$ ดังนั้นจะมีไอเกนเวกเตอร์มากมายที่สอดคล้องกับค่าไอเกน $\lambda = 5$ และค่าไอเกนของ A อีกค่าหนึ่งคือ $\lambda = -1$ จะได้เวกเตอร์ $\begin{pmatrix} 2a \\ -a \end{pmatrix}$ เมื่อ $a \neq 0$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน $\lambda = -1$

ต่อไปจะศึกษาวิธีการหาค่าไอเกนและไอเกนเวกเตอร์ของเมตริกซ์

เนื่องจากเราใช้ $n \times n$ เมตริกซ์ ในการหาค่าไอเกนและไอเกนเวกเตอร์ ได้จากสมการ $AX = \lambda X$ ซึ่งสมการนี้สามารถเขียนในรูป

$$AX = \lambda IX$$

$(\lambda I - A)X = O$ สมการนี้มีรากไม่ใช่ศูนย์ก็ต่อเมื่อ $|\lambda I - A| = 0$ และสามารถหาค่าไอเกนได้จาก $|\lambda I - A| = 0$ และไอเกนเวกเตอร์ X ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน λ ได้จากสมการ $(\lambda I - A)X = O$

<u>นิยาม 2.6.2</u> ให้ $A = (a_{ij})$ เป็น $n \times n$ เมตริกซ์ เมตริกซ์ $\lambda I - A$ เขียนอยู่ในรูป

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

แล้วดีเทอร์มินันท์ของ $\lambda I - A$ จะเรียกว่า คาแรคเตอริสติกโพลิโนเมียลของ A และเรียกสมการ $\lambda I - A = 0$ ว่าสมการคาแรคเตอริสติคของเมตริกซ์ A คาแรคเตอริสติคโพลิโนเมียลของ $A = |\lambda I - A|$ สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปดังนี้ คือ

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

<u>ตัวอย่าง 2.6.2</u> ให้ $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ แล้วคาแรคเตอริสติคโพลิโนเมียล

ของ A คือ

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 \\ -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

<u>ทฤษฎี 2.6.1</u> ถ้า A เป็น $n \times n$ เมตริกซ์ แล้วเวกเตอร์ $X \neq 0$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน λ ก็ต่อเมื่อ $(\lambda I - A)X = 0$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $X \neq 0$ เป็นค่าไอเกนเวกเตอร์ของ A ดังนั้นจะมีค่าไอเกน λ ที่ทำให้ $AX = \lambda X$

หรือ $(\lambda I - A)X = 0$

ในทางกลับกัน ให้ $(\lambda I - A)A = 0$ จะได้ว่า $AX = \lambda X$

เพราะว่า เวกเตอร์ $X \neq 0$ ดังนั้น X จะเป็นไอเกนเวกเตอร์ของ A ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน λ

<u>ทฤษฎี 2.6.2</u> ให้ A เป็น $n \times n$ เมตริกซ์ สกาลาร์ λ เป็นค่าไอเกนของ A ก็ต่อเมื่อ λ เป็นรากของคาแรคเตอริสติคโพลิโนเมียลของ A

<u>พิสูจน์</u> ให้ λ เป็นค่าไอเกนของ A ดังนั้นจะมีเวกเตอร์ $X \neq 0$ ที่ทำให้

$$AX = \lambda X = (\lambda I)X$$

หรือ $(\lambda I - A)X = 0$

ซึ่งระบบสมการนี้มีรากไม่เป็นศูนย์ เมื่อ $|\lambda I - A| = 0$

ดังนั้น A เป็นรากของคาแรคเตอร์สติคโพลิโนเมียลของ A

ในทางกลับกัน ให้ λ เป็นรากของคาแรคเตอร์สติคโพลิโนเมียลของ A

จะได้ว่า $|\lambda I - A| = 0$ ดังนั้น ระบบสมการ $(\lambda I - A)X = 0$ จะมีรากไม่ใช่ศูนย์ นั่นคือ จะมีเวกเตอร์ $X \neq 0$ ที่ทำให้

$$AX = (\lambda I)X$$

หรือ $$AX = \lambda X$$

จะได้ว่า λ เป็นค่าไอเกนของ A

<u>ตัวอย่าง 2.6.3</u> ให้หาค่าไอเกน และไอเกนเวกเตอร์ของเมตริกซ์ $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> จากตัวอย่าง 2.6.2 สมการคาแรคเตอริสติคคือ

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$$\lambda = 5 \text{ , } -1$$ เป็นค่าไอเกนของ A

ต่อไปเราจะหาไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเกนได้จากระบบสมการ $(\lambda I - A)X = 0$ เมื่อ $\lambda = 5$ จะได้ระบบสมการ

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

หรือ $4x - 4y = 0$ หรือ $x - y = 0$

$-2x + 2y = 0$

ดังนั้นไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับ $\lambda = 5$ คือ $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ โดย $a \neq 0$ และ $a \in R$ เช่น $a = 1$ จะได้ $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ตัวหนึ่งที่สอดคล้องกับ $\lambda = 5$

เมื่อ $\lambda = -1$ จะได้ระบบสมการ

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

หรือ $-2x - 4y = 0$ หรือ $x + 2y = 0$

$-2x - 4y = 0$

ดังนั้นไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับ $\lambda = -1$ คือ $\begin{pmatrix} 2a \\ -a \end{pmatrix}$ เมื่อ $a \neq 0$

เช่น $a = 1$ จะได้ $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ตัวหนึ่งที่สอดคล้องกับ $\lambda = -1$

ต่อไปจะศึกษาการหาค่าไอเกนและไอเกนเวกเตอร์ เมื่อกำหนดเอนโดมอร์-ฟิซึม T มาให้

<u>นิยาม 2.6.3</u> ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซบนฟิลด์ F และ $T : V \to V$ เป็นเอนโดมอร์ฟิซึมเวกเตอร์ $X \neq 0$ ใน V เรียกว่า ไอเกนเวกเตอร์ ก็ต่อเมื่อ มีสกาลาร์ λ ใน F ที่ทำให้ $T(X) = \lambda X$ สกาลาร์ λ เรียกว่า ค่าไอเกนและเวกเตอร์ X เป็นไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน λ

<u>ตัวอย่าง 2.6.4</u> ให้ $T : R^2 \to R^2$ กำหนดให้ $T(x,x) = (x,x) = 1(x,x)$ จะได้ว่า 1 เป็นค่าไอเกน และ (x, x) เป็นไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน 1

<u>ตัวอย่าง 2.6.5</u> ให้ $T : R^2 \to R^2$ กำหนดโดย $T(x,y) = (x+y , 2x-y)$ แล้ว $T(1, \sqrt{3}-1) = \sqrt{3}(1, \sqrt{3}-1)$ ดังนั้น $\sqrt{3}$ เป็นค่าไอเกน และ $(1, \sqrt{3}-1)$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน $\sqrt{3}$

<u>ทฤษฎี 2.6.3</u> ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซมิติ n และ $T : V \dashrightarrow V$ เป็นเอนโดมอร์ฟิซึม ให้ $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นฐานของ V และ A เป็นเมตริกซ์ของ T ที่แทน T แล้ว

1. ค่าไอเกนของ T คือ ค่าไอเกนของ A

2. เวกเตอร์ X เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ T ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน λ ก็ต่อเมื่อโคออร์ดิเนตเวกเตอร์ $[X]_S$ เป็นค่าไอเกนของ A ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน λ และเวกเตอร์ X เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ T ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน λ ก็ต่อเมื่อ $(\lambda I - A)[X]_S = 0$

<u>พิสูจน์</u> 1. ให้ λ เป็นค่าไอเกนของ T ดังนั้นจะมีเวกเตอร์ $X \neq 0 \in V$ ที่ทำให้ $T(X) = \lambda X$

เพราะว่า $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นฐานของ V

ดังนั้น $X \in V$ สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$X = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$$

จะได้ $T(X) = \lambda X = \lambda(a_1X_1 + \ldots + a_nX_n)$

$$= (\lambda a_1)X_1 + (\lambda a_2)X_2 + \ldots + (\lambda a_n)X_n$$

ดังนั้นโคออร์ดิเนตของ T(X) ที่สอดคล้องกับฐาน S คือ

$$\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

จากทฤษฎี 2.4.2 ถ้า A เป็นเมตริกซ์ของ T ที่แทน T แล้ว $A[X]_S = [T(X)]_S$ หรือเขียนอยู่ในรูป

$$A\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \cdot \\ \lambda a_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}$$

ดังนั้น λ เป็นค่าไอเกนของ A และ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับ λ นั่นคือ ค่าไอเกนของ T คือค่าไอเกนของ A

2. เวกเตอร์ X เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ T ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน λ ก็ต่อเมื่อ $T(X) = \lambda X \Longleftrightarrow A[X]_S = [\lambda X]_S = \lambda[X]_S$

ดังนั้นเวกเตอร์ X เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ T ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน λ ก็ต่อเมื่อโคออร์ดิเนต $[X]_S$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ A

และเนื่องจาก $A[X]_S = \lambda[X]_S \Longleftrightarrow A[X]_S = \lambda I[X]_S$

$$\Longleftrightarrow (\lambda I - A)[X]_S = 0$$

ดังนั้น X เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ T ก็ต่อเมื่อ $(\lambda I - A)[X]_S = 0$

ตัวอย่าง 2.6.6 ให้ $T : R^2 \rightarrow R^2$ กำหนดโดย

$$T(x,y) = (x + 3y,\ 2x + 2y)$$

ให้หาค่าไอเกนและไอเกนเวกเตอร์

วิธีทำ ให้ $E = \{(1,0),(0,1)\}$ เป็นฐานมาตรฐานของ R^2
ดังนั้นเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน E คือ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

สมการคาแรคเตอร์สติคคือ $|\lambda I - A| = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) - 6 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

จะได้ $\lambda = 4\ ,\ -1$

ต่อไปจะหาไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน $\lambda = 4\ ,\ -1$
จาก $(\lambda I - A)[X]_E = 0$ เพราะว่า $X = (x, y)$
ดังนั้น $[X]_E = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ เมื่อ $\lambda = 4$ จะได้ระบบสมการ

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{aligned} 3x - 2y &= 0 \\ -3x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ $\begin{pmatrix} 2a \\ 3a \end{pmatrix}$ เมื่อ $a \neq 0$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ A
ซึ่งเป็นโคออร์ดิเนตที่สอดคล้องกับฐาน E ดังนั้นไอเกนเวกเตอร์ของ T
คือ $2a(1,0) + 3a(0,1)$ หรือ $(2a, 3a)$ ถ้า $a = 1$
จะได้ $X_1 = (2, 3)$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ตัวหนึ่งของ T

ในทำนองเดียวกันเมื่อ $\lambda = -1$ จะได้ $\begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$ เมื่อ $a \neq 0$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ A ดังนั้นไอเกนเวกเตอร์ของ T คือ $(a, -a)$ ถ้า $a = 1$ จะได้ $X_2 = (1, 1)$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ตัวหนึ่งของ T

<u>ทฤษฎี 2.6.4</u> ให้ $T : V \dashrightarrow V$ เป็นเอนโดมอร์ฟิซึมบนเวกเตอร์สเปซ V ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ โดย $\lambda_i \neq \lambda_j$ เมื่อ $i \neq j$ แล้ว $X_1, X_2, \ldots, X_n$ จะเป็นเชิงเส้นอิสระ

<u>พิสูจน์</u> โดยใช้ Mathematical induction

ให้ $n = 1$ แล้ว X_1 เป็นเชิงเส้นอิสระ เพราะว่า $a_1X_1 = 0$ และ $X_1 \neq 0$ จะได้ $a_1 = 0$

ให้ $n = k - 1$ เป็นจริง ดังนั้น $X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$ เป็นเชิงเส้นอิสระ

ให้ $$a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_kX_k = 0 \qquad (1)$$

ดังนั้น $a_1T(X_1) + a_2T(X_2) + \ldots + a_kT(X_k) = 0$

$$a_1\lambda_1X_1 + a_2\lambda_2X_2 + \ldots + a_k\lambda_kX_k = 0 \qquad (2)$$

(1) คูณด้วย λ_k จะได้

$$a_1\lambda_kX_1 + a_2\lambda_kX_2 + \ldots + a_k\lambda_kX_k = 0 \qquad (3)$$

(2) - (3) จะได้

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k)X_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_k)X_2 + \ldots + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)X_{k-1} = 0$$

เนื่องจาก $X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$ เป็นเชิงเส้นอิสระ ดังนั้น

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k) = a_2(\lambda_2 - \lambda_k) = \ldots = a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0$$

แต่เนื่องจาก $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ เป็นค่าไอเกนที่แตกต่างกัน
ดังนั้น $(\lambda_1 - \lambda_k), \ldots, (\lambda_{k-1} - \lambda_k)$ ย่อมไม่เท่ากับ 0
ดังนั้น $a_1 = a_2 = \ldots = a_{k-1} = 0$ แทนค่าใน (1)
จะได้ $a_k = 0$ ดังนั้นจะได้ว่า $X_1, X_2, \ldots, X_k$ เป็นเชิงเส้นอิสระ
นั่นคือ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นเชิงเส้นอิสระ

<u>ทฤษฎี 2.6.5</u> ให้ $T : V \rightarrow V$ เป็นเอนโดมอร์ฟิซึมของเวกเตอร์สเปซ V ที่มีมิติ n และ $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นฐานที่ประกอบด้วยไอเกนเวกเตอร์ของ V แล้วเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน S จะเป็นไดอาโกนอลเมตริกซ์ และถ้า D เป็นไดอาโกนอลเมตริกซ์ของ T แล้วไดอาโกนอลเอนทรีจะเป็นค่าไอเกนของ T

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นฐานที่ประกอบด้วยไอเกนเวกเตอร์ของ V ดังนั้นจะมีค่าไอเกน $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ที่ทำให้

$$T(X_1) = \lambda_1 X_1$$
$$T(X_2) = \lambda_2 X_2$$
$$\vdots$$
$$T(X_n) = \lambda_n X_n$$

ให้ D เป็นเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน S
ดังนั้น

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

นั่นคือ เมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน S จะเป็นไดอาโกนอลเมตริกซ์ และไดอาโกนอลเอนทรีเป็นค่าไอเกนของ T

ตัวอย่าง 2.6.7 ให้ $T : R^2 \to R^2$ เป็นเอนโดมอร์ฟิซึม

กำหนดให้ $T(x,y) = (x+3y\ ,\ 2x+2y)$ จากตัวอย่าง 2.6.2 จะได้ว่า $\lambda = 4\ ,\ -1$ และไอเกนเวกเตอร์ $X_1 = (2\ ,\ 3)$, $X_2 = (1\ ,\ -1)$ จากทฤษฎี 2.6.2 จะได้ว่า $S = \{X_1 = (2,3),\ X_2 = (1\ ,\ -1)\}$ เป็นเชิงเส้นอิสระ ดังนั้น $S = \{X_1 = (2,3),\ X_2 = (1\ ,\ -1)\}$ เป็นฐานของ R^2 และจะได้ว่า

$$T(2,3) = (8,12) = 4(2,3) + 0(1,-1)$$

$$T(1,-1) = (-1,1) = 0(2,3) + 1(+1,-1)$$

ให้ D เป็นเมตริกซ์ของ T จะได้ว่า

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ซึ่งเป็นไดอาโกนอลเมตริกซ์ และไดอาโกนอลเอนทรีเป็นค่าไอเกนของ T

นิยาม 2.6.4 ให้ $T : V \to V$ เป็นเอนโดมอร์ฟิซึมของเวกเตอร์สเปซมิติ n แล้ว T จะเรียกว่า ไดอาโกนอลไลเซชัน ถ้ามีฐาน S ของ V ที่ทำให้เมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน S เป็นไดอาโกนอลเมตริกซ์

<u>หมายเหตุ</u> จากตัวอย่าง 2.6.7

$S = \{X_1 = (2,3), X_2 = (1,-1)\}$ เป็นฐานของ R^2
และ D เป็นเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน S คือ

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

เป็นไดอาโกนอลเมตริกซ์ ดังนั้น T ไดอาโกนอลไลเซชัน
และในกรณีที่รากบางรากของ T ซ้ำกันบางค่า T จะไดอาโกนอลไลเซชันหรือไม่ก็ได้ ดังพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 2.6.8</u> ให้ $T = R^3 \dashrightarrow R^3$ กำหนดโดย

$T(x,y,z) = (x-3y+3z,\ 3x-5y+3z,\ 6x-6y+4z)$

ให้ A เป็นเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐานมาตรฐานของ R^3 ให้เป็นฐาน E จะได้

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

สมการคาแรคเตอร์สติค คือ

$$\lambda I - A = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & -3 \\ -3 & \lambda+5 & -3 \\ -6 & 6 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2(\lambda-4) = 0$$

จะได้ว่า $\lambda = -2$ และ 4 เป็นค่าไอเกนของ A

ให้ $X = (x,y,z)$ ดังนั้น $[X]_E = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ซึ่งจะหาไอเกน

เวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเกนได้จาก $(\lambda I - A)[X]_E = 0$

เมื่อ $\lambda = -2$ จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-3x + 3y - 3z = 0$$

หรือ $-3x + 3y - 3z = 0$ หรือ $x - y + z = 0$

$$-6x + 6y - 6z = 0$$

จะได้ $\begin{pmatrix} a-b \\ a \\ b \end{pmatrix}$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ A ซึ่งเป็นโคออร์ดิเนต

ที่สอดคล้องกับฐาน E ดังนั้นไอเกนเวกเตอร์ของ T คือ $(a-b, a, b)$

เนื่องจาก $(a-b, a, b) = a(1,1,0) + b(-1,0,1)$

และ $T(a-b, a, b) = -2(a-b, a, b)$

เพราะว่า $T(a-b, a, b) = T(a(1,1,0) + b(-1,0,1))$

$= T(a(1,1,0) + T(b(-1,0,1))$

และ $-2(a-b, a, b) = -2(a(1,1,0) + b(-1,0,1))$

$= -2a(1,1,0) + 2b(-1,0,1)$

ดังนั้น $T(a(1,1,0)) = -2a(1,1,0)$

$T(b(-1,0,1)) = -2b(-1,0,1)$

จะได้ว่า $a(1,1,0)$ และ $b(-1,0,1)$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ T ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน $\lambda = -2$

ให้ $a = 1, b = 1$ จะได้ $X_1 = (1,1,0)$, $X_2 = (-1,0,1)$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ของค่าไอเกน $\lambda = -2$ และเป็นเชิงเส้นอิสระ

สำหรับ $\lambda = 4$ จะได้ $\begin{pmatrix} a \\ a \\ 2a \end{pmatrix}$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ A ซึ่งเป็นโคออร์ดิเนตที่สอดคล้องกับฐาน E ดังนั้น $(a, a, 2a)$ จะเป็นไอเกนเวกเตอร์ของ T และถ้า $a = 1$ จะได้ $X_3 = (1,1,2)$ เป็นไอเกนเวกเตอร์

และจะได้ว่า $S = \{X_1 = (1,1,0), X_2 = (-1,0,1), X_3 = (1,1,2)\}$ เป็นฐานของ R^3

ดังนั้น ถ้าให้ D เป็นเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน S ที่ประกอบด้วยไอเกนเวกเตอร์ แล้ว

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ดังนั้น T ไดอาโกนอลไลเซชัน

<u>ตัวอย่าง 2.6.9</u> ให้ $T : R^3 \longrightarrow R^3$ กำหนดโดย

$$T(x,y,z) = (2x+y, y-z, 2y+4z)$$

ให้ A เป็นเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน E ซึ่งเป็นฐานมาตรฐาน จะได้

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

สมการคาแรคเตอริสติคของ A คือ

$$\lambda I - A = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-3) = 0$$

ดังนั้น $\lambda = 2, 3$ เป็นค่าไอเกนของ T

ให้ $X = (x, y, z)$ จะได้ $[X]_E = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ และหาไอเกนเวกเตอร์ได้จาก $(\lambda I - A)\ [X]_E = 0$

$\lambda = 2$ จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -y &= 0 \\ y + z &= 0 \\ -2y - 2z &= 0 \end{aligned} \quad \text{หรือ} \quad \begin{aligned} y &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ A ซึ่งเป็นโคออร์ดิเนตที่สอดคล้องกับฐาน E ดังนั้น $(a, 0, 0)$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ T ถ้า $a = 1$ จะได้ $X_1 = (1,0,0)$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ T ที่สอดคล้องกับ $\lambda = 2$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ $\lambda = 3$ จะได้ $\begin{pmatrix} a \\ a \\ -2a \end{pmatrix}$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ A และจะได้ว่า $(a, a, -2a)$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ T ถ้า $a = 1$ จะได้ $X_2 = (1,1,-2)$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ T เนื่องจากเราหาไอเกนเวกเตอร์ที่เป็นเชิงเส้นอิสระได้เพียง 2 ค่า คือ X_1 , X_2 และไม่สามารถหา X_3 ที่ทำให้ X_1, X_2, X_3 เป็นเชิงเส้นอิสระได้

ดังนั้นเราไม่สามารถหาฐานของ R^3 ที่ประกอบด้วยไอเกนเวกเตอร์

ของ T ได้ ดังนั้น T ไม่ไดอาโกนอลไลเซชัน

<u>ตัวอย่าง 2.6.10</u> ให้ $T : R^2 \longrightarrow R^2$ กำหนดให้

$$T(x, y) = (x+2y , -x-y)$$

ให้ A เป็นเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐานมาตรฐาน E จะได้ว่า

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

สมการคาแรคเตอริสติคคือ $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$

ในระบบจำนวนจริง $\lambda^2 + 1 = 0$ หาค่ารากเป็นจำนวนจริงไม่ได้

ดังนั้นเมตริกซ์ A ไม่มีค่าไอเกน ดังนั้น T ไม่มีค่าไอเกน

ในระบบจำนวนเชิงซ้อน $\lambda^2 + 1 = 0$ จะได้ $\lambda = i , -i$ เป็น

ค่าไอเกนของ A ดังนั้นค่าไอเกนของ T คือ $i , -i$

นั่นคือ ในระบบจำนวนเชิงซ้อนจะมีค่าไอเกนอย่างน้อย 1 ค่า

<u>Fundamental Theorem of Algebra</u>

ถ้า $p(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$ เป็น

โพลิโนเมียลกำลัง n โดย $a_0, a_1, \dots, a_n$ เป็นสัมประสิทธิ์ของจำนวน

เชิงซ้อน แล้วจะมีราก $r_1, r_2, \dots, r_n$ ที่ทำให้

$$p(t) = (t-r_1)(t-r_2) \dots (t-r_n)$$

<u>ทฤษฎี 2.6.6</u> ให้ $T : V \to V$ เป็นเอนโดมอร์ฟิซึมบนเวกเตอร์สเปซ V มีดิติ n บนฟิลด์ของจำนวนเชิงซ้อน และ $n \times n$ เมตริกซ์ A เป็นเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐานของ T แล้ว T จะมีมีค่าไอเกนอย่างน้อย 1 ค่า

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า A เป็น $n \times n$ เมตริกซ์ ดังนั้นคาแรกเตอริสติคโพลิโนเมียลของ A จะเป็นโพลิโนเมียลกำลัง n นั่นคือ

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

เนื่องจากสัมประสิทธิ์อยู่ใน C ดังนั้น จะมีราก $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ใน C ที่ทำให้

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

เพราะว่า $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ เป็นรากของคาแรกเตอร์สติคโพลิโนเมียล จากทฤษฎี 2.6.2 จะได้ว่า $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ เป็นค่าไอเกนของ A และเป็นค่าไอเกนของ T

ดังนั้น T จะมีค่าไอเกนอย่างน้อย 1 ค่า

<u>ทฤษฎี 2.6.7</u> เมตริกซ์ที่คล้ายกันจะมีคาแรกเตอริสติคโพลิโนเมียลเหมือนกัน

<u>พิสูจน์</u> A และ B เป็นเมตริกซ์ที่คล้ายกัน ดังนั้นจะมีนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ P ที่ทำให้ $B = P^{-1}AP$

พิจารณา
$$\begin{aligned} |\lambda I - B| &= |\lambda I - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}\lambda IP - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(\lambda I - A)P| \\ &= |P^{-1}|\,|\lambda I - A|\,|P| \end{aligned}$$

$$= |P^{-1}|\,|P|\,|\lambda I - A|$$

$$= |P^{-1}P|\,|\lambda I - A|$$

$$|\lambda I - B| = |\lambda I - A|$$

นั่นคือ เมตริกซ์ที่คล้ายกัน จะมีคาแรคเตอริสติคโพลิโนเมียลเหมือนกันและจะได้ว่า A กับ B มีสมการคาแรคเตอริสติคอย่างเดียวกัน ดังนั้นจะมีรากอย่างเดียวกัน จากทฤษฎี 2.6.2 เนื่องจากค่าไอเกนเป็นรากของสมการคาแรคเตอริสติค ดังนั้นเมตริกซ์ที่คล้ายกันจะมีค่าไอเกนเหมือนกัน

<u>ทฤษฎี 2.6.8</u> ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ที่คล้ายกันแล้ว $|A| = |B|$

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า เมตริกซ์ A คล้ายเมตริกซ์ B ดังนั้นจะมีนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ P ที่ทำให้ $B = P^{-1}AP$

$$|B| = |P^{-1}AP|$$

$$= |P^{-1}|\,|A|\,|P|$$

$$= |P^{-1}|\,|P|\,|A|$$

$$= |P^{-1}P|\,|A|$$

$$= |I|\,|A|$$

$$|B| = |A|$$

<u>นิยาม 2.6.1</u> ให้ $T : V \to V$ เป็นเอนโดมอร์ฟิซึม ให้ W เป็นสับสเปซของ V แล้ว สับสเปซ W จะเรียกว่าเป็นอินแวร์เรียน (invariant) ภายใต้ T หรือ T อินแวร์เรียน ถ้าทุก ๆ $X \in W$ แล้ว $T(X) \in W$ ในกรณีนี้ T จะ restrict ไปยัง W และกำหนดเอนโดมอร์ฟิซึม $T_W : W \to W$ โดย $T_W(X) = T(X)$ สำหรับทุก ๆ $X \in W$

ตัวอย่าง 2.6.11 ให้ $X \neq 0$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ของเอนโดมอร์ฟิซึม $T : V \to V$ ให้ λ เป็นค่าไอเกนที่ทำให้ $T(X) = \lambda X$ ให้ $W = \{kX / k$ เป็นสกาลาร์ $\}$ ซึ่งเป็นสับสเปซที่สแปนโดย X และมีมิติ 1 จะเป็นอินแวร์เรียนภายใต้ T ทั้งนี้เพราะว่า

$$T(kX) = kT(X) = k(\lambda X) = (k\lambda)X \in W$$

ให้ $T : V \to V$ และให้ $W = \{kX / k$ เป็นสกาลาร์ $\}$ ซึ่งเป็นสับสเปซสแปนโดย $X \neq 0$ และมีมิติ 1 และ W เป็นอินแวร์เรียนภายใต้ T ดังนั้นจะได้ว่า $T(X) \in W$ ดังนั้น $T(X)$ สามารถเขียนอยู่ในรูป $T(X) = aX$ ได้ จะได้ว่า X เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ T

ตัวอย่าง 2.6.12 ให้ $T : V \to V$ เป็นเอนโดมอร์ฟิซึม แล้ว 1. $\{0\}$ 2. V 3. เคอร์เนลของ T เป็นอินแวร์เรียนภายใต้ T

1. เพราะว่า $T(0) = 0 \in \{0\}$ และ $\{0\}$ เป็นสับสเปซของ V ดังนั้น $\{0\}$ เป็นอินแวร์เรียนภายใต้ T
2. สำหรับทุก ๆ $X \in V$ แล้ว $T(X) \in V$ และ V เป็นสับสเปซของ V ดังนั้น V เป็นอินแวร์เรียนภายใต้ T
3. ให้ $Y \in \operatorname{Ker} T$ ดังนั้น $T(Y) = 0 \in \operatorname{Ker} T$ และเนื่องจาก $\operatorname{Ker} T$ เป็นสับสเปซของ V ดังนั้น $\operatorname{Ker} T$ เป็นอินแวร์เรียนภายใต้ T

2.7 อินเนอร์โพรดักท์สเปซ (Inner Product Space)

จากการศึกษาในหัวข้อ 2.1 เมื่อ $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ และ $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n และมีผลคูณสกาลาร์เป็น $A \cdot B = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$ จากทฤษฎี 2.1.2 เมื่อ A, B, C เป็นเวกเตอร์ใน R^n จะสอดคล้องตามคุณสมบัติ

1. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
2. $cA \cdot B = c(A \cdot B) = A \cdot cB$
3. $A \cdot B = B \cdot A$
4. $A \cdot A \geq 0$ และ $A \cdot A = 0$ ก็ต่อเมื่อ $A = 0$ ใน ส่วนที่จะกล่าวถึงนี้จะกล่าวถึงการกระทำของเวกเตอร์ในเวกเตอร์สเปซ ดังจะได้ศึกษาต่อไปนี้

นิยาม 2.7.1 ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซบนฟิลด์ F และ f เป็นฟังก์ชันโดย $f : V \dashrightarrow R$ (โดเมนคือ V และเรนจ์ คือเซตที่ประกอบด้วยจำนวนจริง) และใช้สัญลักษณ์ $f(X,Y)) = \langle X, Y \rangle$ สำหรับทุก ๆ $X, Y \in V$, การกระทำ $\langle X, Y \rangle$ เป็นอินเนอร์โพรดักท์เมื่อสอดคล้องตามคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $\langle X+Y, Z \rangle = \langle X, Z \rangle + \langle Y, Z \rangle$
2. $\langle cX, Y \rangle = c\langle X, Y \rangle = \langle X, cY \rangle$
3. $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$
4. $\langle X, X \rangle \geq 0$ และ $\langle X, X \rangle = 0$ ก็ต่อเมื่อ $X = 0$

เวกเตอร์สเปซ V ที่มีอินเนอร์โพรดักท์ เรียกว่า อินเนอร์โพรดักท์สเปซ

<u>ตัวอย่าง 2.7.1</u> ให้ $V = R^3$ กำหนดให้ $<X , Y> = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

เมื่อ $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ ε R^3

จะได้ว่า R^3 เป็นอินเนอร์โพรดักท์สเปซ ซึ่งแสดงได้ดังนี้

1. ให้ $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$, $Z = (z_1, z_2, z_3) \varepsilon R^3$

ดังนั้น $X + Y = (x_1+y_1 , x_2+y_2 , x_3+y_3)$

$$
\begin{aligned}
< X+Y , Z > &= (x_1+y_1)z_1 + (x_2+y_2)z_2 + (x_3+y_3)z_3 \\
&= (x_1z_1+y_1z_1)+(x_2z_2+y_2z_2)+(x_3z_3+y_3z_3) \\
&= (x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3)+(y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3) \\
&= < X , Z > + < Y , Z >
\end{aligned}
$$

2.
$$
\begin{aligned}
cX &= (cx_1 , cx_2 , cx_3) \\
< cX , Y > &= cx_1y_1 + cx_2y_2 + cx_3y_3 \\
&= c(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) = c< X, Y > \\
&= x_1(cy_1) + x_2(cy_2) + x_3(cy_3) = < X, cY >
\end{aligned}
$$

3. $<X, Y> = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 = y_1x_1+y_2x_2+y_3x_3 = <Y , X>$

4. $<X, X> = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$

ถ้า $<X , X> = 0$ จะได้ว่า $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$

ดังนั้น $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ นั่นคือ $X = 0$

ถ้า $X = 0 = (0 , 0 , 0)$ ดังนั้น $<X , X> = 0+0+0 = 0$

จาก 1,2,3,4 จะได้ว่า $<X , Y>$ เป็นอินเนอร์โพรดักท์

และ R^3 เป็นอินเนอร์โพรดักท์สเปซ

<u>ตัวอย่าง 2.7.2</u> ให้ $V = R^n$ ให้ $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n$

กำหนดให้ $\langle X, Y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$

แล้ว $\langle X , Y\rangle$ เป็นอินเนอร์โพรดัคท์ ซึ่งอินเนอร์โพรดัคท์นี้เรียกว่า อินเนอร์โพรดัคท์มาตรฐาน (Standard inrer product) หรือ สกาลาร์โพรดัคท์ เพราะว่า เมื่อ $X = (x_1, x_2, \ldots , x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in R^n$ จากการศึกษาหัวข้อ 2.1 กำหนดไว้ว่า

$$X \cdot Y = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

<u>ตัวอย่าง 2.7.3</u> ให้แสดงว่า $\langle X , Y\rangle$ เป็นอินเนอร์โพรดัคท์ใน R^2 เมื่อ

$\langle X , Y\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$

และ $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2)$ ซึ่งแสดงได้ดังนี้

1. ให้ $Z = (z_1, z_2)$

$$\begin{aligned}\langle X+Y , Z\rangle &= (x_1+y_1)z_1 - (x_1+y_1)z_2 - (x_2+y_2)z_1 + 3(x_2+y_2)z_2 \\ &= (x_1z_1 - x_1z_2 - x_2z_1 + 3x_2z_2) + (y_1z_1 - y_1z_2 - y_2z_2 + 3y_2z_2) \\ &= \langle X , Z\rangle + \langle Y , Z\rangle\end{aligned}$$

2. $\langle cX , Y\rangle = cx_1y_1 - cx_1y_2 - cx_2y_1 + 3cx_2y_2 = c\langle X , Y\rangle$

3. $\langle X , Y\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 = \langle Y , X\rangle$

4. $$\begin{aligned}\langle X , X\rangle &= x_1^2 - x_1x_2 - x_2x_1 + 3x_2^2 \\ &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2 \geq 0\end{aligned}$$

5. $\langle X , X\rangle = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x_1 = 0, x_2 = 0$

นั่นคือ $X = 0$

ตัวอย่าง 2.7.4 ให้ v เป็นเวกเตอร์สเปซของฟังก์ชันจำนวนจริงที่ต่อเนื่องใน ช่วง $[a, b]$ กำหนดให้

$$< f, g > = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$$

จะได้ว่า $< f, g >$ เป็นอินเนอร์โพรดักท์ ซึ่งแสดงได้ดังนี้

1. $$< f+g , h > = \int_a^b ((f+g)(t))\, h(t)\, dt$$
$$= \int_a^b f(t)h(t)dt + \int_a^b g(t)h(t)dt$$
$$= < f, h > + < g, h >$$

2. $$< cf, g > = \int_a^b cf(t)g(t)dt = c\int_a^b f(t)g(t)dt$$
$$= c < f, g >$$

3. $$< f, g > = \int_a^b f(t)g(t)dt = \int_a^b g(t)f(t)dt = < g, f >$$

4. $$< f, f > = \int_a^b f(t)f(t)dt = \int_a^b (f(t))^2 dt > 0 \text{ ถ้า } f \neq 0$$

และ $\int_a^b (f(t))^2 = 0$ เมื่อ $f(t) = 0$

จะได้ว่า $< f, f > \geq 0$ และ $< f, f > = 0$

ก็ต่อเมื่อ $f = 0$

<u>ทฤษฎี 2.7.1</u> ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดักท์สเปซ

แล้ว $< X , aY + bZ > = a< X , Y > + b< X , Z >$

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า $<X , aY + bZ > = <aY + bZ , X>$ คุณสมบัติอินเนอร์โพรดักท์

$$= < aY , X > + < bZ , X >$$

$$= a< Y , X > + b< Z , X >$$

$$= a<X , Y> + b<X , Z>$$

<u>นิยาม 2.7.2</u> ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดักท์สเปซ และ $X \varepsilon V$

นอร์มของ X ซึ่งเขียนแทนด้วย $\| X \|$ คือ จำนวนจริงที่ถูกกำหนดโดย

$$\| X \| = \sqrt{< X , X >}$$

สำหรับ $X \varepsilon V$ จะเรียก X ว่า เวกเตอร์หนึ่งหน่วย ถ้า $\| X \| = 1$ หรือ $< X , X > = 1$

<u>ข้อสังเกต</u> สำหรับเวกเตอร์ $U \varepsilon V$ โดย $V \neq 0$ จะได้ว่า $X = \frac{U}{\| U \|}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

<u>ตัวอย่าง 2.7.5</u> ให้หานอร์มของ $X = (3 , 4) \varepsilon R^2$ ที่สอดคล้องกับอินเนอร์โพรดักท์มาตรฐานและอินเนอร์โพรดักท์ในตัวอย่างที่ 2.7.3

1. ฉะนั้น $\| X \|^2 = <X , X> = <(3, 4) , (3 , 4)> = 9+16 = 25$
   ดังนั้น นอร์มของ X ที่สอดคล้องกับอินเนอร์โพรดักท์มาตรฐานคือ 5

2. ฉะนั้น $\| X \|^2 = <(3 , 4) , (3 , 4) > = 9-12-12+48 = 33$
   ดังนั้น นอร์มของ X ที่สอดคล้องกับอินเนอร์โพรดักท์ในตัวอย่าง 2.7.3 คือ $\sqrt{33}$

<u>ทฤษฎี 2.7.2</u> ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดัคท์สเปซ ถ้า X , Y ε V จะได้ว่า

$$|\langle X, Y\rangle| \leq \|X\| \, \|Y\|$$

อสมการนี้เรียกว่า Cauchy - Schwarz inequality

<u>พิสูจน์</u> ถ้า X = 0 อสมการข้างต้นเป็นจริง

ถ้า X $\neq$ 0 ดังนั้น $\|X\| \neq 0$ ให้ $Z = Y - \frac{\langle X, Y\rangle}{\|X\|^2} X$

ดังนั้น

$$0 \leq \langle Z, Z\rangle = \left\langle Y - \frac{\langle X, Y\rangle}{\|X\|^2} X , Y - \frac{\langle X, Y\rangle}{\|X\|^2} X \right\rangle$$

$$= \langle Y, Y\rangle - \frac{\langle X, Y\rangle\langle X, Y\rangle}{\|X\|^2} - \frac{\langle X, Y\rangle\langle Y, X\rangle}{\|X\|^2} + \frac{\langle X, Y\rangle\langle X, Y\rangle}{\|X\|^2}$$

$$= \|Y\|^2 - \frac{\langle X, Y\rangle\langle Y, X\rangle}{\|X_2\|^2}$$

$$= \|Y\|^2 - \frac{\langle X, Y\rangle^2}{\|X\|^2}$$

$$\langle X, Y\rangle^2 \leq \|X\|^2 \, \|Y\|^2$$

$$|\langle X, Y\rangle| \leq \|X\| \, \|Y\|$$

<u>ตัวอย่าง 2.7.6</u> ให้ $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$ ε R^2

จาก Cauchy - Schwarz Inequality

ถ้าให้ $\langle X, Y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$ ดังนั้น

$$|(x_1y_1 + x_2y_2)| \leq \left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\left(\sqrt{y_1^2+y_2^2}\right)$$

ดังนั้น $(x_1y_1 + x_2y_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$

<u>ทฤษฎี 2.7.3</u> ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดัคท์สเปซ ถ้า $X, Y \in V$ จะได้ว่า

1. $\|X\| \geq 0$ และ $\|X\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $X = 0$
2. $\|kX\| = |k|\,\|X\|$

<u>พิสูจน์</u> 1. เพราะว่า $\|X\| = \sqrt{<X, X>} \geq 0$

ดังนั้น $\|X\| \geq 0$ และ $\|X\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $X = 0$

2. $\|kX\|^2 = < kX, kX > = k\bar{k} <X, X> = |k|^2 \|X\|^2$

ดังนั้น $\|kX\| = |k|\,\|X\|$

<u>นิยาม 2.7.3</u> ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดัคท์สเปซ ถ้า $X, Y \in V$ ที่ทำให้ $<X, Y> = 0$ แล้วเราจะกล่าวว่าเวกเตอร์ X ออร์ธอโกนอล (orthogonal) กับเวกเตอร์ Y

<u>นิยาม 2.7.4</u> ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดัคท์สเปซ และ W เป็นสับสเปซของ V ออร์ธอโกนอลคอมพลีเมนท์ (orthogonal complement) ของ W ซึ่งเขียนแทนด้วย $W^{\perp}$ คือ เซตของเวกเตอร์ใน V ที่ออร์ธอโกนอลกับทุก ๆ เวกเตอร์ใน W นั่นคือ

$$W^{\perp} = \{X \in V / <X, Y> = 0 \text{ สำหรับทุก ๆ } Y \in W\}$$

<u>ทฤษฎี 2.7.4</u> ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดัคท์สเปซ และ W เป็นสับสเปซของ V จะได้ว่า $W^{\perp}$ เป็นสับสเปซของ V

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า $W^{\perp} = \{X \in V / <X, Y> = 0$ สำหรับทุก ๆ $Y \in W\}$

ให้ $X, Y \in W^{\perp}$ และ $Z \in W$

พิจารณา $<X + Y, Z> = <X, Z> + <Y, Z> = 0 + 0 = 0$

ดังนั้น $X + Y \in W^{\perp}$

พิจารณา $<cX , Z> = c<X , Z> = c . 0 = 0$

ดังนั้น $cX \varepsilon W^{\perp}$

แสดงว่า $W^{\perp}$ เป็นสับสเปซของ V

<u>นิยาม 2.7.5</u> ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดักท์สเปซ แล้วมุม θ ที่อยู่ระหว่างเวกเตอร์ $X , Y \varepsilon V$ โดย $X , Y \neq 0$ ถูกกำหนดโดย

$$\cos \theta = \frac{<X , Y>}{\|X\| \, \|Y\|}$$

<u>นิยาม 2.7.6</u> ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดักท์สเปซ เซตของเวกเตอร์ $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$ ใน V จะเรียกว่า ออร์ธอโกนอลเซต ก็ต่อเมื่อ $<X_i , X_j> = 0$ สำหรับ $i \neq j$ และ $X_i , X_j \varepsilon X$ และเซตของเวกเตอร์ $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$ ใน V จะเรียกว่า ออร์ธอนอร์มอลเซต (orthonormal set) ก็ต่อเมื่อ X เป็นออร์ธอโกนอลเซต และ $\| X_i \| = 1$ นั่นคือ $<X_i , X_j> = 0$ เมื่อ $i \neq j$, $<X_i , X_j> = 1$ เมื่อ $i = j$

และออร์ธอโกนอลเซต สามารถทำให้เป็นออร์ธอนอร์มอลเซตได้ โดยการทำเวกเตอร์แต่ละเวกเตอร์ในออร์ธอโกนอลเซต ให้เป็นเวกเตอร์หน่วย

เช่น $S_1 = \{(1,2) , (2,-1)\}$ เป็นออร์ธอโกนอลเซต

ดังนั้น $S_2 = \{(\frac{1}{\sqrt{5}} , \frac{2}{\sqrt{5}}) , (\frac{2}{\sqrt{5}} , \frac{-1}{\sqrt{5}})\}$

เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต

<u>ตัวอย่าง 2.7.7</u> พิจารณาอินเนอร์โพรดักท์สเปซ R^3

โดย $S = \{E_1 = (1,0,0)\ ,\ E_2 = (0,1,0)\ ,\ E_3 = (0,0,1)\}$
เป็นฐานมาตรฐาน จะได้ว่าเซต S เป็นฐานที่เป็นออร์ธอโกนอลเซต
ทั้งนี้เพราะว่า

$$<E_1\,,\ E_2> \ = \ <E_1\,,\ E_3> \ = \ <E_2\,,\ E_3> \ = \ 0$$

และเซต S เป็นฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซตด้วย เนื่องจาก

$$<E_1\,,\ E_1> \ = \ <E_2\,,\ E_2> \ = \ <E_3\,,\ E_3> \ = \ 1$$

ในทำนองเดียวกัน ฐานมาตรฐานของ R^n ก็จะเป็นออร์ธอนอร์มอลเซต
ด้วย

<u>ตัวอย่าง 2.7.8</u> ให้ R^3 เป็นอินเนอร์โพรดักท์สเปซ และ

$$S = \{X_1 = (0,1,0)\ ,\ X_2 = (\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}),\ X_3 = (\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{-1}{\sqrt{2}})\}$$

จะได้ว่า S เป็น ออร์ธอนอร์มอลเซต

เพราะว่า $<X_1\,,\ X_2> \ = \ <X_1\,,\ X_3> = \ <X_2\,,\ X_3> \ = \ 0$

และ $X_1 = \sqrt{0+1+0} = 1$

$$X_2 = \sqrt{(\tfrac{1}{\sqrt{2}})^2 + 0 + (\tfrac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$$

$$X_3 = \sqrt{(\tfrac{1}{\sqrt{2}})^2 + 0 + (-\tfrac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$$

<u>ทฤษฎี 2.7.5</u> ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดักท์สเปซในมิติจำกัด n

และ $S = \{X_1\,,X_2\,,\ldots,X_n\}$ เป็นฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต
แล้ว $Y \in V$ จะได้ว่า

$$Y \ = \ <Y\,,\ X_1>X_1 + <Y\,,\ X_2>X_2 + \ldots + <Y\,,\ X_n>X_n$$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก $S = \{X_1, \ldots, X_n\}$ เป็นฐานของ V สำหรับ $Y \varepsilon V$ จะสามารถเขียนอยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น

นั่นคือ $Y = k_1X_1 + k_2X_2 + \ldots + k_nX_n$ ....(1)

ดังนั้น
$$\begin{aligned} \langle Y, X_i \rangle &= \langle k_1X_1 + k_2X_2 + \ldots + k_nX_n, X_i \rangle, \\ &\quad X_i \varepsilon S, \ i = 1, 2, \ldots, n \\ &= k_1 \langle X_1, X_i \rangle + k_2 \langle X_2, X_i \rangle + \ldots + \\ &\quad k_n \langle X_n, X_i \rangle \qquad \ldots.(2) \end{aligned}$$

เพราะว่า $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต

จะได้ว่า $\langle X_i, X_j \rangle = 0$ เมื่อ $i \neq j$

และ $\langle X_i, X_j \rangle = 1$ เมื่อ $i = j$

จาก (2) จะได้ว่า

$$\langle Y, X_i \rangle = k_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

แทนค่าใน (1)

ดังนั้น $Y = \langle Y, X_1 \rangle X_1 + \langle Y, X_2 \rangle X_2 + \ldots + \langle Y, X_n \rangle X_n$

<u>ตัวอย่าง 2.7.9</u> ให้ R^3 เป็นอินเนอร์โพรดัคท์สเปซ และ $S = \{X_1, X_2, X_3\}$ เป็นฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต โดย $X_1 = (0, 1, 0)$,

$X_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$, $X_3 = (\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})$

ให้เขียนเวกเตอร์ $Y = (1, 1, 1)$ อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ S

<u>วิธีทำ</u> เพราะว่า $<Y, X_1> = 0 + 1 + 0 = 1$

$$<Y, X_2> = -\frac{4}{5} + 0 + \frac{3}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$<Y, X_3> = \frac{3}{5} + 0 + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

จากทฤษฎี 2.7.5 จะได้ว่า

$$Y = X_1 - \frac{1}{5} X_2 + \frac{7}{5} X_3$$

หรือ $(1, 1, 1) = (0, 1, 0) - \frac{1}{5}(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}) + \frac{7}{5}(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})$

<u>ทฤษฎี 2.7.6</u> ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดักท์สเปซในมิติจำกัด และ $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต ของ V จะได้ว่า

1. $<a_1X_1 + \ldots + a_nX_n, b_1X_1 + \ldots + b_nX_n>$
$= a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$

2. สำหรับ $X, Y \in V$
$<X, Y> = <X, X_1><Y, X_1> + \ldots + <X, X_n><Y, X_n>$

<u>พิสูจน์</u> 1. เนื่องจาก $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซตของ V ดังนั้น $<X_i, X_j> = 0$, $i \neq j$ และ $<X_i, X_j> = 1$, $i = j$

พิจารณา

$$<a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n,$$
$$b_1X_1 + b_2X_2 + \ldots + b_nX_n>$$
$$= <a_1X_1, b_1X_1 + \ldots + b_nX_n> + \ldots +$$
$$<a_nX_n, b_1X_1 + \ldots + b_nX_n>$$

$= \{a_1b_1 <X_1 , X_1> + a_1b_2 <X_1 , X_2> + \dots + a_1b_n <X_1 , X_n>\} +$
$\dots + \{a_nb_1 <X_n , X_1> + a_nb_2 <X_n , X_2> + \dots +$
$a_nb_n <X_n , X_n>\}$

$= a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$

2. เนื่องจาก $S = \{X_1 , X_2 , \dots , X_n\}$ เป็นฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซตของ V

ดังนั้นสำหรับ $X , Y \in V$ จากทฤษฎี 2.7.5 จะได้ว่า

$X = <X , X_1> X_1 + <X , X_2> X_2 + \dots + <X , X_n> X_n$

$Y = <Y , X_1> X_1 + <Y , X_2> X_2 + \dots + <Y , X_n> X_n$

จาก (1)

$<X , Y> = <X , X_1><Y , X_1> + \dots + <X , X_n><Y, X_n>$

<u>ทฤษฎี 2.7.7</u> ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดักท์สเปซในมิติจำกัด และ $S = \{X_1 , X_2 , \dots, X_n\}$ เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต และ $X_i \neq 0$ จะได้ว่า S เป็นเชิงเส้นอิสระ

<u>พิสูจน์</u> ให้ $k_1X_1 + k_2X_2 + \dots + k_nX_n = 0$ ....(1)

ดังนั้น

$< k_1X_1 + k_2X_2 + \dots + k_nX_n , X_i > = <0 , X_i> = 0$

$k_1 < X_1 , X_i > + k_2 < X_2 , X_i > + \dots + k_n <X_n, X_i> = 0$ ....(2)

เนื่องจาก $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต

จะได้ว่า $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ เมื่อ $i \neq j$

และ $\langle x_i, x_i \rangle = 1$ เมื่อ $i = j$

จาก (2) จะได้ว่า

$$k_i \langle x_i, x_i \rangle = 0$$

เนื่องจาก $x_i \neq 0$ ดังนั้น $\langle x_i, x_i \rangle \neq 0$ จะได้ว่า $k_i = 0$

นั่นคือ $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$

ดังนั้น $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ เป็นเชิงเส้นอิสระ

<u>หมายเหตุ</u> จากตัวอย่าง 2.7.7

$$S = \{x_1 = (0, 1, 0),\ x_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$
$$x_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\}$$

เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต จากทฤษฎี 2.7.7 จะได้ว่า S เป็นเชิงเส้นอิสระ

<u>ทฤษฎี 2.7.8</u> ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดักท์สเปซในมิติจำกัด

และ $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต

ให้ $x \in V$ และ

$$y = x - \langle x, x_1 \rangle x_1 - \langle x, x_2 \rangle x_2 \ldots \langle x, x_n \rangle x_n$$

แล้ว y จะออร์ธอโกนอลแต่ละเวกเตอร์ x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก $Y = X - <X, X_1> X_1 - <X, X_2> X_2 \ldots - <X, X_n> X_n$

ดังนั้น

$<Y, X_1> = <X, X_1> - <X, X_1><X_1, X_1> \ldots - <X, X_n><X_1, X_n>$

เพราะว่า $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต

จะได้ว่า $<X_i, X_j> = 0$ เมื่อ $i \neq j$

และ $<X_i, X_j> = 1$ เมื่อ $i = j$

เพราะฉะนั้น

$<Y, X_1> = <X, X_1> - <X, X_1> \ldots <X, X_n> = 0$

จะได้ว่า Y ออร์ธอโกนอล X_1 ในทำนองเดียวกันสำหรับ

$i = 1, 2, \ldots, n$ $\quad <Y, X_i> = 0$

แสดงว่า Y จะออร์ธอโกนอลแต่ละเวกเตอร์ X_i เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$

<u>ทฤษฎี 2.7.9</u> ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซมิติ n และให้

$S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นเชิงเส้นอิสระ โดย $X_i \neq 0$,

$i = 1, 2, \ldots, n$ ดังนั้นจะมี $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ เป็น

ฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต (Gram - Schmidt Orthonormalize)

<u>พิสูจน์</u> ให้ $Y_1 = \dfrac{X_1}{\|X_1\|}$ ดังนั้น $\|Y_1\| = 1$

ให้ $Z_2 = X_2 - <X_2, Y_1> Y_1$ และ $Y_2 = \dfrac{Z_2}{\|Z_2\|}$

จากทฤษฎี 2.7.8 จะได้ว่า Z_2 ออร์ธอโกนอล Y_1

ดังนั้น $\{Y_1, Y_2\}$ เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต

ให้ $Z_3 = X_3 - <X_3, Y_1> Y_1 - <X_3, Y_2> Y_2$

และ $Y_3 = \dfrac{Z_3}{\|Z_3\|}$

จากทฤษฎี 2.7.8 จะได้ว่า Z_3 ออร์ธอโกนอล Y_1 และ Y_2

ดังนั้น $\{Y_1 , Y_2 , Y_3\}$ เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_i\}$ เป็นออร์ธอนอร์-มอลเซต และให้

$$Z_{i+1} = X_{i+1} - \langle X_{i+1}, Y_1 \rangle Y_1 \cdots \langle X_{i+1}, Y_i \rangle Y_i$$

และ $$Y_{i+1} = \frac{Z_{i+1}}{\| Z_{i+1} \|}$$

ดังนั้นจะได้ว่า Z_{i+1} ออร์ธอโกนอล $Y_1 , Y_2 , \dots , Y_i$

ดังนั้น $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_{i+1}\}$ เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต

นั่นคือ $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต

จากทฤษฎี 2.7.7 $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ เป็นเชิงเส้นอิสระ

ฉะนั้น $\{Y_1 , Y_2 , \dots , Y_n\}$ เป็นฐานของ V

<u>ตัวอย่าง 2.7.10</u> ให้ R^3 เป็นอินเนอร์โพรดักท์สเปซที่มีอินเนอร์โพรดักท์มาตรฐาน

กำหนดฐาน $S = \{X_1 = (1, 1, 1), X_2 = (0, 1, 1), X_3 = (0, 0, 0)\}$ ให้เปลี่ยนเป็นฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต

<u>วิธีทำ</u> ใช้ Gram-Schmidt process เพราะว่า $\{X_1 , X_2 , X_3\}$ เป็นเชิงเส้นอิสระ

ให้ $$Y_1 = \frac{X_1}{\| X_1 \|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

ให้ $$\begin{aligned} Z_2 &= X_2 - \langle X_2 , Y_1 \rangle Y_1 \\ &= (0,1,1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ &= \left(-\frac{2}{3} , \frac{1}{3} , \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

ฉะนั้น $Y_2 = \dfrac{Z_2}{\|Z_2\|} = \dfrac{3}{\sqrt{6}}\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$

$= \left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$

ให้ $Z_3 = X_3 - \langle X_3, Y_1\rangle Y_1 - \langle X_3, Y_2\rangle Y_2$

$= (0,0,1) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$= \left(0, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

ฉะนั้น $Y_3 = \dfrac{Z_3}{\|Z_3\|} = \sqrt{2}\left(0, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = \left(0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ดังนั้น $S = \{Y_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), Y_2 = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right),$

$Y_3 = \left(0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\}$

เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต และจะได้ว่า $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ เป็นเชิงเส้นอิสระ และจะเป็นฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต

<u>ทฤษฎี 2.7.10</u> ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดัคท์สเปซในมิติจำกัด และ W เป็นสับสเปซของ V แล้วจะมีฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซตของ W

<u>พิสูจน์</u> ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซมิติ n เนื่องจาก W เป็นสับสเปซของ V

ให้ $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ เป็นฐานของ W

เพราะว่า $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ เป็นเชิงเส้นอิสระ

ให้ $Y_1 = \dfrac{X_1}{\|X_1\|}$ ดังนั้น $\|Y_1\| = 1$

ให้ $Z_2 = X_2 - \langle X_2, Y_1\rangle Y_1$ และ $Y_2 = \dfrac{Z_2}{\|Z_2\|}$

จากทฤษฎี 2.7.8 จะได้ว่า Z_2 ออร์ธอโกนอล Y_1

ดังนั้น $\{Y_1, Y_2\}$ เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต

ให้ $Z_3 = X_3 - \langle X_3, Y_1\rangle Y_1 - \langle X_3, Y_2\rangle Y_2$

และ $Y_3 = \dfrac{Z_3}{\| Z_3 \|}$ จากทฤษฎี 2.7.8 จะได้ว่า Z_3 ออร์ธอโกนอล Y_1, Y_2 ดังนั้น $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $\{Y_1, \ldots, Y_i\}$ เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต และให้

$$Z_{i+1} = X_{i+1} - \langle X_{i+1}, Y_1\rangle Y_1 \ldots - \langle X_{i+1}, Y_i\rangle Y_i$$

และ $Y_{i+1} = \dfrac{Z_{i+1}}{\| Z_{i+1} \|}$

ดังนั้นจะได้ว่า Y_{i+1} ออร์ธอโกนอล $Y_1, Y_2, \ldots, Y_i$ และ $\{Y_1, \ldots, Y_{i+1}\}$ เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต

นั่นคือ $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$ เป็นออร์ธอนอร์มอลเซตจากทฤษฎี 2.7.7 $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$ เป็นเชิงเส้นอิสระ เพราะฉะนั้น $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$ เป็นฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซตของ W

<u>ทฤษฎี 2.7.11</u> ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดัคท์สเปซในมิติจำกัด และ W เป็นสับสเปซของ V แล้ว $V = W \oplus W^{\perp}$

<u>พิสูจน์</u> จะแสดงว่าทุก ๆ เวกเตอร์ X ใน V สามารถเขียนเป็นผลรวมของ Y และ Z โดย Y อยู่ใน W และ Z อยู่ใน $W^{\perp}$ เพราะว่า W เป็นสับสเปซของ V จะมีเซต $\{E_1, E_2, \ldots, E_r\}$ เป็นฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซตของ W ให้ $X \in V$ และให้

$$Y = \langle E_1, X\rangle E_1 + \langle E_2, X\rangle E_2 + \ldots + \langle E_r, X\rangle E_r$$

ให้ $Z = X - Y$

ดังนั้น $X = Y + Z$ และ Y อยู่ใน W เนื่องจาก Y สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของ $E_1, E_2, \ldots, E_r$ ได้ ต่อไปจะแสดงว่า Z อยู่ใน $W^{\perp}$ เนื่องจาก

$$Z = X - Y = X - \langle E_1, X\rangle E_1 - \langle E_2, X\rangle E_2 \ldots \langle E_r, X\rangle E_r$$

ดังนั้น
$$\langle Z, E_i\rangle = \langle X, E_i\rangle - \langle E_1, X\rangle\langle E_1, E_i\rangle \ldots$$
$$-\langle E_i, X_i\rangle\langle E_i, E_i\rangle \ldots - \langle E_r, X\rangle\langle E_r, E_i\rangle$$

เนื่องจาก $\{E_1, E_2, \ldots, E_r\}$ เป็นฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต จะได้ว่า

$\langle E_i, E_j\rangle = 0,\ i \neq j$ และ $\langle E_i, E_j\rangle = 1,\ i = j$

เพราะฉะนั้น $\langle Z, E_i\rangle = \langle X, E_i\rangle - \langle E_i, X\rangle = 0,$

$$i = 1, 2, \ldots, r$$

ให้ $E \in W$ ดังนั้น

$$E = k_1E_1 + k_2E_2 + \ldots + k_rE_r$$

ดังนั้น
$$\langle Z, E\rangle = k_1\langle Z, E_1\rangle + k_2\langle Z_2E_2\rangle + \ldots + k_r\langle Z, E_r\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{r} k_i(Z, E_i) = \Sigma k_i \cdot 0 = 0$$

ดังนั้น Z อยู่ใน $W^{\perp}$ นั่นคือ $V = W + W^{\perp}$

ต่อไปจะแสดงว่า $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ ให้ $D \in W \cap W^{\perp}$

ดังนั้น $\langle D, D\rangle = 0$ จะได้ว่า $D = 0$ เพราะฉะนั้น $W \cap W^{\perp} = \{0\}$

จะสรุปได้ว่า $V = W \oplus W^{\perp}$