บทที่ 3
ทฤษฎีสเปกตรัล

เนื่องจากเราได้ศึกษาการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นจากเวกเตอร์สเปซหนึ่งไปยังเวกเตอร์สเปซหนึ่ง ต่อไปเราจะศึกษาการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นจากเวกเตอร์สเปซที่เป็นอินเนอร์โพรดักท์สเปซไปยังเวกเตอร์สเปซที่เป็นอินเนอร์โพรดักท์สเปซ

3.1 การเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นแบบแอดจอยท์

ในหัวข้อนี้จะศึกษาการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น $T : V \to V$ ที่เป็นแอดจอยท์ ก่อนอื่นเราจะศึกษาฟังก์ชันเชิงเส้น (linear functional) ดังจะศึกษาต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 3.1.1</u> ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดักท์สเปซ ให้ $Y \in V$ และกำหนดฟังก์ชัน

$T_Y : V \to R$ โดย $T_Y(X) = \langle X, Y\rangle$ สำหรับทุก ๆ $X \in V$

แล้วจะได้ว่าฟังก์ชัน T_Y เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น

<u>พิสูจน์</u> ให้ $X_1, X_2 \in V$ และ c เป็นสกาลาร์

จะได้ว่า $T_Y(X_1 + X_1) = \langle X_1 + X_2, Y\rangle$

$$= \langle X_1, Y\rangle + \langle X_2, Y\rangle$$

$$= T_Y(X_1) + T_Y(X_2)$$

และ $T_Y(c X_1) = \langle cX_1, Y\rangle$

$$= c\langle X_1, Y\rangle = cT_Y(X_1)$$

ดังนั้นจะได้ T_Y เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น และ T_Y นี้จะเรียกว่าฟังก์ชันเชิงเส้น

ทฤษฎี 3.1.2 ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดัคท์สเปซในมิติจำกัด และ $T : V \to R$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น แล้วจะมีเวกเตอร์ Y อยู่ใน V เพียงเวกเตอร์เดียวเท่านั้น ที่ทำให้ $T(X) = \langle X, Y\rangle$ สำหรับทุก ๆ X ใน V

พิสูจน์ ให้ $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซตของ V

ให้ $Y = T(X_1)X_1 + T(X_2)X_2 + \ldots + T(X_n)X_n$

เนื่องจาก T เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น เมื่อกำหนดให้ $T_Y(X) = \langle X, Y\rangle$

สำหรับทุก ๆ $X \in V$ ดังนั้นสำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$

$$
\begin{aligned}
T_Y(X_i) &= \langle X_i, Y\rangle \\
&= \langle X_i, T(X_1)X_1 + T(X_2)X_2 + \ldots + T(X_n)X_n\rangle \\
&= T(X_1)\langle X_i, X_1\rangle + T(X_2)\langle X_i, X_2\rangle + \ldots \\
&\quad \ldots + T(X_i)\langle X_i, X_i\rangle + \ldots + T(X_n)\langle X_i, X_n\rangle
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ เป็นฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซตของ V

ดังนั้น $\langle X_i, X_j\rangle = 0,\ i \neq j$ และ $\langle X_i, X_j\rangle = 1$ เมื่อ $i = j$

จะได้ $T_Y(X_i) = T(X_i)$

นั่นคือ $T(X) = \langle X, Y\rangle$

สมมติให้ Z เป็นเวกเตอร์อีกตัวหนึ่งใน V ที่ทำให้ $T(X) = \langle X, Z\rangle$

สำหรับทุก ๆ $X \in V$

ฉะนั้น $\langle X, Y\rangle = \langle X, Z\rangle$ หรือ $\langle X, Y - Z\rangle = 0$ สำหรับทุก ๆ $X \in V$

ให้ $x = y - z$ จะได้ $<y-z, y-z> = 0$

เพราะว่า V เป็นอินเนอร์โพรดัคท์สเปซ ทำให้ $y-z = 0$ หรือ $y = z$

ดังนั้นจะมีเวกเตอร์ y ใน V เพียงเวกเตอร์เดียวเท่านั้น ที่ทำให้

$T(x) = <x,y>$ สำหรับทุก ๆ x ใน V

<u>ทฤษฎี 3.1.3</u> ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซในมิติจำกัด และ $T : V \to V$ เป็นเอนโดมอร์ฟิซึม แล้วจะมี เอนโดมอร์ฟิซึม T^* เพียงแบบเดียวเท่านั้น ที่ทำให้ $<T(x),y> = <x, T^*(y)>$ สำหรับทุก ๆ x,y ใน V

<u>พิสูจน์</u> ให้ $y \in V$ และกำหนด $T_y : V \to R$ โดย $T_y(x) = <T(x),y>$ จะได้ฟังก์ชันนี้เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น ทั้งนี้เพราะว่า ถ้าให้ $x_1, x_2 \in V$ และ c เป็นสกาลาร์

พิจารณา
$$\begin{aligned} T_y(x_1 + x_2) &= <T(x_1 + x_2),y> \\ &= <T(x_1) + T(x_2),y> \\ &= <T(x_1),y> + <T(x_2),y> \\ &= T_y(x_1) + T_y(x_2) \end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned} T_y(c\,x_1) &= <T(c\,x_1),y> = <cT(x_1),y> \\ &= c<T(x_1),y> = cT_y(x_1) \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ว่า T_y เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น

จากทฤษฎี 3.1.2 จะมีสมาชิก z เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้

$T_y(x) = <x,z>$

ดังนั้นจะได้ $\langle T(X),Y\rangle = \langle X,Z\rangle$ สำหรับทุก ๆ $X \in V$

กำหนด $T^* : V \longrightarrow V$ โดย $T^*(Y) = Z$

จะได้ว่า $\langle T(X),Y\rangle = \langle X, T^*(Y)\rangle$ สำหรับทุก ๆ $X,Y \in V$

ต่อไปจะแสดงว่า T^* เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น

ให้ $X,Y_1,Y_2 \in V$ และ c เป็นสกาลาร์

$$
\begin{aligned}
\langle X,T^*(Y_1 + Y_2)\rangle &= \langle T(X), Y_1 + Y_2\rangle \\
&= \langle T(X),Y_1\rangle + \langle T(X), Y_2\rangle \\
&= \langle X,T^*(Y_1)\rangle + \langle X, T^*(Y_2)\rangle \\
&= \langle X, T^*(Y_1) + T^*(Y_2)\rangle
\end{aligned}
$$

จากทฤษฎี 3.1.2 จะได้ว่า

$$T^*(Y_1 + Y_2) = T^*(Y_1) + T^*(Y_2)$$

พิจารณา $\langle X,T^*(cY_1)\rangle = \langle T(X), cY_1\rangle = c\langle T(X), Y_1\rangle$

$$= c\langle X, T^*(Y_1)\rangle = \langle X, cT^*(Y_1)\rangle$$

จากทฤษฎี 3.1.2 จะได้ว่า

$$T^*(cY_1) = cT^*(Y_1)$$

ดังนั้น T เป็นเอนโดมอร์ฟิซึม ที่ทำให้ $\langle T(X),Y\rangle = \langle X,T^*(Y)\rangle$

และ เอนโดมอร์ฟิซึม T^* มีเพียงแบบเดียวเท่านั้น เพราะว่า

สำหรับ $y \varepsilon V$ แล้ว $T^{*}(y)$ ถูกกำหนดได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น โดย เวกเตอร์ z ที่ทำให้ $<T(x),y> = <x,z>$

นิยาม 3.1.1 ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดัคท์สเปซในมิติจำกัด และ $T : V \dashrightarrow V$ เป็น เอนโดมอร์ฟิซึมบน V จะเรียก เอนโดมอร์ฟิซึม $T^{*} : V \dashrightarrow V$ ที่ทำให้ $<T(x),y> = <x, T^{*}(y)>$ สำหรับทุก ๆ $x,y \varepsilon V$ ว่าแอดจอยท์ (adjont) ของ T

ต่อไปจะกล่าวถึงคุณสมบัติการเปลี่ยนแปลงแบบแอดจอยท์ (adjont transformation)

ทฤษฎี 3.1.4 ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดัคท์สเปซในมิติจำกัด ให้ $S : V \dashrightarrow V$ และ $T : V \dashrightarrow V$ เป็นเอนโดมอร์ฟิซึมบน V จะได้ว่า

(ก) $(S + T)^{*} = S^{*} + T^{*}$

(ข) $(kT)^{*} = kT^{*}$

(ค) $(ST)^{*} = T^{*}S^{*}$

(ง) $(T^{*})^{*} = T$

พิสูจน์ (ก) ให้ $x,y \varepsilon V$ พิจารณา

$<(S + T)(x),y>$

$= <S(x) + T(x),y>$ S,T เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น

$= <S(x),y> + <T(x),y>$ คุณสมบัติของอินเนอร์โพรดัคท์

$= \langle X, S^*(Y)\rangle + \langle X, T^*(Y)\rangle$ คุณสมบัติของการเปลี่ยนแปลงแบบแอดจอยท์

$= \langle X, S^*(Y) + T^*(Y)\rangle$

$= \langle X, (S^* + T^*)(Y)\rangle$ S^*, T^* เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น .....(1)

เพราะว่า $\langle (S+T)(X), Y\rangle = \langle X, (S+T)^*(Y)\rangle$ จากนิยาม 3.1.1 ...(2)

จากทฤษฎี 3.1.3 การเปลี่ยนแปลงแบบแอดจอยท์มีเพียงแบบเดียวเท่านั้น

จาก(1) และ (2) จะได้ว่า

$$(S + T)^* = S^* + T^*$$

(ข) ให้ $X, Y \in V$ และ k มีสกาลาร์

$\langle (kT)(X), Y\rangle$

$= \langle kT(X), Y\rangle$ T เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น

$= k\langle T(X), Y\rangle$ คุณสมบัติอินเนอร์โพรดัคท์

$= k\langle X, T^*(Y)\rangle$

$= \langle X, kT^*(Y)\rangle$

ดังนั้น $\langle (kT)(X), Y\rangle = \langle X, kT^*(Y)\rangle$ ....(1)

เนื่องจาก $\langle (kT)(X), Y\rangle = \langle X, (kT)^*(Y)\rangle$ ....(2)

จากทฤษฎี 3.1.3 การเปลี่ยนแปลงแบบแอดจอยท์มีเพียงแบบเดียวเท่านั้น

จาก(1) และ(2) จะได้ว่า

$$(kT)^* = kT^*$$

(ค) ให้ $X, Y \in V$

$< (ST)(X), Y>$

$= <S(T(X)), Y>$ คุณสมบัติของคอมโพสิทฟังก์ชัน

$= <T(X), S^*(Y)>$ คุณสมบัติการเปลี่ยนแปลงแบบแอดจอยท์

$= <X, T^*(S^*(Y))>$ คุณสมบัติการเปลี่ยนแปลงแบบแอดจอยท์

$= <X, T^*S^*(Y)>$ คุณสมบัติของคอมโพสิทฟังก์ชัน

ดังนั้น $<(ST)(X), Y> = <X, T^*S^*(Y)>$ ....(1)

เพราะว่า $<(ST)(X), Y> = <X, (ST)^*(Y)>$ ....(2)

จากทฤษฎี 3.1.3 การเปลี่ยนแปลงแบบแอดจอยท์มีเพียงแบบเดียวเท่านั้น

จาก(1) และ (2) จะได้ว่า

$$(ST)^* = T^*S^*$$

(ง) ให้ $X, Y \in V$

$< T^*(X), Y>$

$= <Y, T^*(X)>$ คุณสมบัติอินเนอร์โพรดักท์

$= <T(Y), X>$ คุณสมบัติการเปลี่ยนแปลงแบบแอดจอยท์

$= <X, T(Y)>$ คุณสมบัติอินเนอร์โพรดักท์

ดังนั้น $<T^*(X), Y> = <X, T(Y)>$

เพราะว่า $<T^*(X), Y> = <X, (T^*)^*(Y)>$ $\because T^* : V \longrightarrow V$

จะได้ว่า $(T^*)^* = T$

<u>ตัวอย่าง 3.1.1</u> ให้ $T : R^2 \to R^2$ เป็นเอนโดมอร์ฟิซึม กำหนดโดย

$$T(x,y) = (x + 3y,\ 3x + y)$$

ให้หา $T^* = R^2 \to R^2$

<u>วิธีทำ</u> จากนิยาม 3.1.1 จะได้ว่า

$$<(x,y),\ T^*(u,v)> = <T(x,y),(u,v)>$$

สำหรับทุก ๆ $(x,y),\ (u,v)$ ใน R^2

พิจารณา $<(x,y),T^*(u,v)> = <T(x,y),(u,v)>$

$$= <(x+3y,\ 3x+y),(u,v)>$$

$$= xu + 3yu + 3xv + yv$$

$$= x(u + 3v) + y(3u + v)$$

$$= <(x,y),\ (u + 3v,\ 3u + v)>$$

ดังนั้น $T^*(u,v) = (u + 3v,\ 3u + v)$

หรือ $T^*(x,y) = (x + 3y, 3x+y)$ ในกรณีนี้ $T^* = T$

<u>ตัวอย่าง 3.1.2</u> ให้ $T : R^2 \to R^2$ เป็นเอนโดมอร์ฟิซึม กำหนดโดย

$T(x,y) = (x+2y,\ 5x+y)$ ให้หา $T^* : R^2 \to R^2$

<u>วิธีทำ</u> จากนิยาม 3.1.1 จะได้ว่า

$$<(x,y),\ T^*(u,v)> = <T(x,y),(u,v)>$$

สำหรับทุก ๆ $(x,y),(u,v)$ ใน R^2

พิจารณา

$$<(x,y),T^{*}(u,v)> = <T(x,y),(u,v)>$$

$$= <(x+2y,\ 5x+y),\ (u,v)>$$

$$= xu + 2yu + 5xv + yv$$

$$= x(u + 5v) + y(2u + v)$$

$$= <(x,y),\ (u + 5v,\ 2u + v)>$$

ดังนั้น $T^{*}(u,v) = (u + 5v,\ 2u+v)$

หรือ $T^{*}(x,y) = (x + 5y,\ 2x + y)$

ในกรณีนี้ $T \neq T^{*}$

<u>ตัวอย่าง 3.1.4</u> ให้ $T : R^2 \to R^2$ และ $S : R^2 \to R^2$ กำหนดโดย

$$T(x,y) = (x+2y,\ 2x+y),\ S(x,y) = (x+3y,\ 3x+y)$$

$$T^{*}(x,y) = (x+2y,\ 2x+y),\ S^{*}(x,y) = (x+3y,\ 3x+y)$$

ให้แสดงว่า $(S+T)^{*} = S^{*} + T^{*}$, $(ST)^{*} = T^{*}S^{*}$

<u>วิธีทำ</u> 1. $(S+T)(x,y) = (2x+5y,\ 5x+2y) = (S^{*} + T^{*})(x,y)$ ...(1)

เพราะว่า $< (x,y),\ (S+T)^{*}(u,v)>$

$$= <(S+T)(x,y),\ (u,v)>$$

$$= 2xu + 5yx + 5xv + 2yv$$

$$= x(2u + 5v) + y(5u + 2v)$$

$$= <(x,y),\ (2u + 5v,\ 5u + 2v)>$$

จะได้ว่า

$$(S+T)^{*}(u,v) = (2u + 5v,\ 5u + 2v)$$

หรือ $(S+T)^{*}(x,y) = (2x + 5y,\ 5x + 2y)$ ....(2)

จาก(1) และ (2) จะได้ว่า

$$(S + T)^{*} = S^{*} + T^{*}$$

2. $(TS)(x,y) = T(S(x,y)) = T(x+3y,\ 3x+y)$

$= (x+3y + 2(3x+y),\ 2(x+3y) + 3x+y)$

$= (7x + 5y,\ 5x + 7y)$

$= (T^{*}S^{*})(x,y)$ ....(1)

$(ST)(x,y) = S(x+2y,\ 2x+y)$

$= (x+2y+3(2x+y),\ 3(x+2y)+(x+y))$

$= (7x+5y,\ 5x+7y) = (ST)(x,y)$

$= (S^{*}T^{*})(x,y)$

พิจารณา

$<(x,y),(ST)^{*}(u,v)> = <(ST)(x,y),(u,v)>$

$= <(7x+5y,\ 5x+7y),\ (u,v)>$

$= 7xu + 5yu + 5xv + 7yv$

$= x(7u+5v) + y(5u+7v)$

$= <(x,y),\ (7u+5v,\ 5u+7v)>$

จะได้ว่า $(ST)^{*}(u,v) = (7u+5v,\ 5u+7v)$

หรือ $(ST)^{*}(x,y) = (7x+5y,\ 5x+7y)$ ....(2)

จาก (1) และ (2) จะได้

$$(ST)^{*} = T^{*}S^{*}$$

3.2 การเปลี่ยนแปลงแบบ self-adjont และทฤษฎีสเปคตรัล

จากการศึกษาที่ผ่านมาเมื่อกำหนด **เอนโดมอร์ฟิซึม** T เราสามารถหาการเปลี่ยนแปลงแบบแอดจอยท์ได้ นั่นคือหา T^* ได้ ในกรณีที่ $T = T^*$ จะนิยามได้ดังต่อไปนี้

<u>นิยาม 3.2.1</u> ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดัคท์สเปซในมิติจำกัด เอนโดมอร์ฟิซึม $T : V \dashrightarrow V$ จะเรียกว่า self-adjont ก็ต่อเมื่อ $T = T^*$

จากตัวอย่าง 3.1.1 $T = T^*$ ดังนั้น $T : V \dashrightarrow V$ เป็นการเปลี่ยนแปลงแบบ self-adjont

<u>ทฤษฎี 3.2.1</u> ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดัคท์สเปซในมิติจำกัด ให้ $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ เป็นฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซตของ V และ $T : V \dashrightarrow V$ เป็น **เอนโดมอร์ฟิซึม** ให้ A เป็นเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน S แล้ว $A = (a_{ij})$ โดย $a_{ij} = \langle T(x_j), x_i\rangle \quad i,j = 1,2,\dots,n$

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เป็นฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซตของ V

จากทฤษฎี 2.7.7 สำหรับ $x \in V$ จะได้ว่า

$$x = \langle x, x_1\rangle x_1 + \langle x, x_2\rangle x_2 + \dots + \langle x, x_n\rangle x_n = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle x_i$$

ดังนั้น

$$T(x_1) = \langle T(x_1), x_1\rangle x_1 + \langle T(x_1), x_2\rangle x_2 + \dots + \langle T(x_1), x_n\rangle x_n$$

$$T(x_2) = \langle T(x_2), x_1\rangle x_1 + \langle T(x_2), x_2\rangle x_2 + \dots + \langle T(x_2), x_n\rangle x_n$$

$$\vdots$$

$$T(x_n) = \langle T(x_n), x_1\rangle x_1 + \langle T(x_n), x_2\rangle x_2 + \dots + \langle T(x_n), x_n\rangle x_n$$

นั่นคือ $T(x_j) = \sum_{i=1}^{n} <T(x_j),x_i>x_i \quad j = 1,2,\ldots,n$

เนื่องจาก A เป็นเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน S ให้ $A = (a_{ij})$

ดังนั้น ij เอนทรีของ A คือ $a_{ij} = <T(x_j),x_i>$

<u>ทฤษฎี 3.2.2</u> ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดักท์สเปซในมิติจำกัด และ $S = \{x_1,\ldots,x_n\}$ เป็นฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซตของ V และ $T : V \longrightarrow V$ เป็นเอนโดมอร์ฟิซึม ให้ A เป็นเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน S และ B เป็นเมตริกซ์ของแอดจอยท์ T^* ที่สอดคล้องกับฐาน S แล้ว $B = A^T$

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า $S = \{x_1,\ldots,x_n\}$ เป็นฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซตของ V A เป็นเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน S และ B เป็นเมตริกซ์ของ T^* ที่สอดคล้องกับฐาน S ให้ $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$

จากทฤษฎี 3.1.1 จะได้ว่า

$$a_{ij} = <T(x_j), x_i>$$
$$b_{ij} = <T^*(x_j), x_i>$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} b_{ij} &= <T^*(x_j), x_i> \\ &= <x_i, T^*(x_j)> \quad \text{คุณสมบัติอินเนอร์โพรดักท์} \\ &= <T(x_i), x_j> \\ &= a_{ji} \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ว่า $B = A^T$

<u>ทฤษฎี 3.2.3</u> ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซในมิติจำกัด และ $T : V \dashrightarrow V$ เป็นการเปลี่ยนแปลงแบบ self-adjont และถ้า $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ เป็นฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซตแล้วเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน S เป็นเมตริกซ์สมมาตร

<u>พิสูจน์</u> ให้ A เป็นเมตริกซ์ของ T, และ B เป็นเมตริกซ์ของ T^* ที่สอดคล้องกับฐาน S จากทฤษฎี 3.2.2 จะได้ว่า $B = A^T$

เนื่องจาก T เป็น self-adjont จะได้ว่า $T = T^*$

เพราะฉะนั้น $A = B$ จะได้ว่า $A = B = A^T$

ดังนั้นเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน S เป็นเมตริกซ์สมมาตร

<u>ตัวอย่าง 3.2.1</u> ให้ $T : R^2 \dashrightarrow R^2$ กำหนดให้ $T(x,y) = (x+3y, 3x+y)$

จากตัวอย่าง 3.1.1 ได้ $T^*(x,y) = (x + 3y, 3x + y)$

ดังนั้น $T = T^*$ ซึ่งเป็นการเปลี่ยนแปลงแบบ self-adjont

ให้ A เป็นเมตริกซ์ที่สอดคล้องกับฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต จะได้

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

และ $$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$ นั่นคือ $A = A^T$

จะได้ว่า A เป็นเมตริกซ์สมมาตร

<u>ทฤษฎี 3.2.4</u> ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดักท์สเปซในมิติจำกัด และ $T : V \to V$ เป็น เอนโดมอร์ฟิซึม ให้ $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ เป็นฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซตของ V ถ้าเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน S เป็นเมตริกซ์สมมาตรแล้ว T เป็น self-adjont

<u>พิสูจน์</u> ให้ A เป็นเมตริกซ์ของ T ที่สัมพันธ์กับฐาน S

ให้ $x, y \in V$ จะได้ว่า

$$x = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

ให้ $A = (a_{ij})$

จากทฤษฎี 3.2.1

$$T(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(x_j), x_i\rangle x_i \text{ และ } a_{ij} = \langle T(x_j), x_i\rangle$$

จะได้

$$\begin{aligned} T(x) &= b_1T(x_1) + b_2T(x_2) + \ldots + b_nT(x_n) \\ &= b_1 \sum_{i=1}^{n} \langle T(x_1), x_i\rangle x_i + b_2 \sum_{i=1}^{n} \langle T(x_2), x_i\rangle x_i + \ldots \\ &\quad + \ldots + b_n \sum_{i=1}^{n} \langle T(x_n), x_i\rangle x_i \\ &= \sum_{i,j} \langle T(x_j), x_i\rangle b_jx_i \end{aligned}$$

นั่นคือ $T(x) = \sum_{i,j} a_{ij}b_jx_i$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$T(Y) = \sum_{i,j} a_{ij} c_j X_i$$

จากทฤษฎี 2.7.8 $<T(X),Y> = \sum_{i,j} a_{ij} b_j c_i = \sum_{i,j} a_{ji} b_i c_j$

เพราะว่า A เป็นเมตริกซ์สมมาตร และ $i,j = 1,2,\ldots,n$ สามารถใช้แทนกันได้

และ $< X,T(Y)> = \sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j = \sum_{i,j} a_{ij} b_i c_j$

เพราะว่า A เป็นเมตริกซ์สมมาตร ดังนั้น $a_{ij} = a_{ji}$ จะได้ว่า

$<T(X),Y> = <X,T(Y)>$ สำหรับทุก ๆ X,Y ใน V ..(1)

จากนิยามของ T^* จะได้ว่า

$<T(Y),X> = <Y,T^*(X)>$ สำหรับทุก ๆ X,Y ใน V ......(2)

พิจารณา $< Y,T(X)> = <T(X),Y>$ V เป็นอินเนอร์โพรดัคท์สเปซ

$= <X,T(Y)>$ จาก (1)

$= <T(Y),X>$ V เป็นอินเนอร์โพรดัคท์สเปซ

$= <Y, T^*(X)>$ นิยามของ T^*

จะได้ว่า $<Y, T(X)> = <Y,T^*(X)>$ สำหรับทุก ๆ X,Y ใน V

ซึ่งสามารถเขียนในรูป

$<Y, T(X)-T^*(X)> = 0$ สำหรับทุก ๆ X,Y ใน V

ให้ $y = T(x) - T^*(x)$ แทนค่าจะได้ว่า

$$\langle T(x)-T^*(x), T(x)-T^*(x)\rangle = 0$$ สำหรับทุก ๆ x ใน V

เพราะว่า V เป็นอินเนอร์โพรดักท์สเปซ

$$T(x) - T^*(x) = 0$$

หรือ $T(x) = T^*(x)$ สำหรับทุก ๆ x ใน V

จะได้ว่า $T = T^*$ ดังนั้น T เป็น self-adjont

<u>ตัวอย่าง 3.2.2</u> ให้ $T : R^3 \longrightarrow R^3$ กำหนดให้

$$T(x,y,z) = (x, 2y-z, x-y+3z)$$

จงหาเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐานมาตรฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $T(1,0,0) = (1,0,0)$

$T(0,1,0) = (0,2,-1)$

$T(0,0,1) = (0,-1,3)$

ให้ A เป็นเมตริกซ์ของ T

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

เพราะว่า $A = A^T$ ดังนั้น T เป็น self-adjont

<u>ตัวอย่าง 3.2.3</u> ให้ $T : R^3 \dashrightarrow R^3$ กำหนดให้

$$T(x,y,z) = (x-y,\ 2y-z,\ x-y+3z)$$

จงหาเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐานมาตรฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $T(1,0,0) = (1,0,1)$

$T(0,1,0) = (0,2,-1)$

$T(0,0,1) = (0,-1,3)$

ให้ A เป็นเมตริกซ์ของ T

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

เพราะว่า $A \neq A^T$ ดังนั้น T ไม่เป็น self-adjont

<u>ทฤษฎี 3.2.5</u> ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดักท์สเปซในมิติจำกัด และ $T : V \dashrightarrow V$ เป็นการเปลี่ยนแปลงแบบ self-adjont ไอเกนเวกเตอร์ของ T ที่สอดคล้องกับค่าไอเกนที่แตกต่างกันจะออร์ธอโกนอล

<u>พิสูจน์</u> ให้ x,y เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ T ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน λ_1, λ_2 โดย $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ดังนั้นจะได้ว่า $T(x) = \lambda_1 x$, $T(y) = \lambda_2 y$

พิจารณา
$$\begin{aligned}
\lambda_1 \langle x,y\rangle &= \langle \lambda_1 x, y\rangle \\
&= \langle T(x), y\rangle && T(x) = \lambda_1 x \\
&= \langle x, T(y)\rangle && T \text{ เป็น self-adjont} \\
&= \langle x, \lambda_2 y\rangle && T(y) = \lambda_2 y \\
&= \lambda_2 \langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lambda_1 <X,Y> = \lambda_2 <X,Y>$

หรือ $(\lambda_1-\lambda_2)<X,Y> = 0$

เพราะว่า $\lambda_1 \neq \lambda_2$ จะได้ว่า

$$<X,Y> = 0$$

ดังนั้นไอเกนเวกเตอร์ของ T ที่สอดคล้องกับค่าไอเกนที่แตกต่างกันจะออร์ธอโกนอล

<u>ทฤษฎี 3.2.6</u> ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซในมิติจำกัด และ $T: V \to V$ เป็นเอนโดมอร์ฟิซึม ใน V ถ้าสับสเปซ W ของ V เป็นอินแวร์เรียนท์ภายใต้ T แล้ว $W^{\perp}$ จะเป็นอินแวร์เรียนท์ภายใต้ T^*

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า W อินแวร์เรียนท์ภายใต้ T ดังนั้นทุก ๆ $Y \in W$ จะทำให้ $T(Y) \in W$

ให้ $X \in W^{\perp}$ จะแสดงว่า $T^*(X) \in W^{\perp}$

เนื่องจาก T^* เป็นแอดจอยท์ของ T (เพราะว่า $T : V \to V$ เป็น
เอนโดมอร์ฟิซึม ดังนั้นจะมีแอดจอยท์ T^*) ที่ทำให้

$$<Y,T^*(X)> = <T(Y),X>$$

$$= 0 \quad \text{เพราะว่า } T(Y) \in W \text{ และ } X \in W^{\perp}$$

ดังนั้น $T^*(X)$ จะออร์ธอโกนอลกับทุก ๆ $Y \in W$

จะได้ว่า $T^*(X) \in W^{\perp}$

ดังนั้น $W^{\perp}$ อินแวร์เรียนท์ภายใต้ T^*

<u>ทฤษฎี 3.2.7</u> ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซในมิติจำกัด ให้ $T : V \dashrightarrow V$ เป็นการเปลี่ยนแปลงแบบ self-adjont ให้ $E = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ เป็นฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซตของ V และ A เป็นเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน E และกำหนดให้ $T_C = C^n \dashrightarrow C^n$ โดย T_C เป็นการเปลี่ยนแปลงจากสเปซของจำนวนเชิงซ้อนมิติ n ไปยังสเปซของจำนวนเชิงซ้อนมิติ n บนฟิลด์ของจำนวนเชิงซ้อน และเมตริกซ์ของ T_C ที่สอดคล้องกับฐานมาตรฐานคือ A แล้ว T จะมีค่าไอเกนอย่างน้อย 1 ค่า และเป็นจำนวนจริง

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า T_C เป็นการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นบนฟิลด์ของจำนวนเชิงซ้อน จากทฤษฎี 2.6.6 จะได้ว่า T_C มีค่าไอเกนอย่างน้อย 1 ค่า สมมติให้เป็น λ เป็นจำนวนเชิงซ้อน เพราะว่า λ เป็นรากของคาแรคเตอริสติคโพลิโนเมียลของ T_C ให้ $X \in C^n - \{0\}$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน λ จะได้ $\bar{X}$ เป็นคอนจุเกตของ X

เนื่องจาก λ เป็นค่าไอเกนของ T_C จากทฤษฎี 2.6.3 จะได้ λ เป็นรากของ A และจะได้โคออร์ดิเนตของ X คือ $[X]_E = X^T$ เมื่อ E เป็นฐานมาตรฐานของ C^n ดังนั้นจะได้ว่า

$$AX^T = \lambda X^T \qquad \dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

เนื่องจากค่าไอเกน และไอเกนเวกเตอร์ของ (1) เป็นจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้น คอนจุเกตของ (1) คือ

$$A\bar{X}^T = \bar{\lambda}\bar{X}^T \qquad \dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

จาก(2) เนื่องจาก A เป็นเมตริกซ์สมมาตรของจำนวนจริง ดังนั้นคอนจูเกต

ของ A = A

คูณ(1) ด้วย $\bar{X}$ และคูณ(2) ด้วย X จะได้ว่า

$$\bar{X}\,AX^{T} = \bar{X}\,\lambda\,X^{T} = \lambda(\bar{X}X^{T}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$X\,A\bar{X}^{T} = X\,\bar{\lambda}\,\bar{X}^{T} = \bar{\lambda}(X\bar{X}^{T}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

จาก(3) เนื่องจาก $\bar{X}$ เป็น 1 x n เมตริกซ์ A เป็น n x nเมตริกซ์

และ X^{T} เป็น n x 1 เมตริกซ์ ดังนั้น $\bar{X}\,A\,X^{T}$ เป็น 1 x 1 เมตริกซ์

หรือจำนวนจำนวนหนึ่ง

ดังนั้น $(\bar{X}\,A\,X^{T})^{T} = \bar{X}\,A\,X^{T}$

พิจารณา $(X\,A\,\bar{X}^{T})^{T} = \bar{X}\,A\,X^{T}$ เพราะว่า A เป็นเมตริกซ์สมมาตร

$A^{T} = A$

จะได้ (3) = (4) $\lambda(\bar{X}X^{T}) = \bar{\lambda}(X\bar{X}^{T})$

เพราะว่า $\bar{X}X^{T} = X\bar{X}^{T}$ และไม่เท่ากับ 0

ดังนั้น $\lambda = \bar{\lambda}$

จะได้ว่า T จะมีค่าไอเกนอย่างน้อย 1 ค่า และเป็นจำนวนจริง

<u>ทฤษฎี 3.2.8</u> ให้ $T : V \dashrightarrow V$ เป็นการเปลี่ยนแปลงแบบ self-adjontบนฟิลด์ของจำนวนจริง ดังนั้นจะมีฐานที่ประกอบด้วยไอเกนเวกเตอร์ของ V และเป็นออร์ธอนอร์มอลเซต (ทฤษฎีสเปคตรัล)

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\dim V = 1$ จากทฤษฎี 3.2.7 ให้ λ_1 เป็นค่าไอเกนของ T จะมีเวกเตอร์ $x_1 \neq 0$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ V :เป็นฐานของ V สามารถทำให้เป็นออร์ธอนอร์มอลเซตได้ นั่นคือ $Y_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|}$ จะได้ Y_1 เป็นฐานที่ประกอบด้วยไอเกนเวกเตอร์ด้วย T และเป็นออร์ธอนอร์มอลเซต

พิจารณาเมื่อ $\dim V = n$ จากทฤษฎี 3.2.7 ให้ λ_1 เป็นค่าไอเกนของ T ดังนั้นจะมีเวกเตอร์ $x_1 \neq 0$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ T ให้ W เป็นสับสเปซสแปนโดย x_1 ดังนั้น $\{x_1\}$ เป็นฐานของ W จะได้ $\dim W=1$ และจะได้ $Y_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|}$ เป็นฐานที่ประกอบด้วยไอเกนเวกเตอร์ และเป็นออร์ธอนอร์มอลเซต เนื่องจาก x_1 เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ T ดังนั้นสับสเปซ W ของ V จะเป็นอินแวร์เรียนภายใต้ T จากทฤษฎี 3.2.6 จะได้ว่า $W^{\perp}$ เป็นอินแวร์เรียนภายใต้ $T^* = T$ ดังนั้น restrict ฟังก์ชัน T_W ของ T ไปยัง $W^{\perp}$ จะเป็นการเปลี่ยนแปลงแบบ self-adjont เพราะว่า $T = T^*$ จากทฤษฎี 2.7.13 จะได้ว่า $V = W \oplus W^{\perp}$ เนื่องจาก $\dim W = 1$ ดังนั้น $\dim W^{\perp} = n-1$ โดยขบวนการ induction ดังนั้นจะมีฐาน $\{Y_2, Y_3, \ldots, Y_n\} \in W^{\perp}$ ที่ประกอบด้วยไอเกนเวกเตอร์ และเป็นออร์ธอนอร์มอลเซต และเป็นฐานของ T ด้วย

เพราะว่า $Y_i \in W^{\perp}$ ดังนั้น $\langle Y_1, Y_i \rangle = 0$ เมื่อ $i = 2,3,\ldots, n$ นั่นคือ Y_i จะออร์ธอโกนอลกับ Y_1 สำหรับแต่ละ $i > 1$

ดังนั้นจะมี $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ เป็นฐานที่ประกอบด้วยไอเกนเวกเตอร์และเป็นออร์ธอนอร์มอลเซต

<u>ตัวอย่าง 3.2.4</u> ให้ $T : R^2 \to R^2$ เป็นเอนโดมอร์ฟิซึม โดย

$T(x,y) = (5x-2y, -2x+8y)$

จงหาฐานที่ประกอบด้วยไอเกนเวกเตอร์และเป็นออร์ธอนอร์มอลเซต

<u>วิธีทำ</u> เพราะว่า $T(x,y) = (5x-2y, -2x+8y)$

เมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐานมาตรฐานคือ $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ เป็นเมตริกซ์สมมาตร ดังนั้น T เป็น self-adjont จากทฤษฎีสเปคตรัล T จะมีฐานที่ประกอบด้วยไอเกนเวกเตอร์ และเป็นออร์ธอนอร์มอลเซต

ให้ $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

พิจารณาสมการคาแรคเตอริสติคของ A คือ

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-5 & 2 \\ 2 & \lambda-8 \end{vmatrix} = (\lambda-9)(\lambda-4) = 0$$

ค่าไอเกนของ A คือ 4,9

ต่อไปจะหาไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน $\lambda=4$ ได้จากสมการ $(\lambda I - A)[X]_E = 0$ โดย $[X]_E$ เป็นโคออร์ดิเนตที่สอดคล้องกับฐานมาตรฐานเมื่อ $X = (x,y)$

จะได้ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

หรือ
$$-x + 2y = 0$$
$$2x - 4y = 0$$

ดังนั้นไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน $\lambda=4$ คือ $\binom{2a}{a}$ จะได้ $(2a, a)$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ T ถ้า $a = 1$ จะได้ $X_1 = (2,1)$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ค่าหนึ่งของ T

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $X_2 = (-1,2)$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน $\lambda = 9$ และจะได้ว่า X_1, X_2 ออร์ธอโกนอล และสามารถทำให้เป็นออร์ธอนอร์มอลได้ จะได้

$$S = \{Y_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}), \ Y_2 = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})\}$$

เป็นฐานที่ประกอบด้วยไอเกนเวกเตอร์และเป็นออร์ธอนอร์มอลเซต

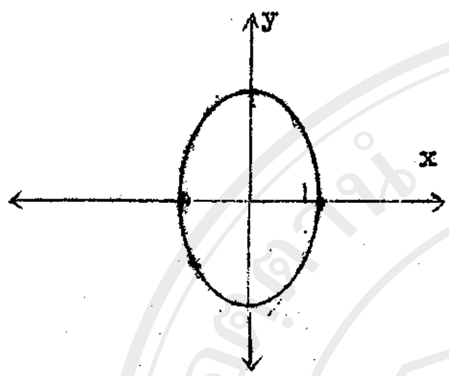
3.3 <u>การประยุกต์</u>

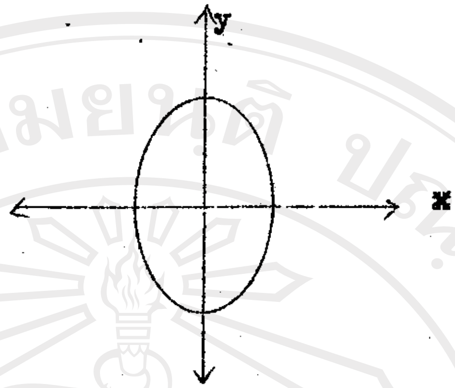
<u>การประยุกต์กับสมการควอดคราติค</u>

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการนำทฤษฎีสเปคตรัลไปใช้เพื่อให้ทราบว่ากราฟของสมการควอดคราติค (quadratic equation) ในสเปซที่มีมิติ 2 และ 3 เป็นกราฟชนิดใด

สมการ $ax^2 + bxy + cy^2 = d$ เป็นสมการควอดคราติคในสเปซ 2 มิติ กราฟของสมการนี้เมื่อเขียนอยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน ได้แก่ รูปอิลิปต์ หรือไฮเปอร์โบลา ซึ่งเป็นแบบใดแบบหนึ่งในรูปต่อไปนี้

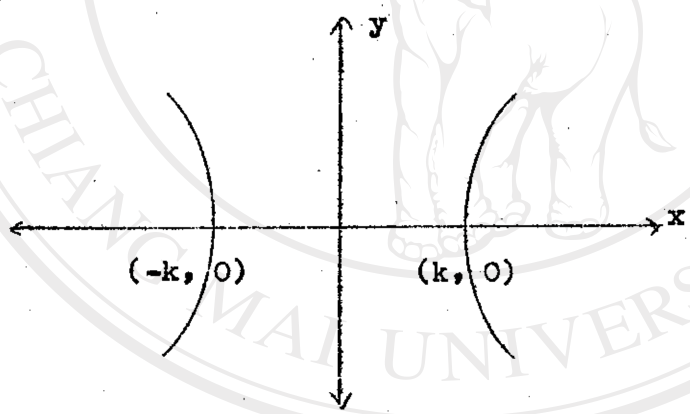
1. $\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1,\ k, l, > 0$ เป็นสมการของอิลิปต์



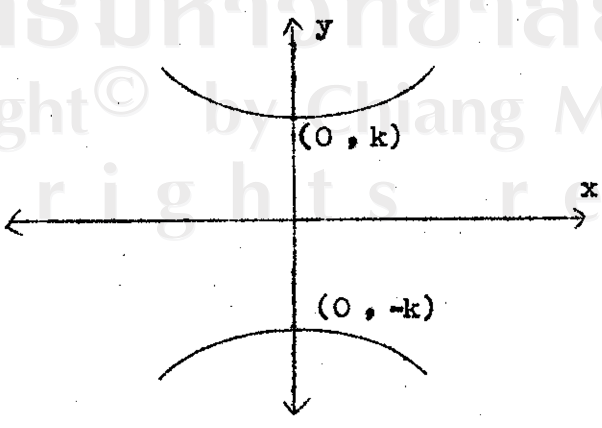


$k < 1$ มีแกน y เป็นหลัก $k > 1$ มีแกน x เป็นแกนหลัก

2. $\frac{x^2}{k^2} - \frac{y^2}{l^2} = 1\ ,\ k, l > 0$ เป็นสมการไฮเปอร์โบลามีแกน x เป็นหลัก



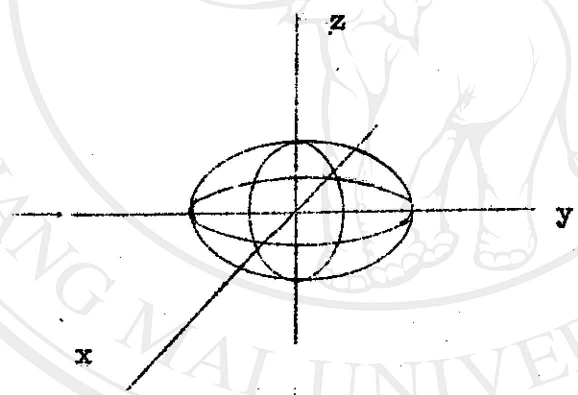
3. $\frac{y^2}{k^2} - \frac{x^2}{l^2} = 1,\ k,\ l > 0$ เป็นสมการไฮเปอร์โบลามีแกน y เป็นหลัก



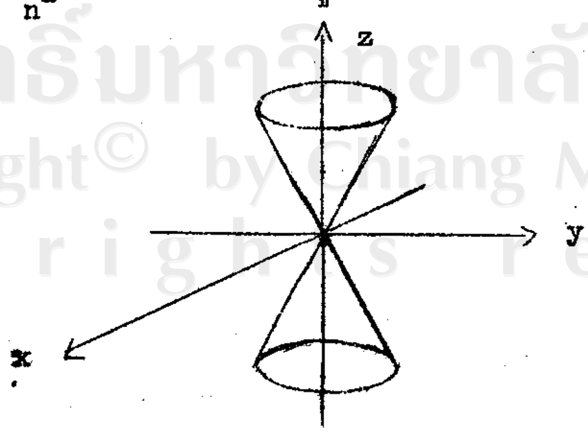
เช่นสมการ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ อยู่ในรูป $\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1$ จะได้ $k = 2, l = 3$ เป็นกราฟของรูปอีลิปส์ ซึ่งตัดแกน x ที่จุด (-2,0), (2,0) และตัดแกน y ที่จุด(0,-3) และ (0,3) มีแกน y เป็นแกนหลัก

ส่วนสมการ $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exy+fyz=g$ เป็นสมการ-ควอดดราติคในสเปซ 3 มิติ และเมื่อเขียนอยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน กราฟของสมการนี้ได้แก่รูป ellipsoid, elliptic cone, hyperboloid of one sheet, hyperboloid of two sheet ดังรูปต่อไปนี้

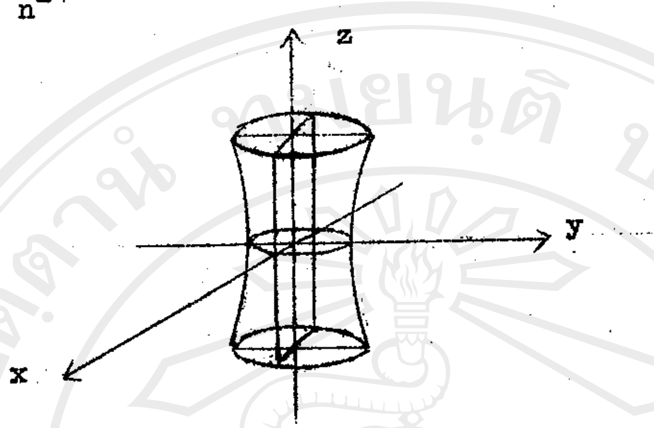
1. $\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} = 1$ เป็นสมการรูป ellipsoid



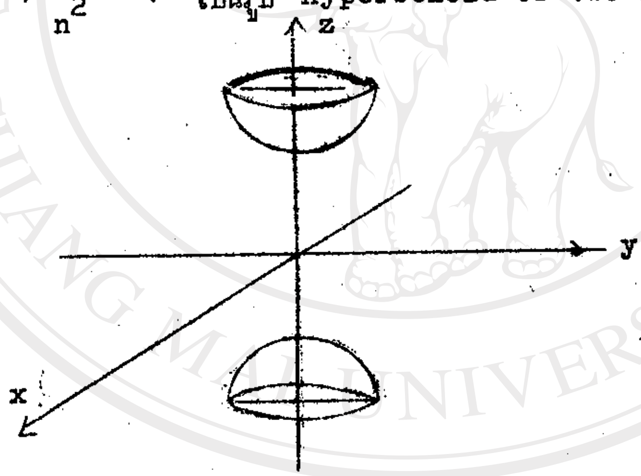
2. $\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} - \frac{z^2}{n^2} = 0$ เป็นสมการรูป elliptic cone



3. $\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} - \frac{z^2}{n^2} = 1$ เป็นสมการรูป hyperboloid of one sheet



4. $-\frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} = 1$ เป็นรูป Hyperboloid of two sheet



เช่นสมการ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ อยู่ในรูป $\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} = 1$

จะได้ $l = 2$, $m = 3$, $n = 2$ เป็นรูป ellipticsoid

จากตัวอย่างที่แสดงไว้แล้วไม่มีสมการควอดกราติคทั้งในสเปซที่มีมิติ 2 และมิติ 3 ที่มีเทอมของ xy (xy term หรือ cross term) ในสมการ ซึ่งสมการที่มีเทอมของ xy เช่น $x^2 + 8xy + y^2 = 1$ เราไม่สามารถทราบว่าเป็นสมการของกราฟชนิดใด ซึ่งสามารถกำจัดเทอม xy ได้โดยการหมุนแกน และบอกได้ว่าสมการนั้นเป็นกราฟชนิดใด ซึ่งในที่นี้จะใช้ทฤษฎีสเปคตรัลเพื่อกำจัดเทอม xy และบอกได้ว่าเป็นสมการของกราฟชนิดใด ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 3.3.1</u> จงกำจัด xy เทอมของสมการ $5x^2 - 4xy + 8y^2 = 36$ และบอกชนิดของรูป และวาดรูปด้วย

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา $5x^2 - 4xy + 8y^2$ สามารถเขียนในรูป

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 = (x,y)\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

เพื่อให้สมการ $5x^2 - 4xy + 8y^2 = 36$ ไม่มีเทอม xy ดังนั้นเราจะต้องหาระบบโคออร์ดิเนตใหม่ใน R^2

ให้ $T : R^2 \to R^2$ เป็น เอนโดมอร์ฟิซึม ที่มีเมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นที่สัมพันธ์ต่อฐานมาตรฐานเท่ากับ $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

เนื่องจากเมตริกซ์นี้เป็นเมตริกซ์สมมาตร ดังนั้น $T : R^2 \to R^2$ จะเป็นการเปลี่ยนแปลงแบบ self-adjont และจะได้ว่า

$$T(x,y) = (5x-2y,\ -2x+8y)$$

และจะเห็นว่า

$$(x,y)\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \langle (x,y),\ T(x,y) \rangle$$

ให้ $X = (x,y)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^2 ดังนั้น

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 = \langle X, T(X)\rangle \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

และเนื่องจาก T เป็นการเปลี่ยนแปลงแบบ self-adjont จากทฤษฎีสเปคตรัล T จะมีฐานที่ประกอบด้วยไอเกนเวกเตอร์ และเป็นออร์ธอนอร์มอลเซต

จากตัวอย่าง 3.2.4 เราสามารถหาฐานที่ประกอบด้วยไอเกนเวกเตอร์ และเป็นออร์ธอนอร์มอลเซตได้ ซึ่งแต่ละไอเกนเวกเตอร์เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย โดย

$$S = \{Y_1 = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}),\ Y_2 = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})\}$$

และเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน S คือ $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ และถ้าให้

$X = (x',y')$ เป็นเวกเตอร์ในระบบโคออร์ดิเนตใหม่ที่กำหนดโดยเวกเตอร์

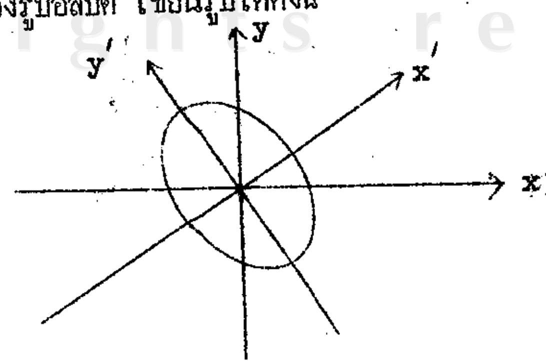
Y_1, Y_2 จะได้ว่า

$$\langle X, T(X)\rangle = (x',y')\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 4x'^2 + y'^2$$

และจะได้ว่า $4x'^2 + y'^2 = 36$

หรือ $\dfrac{x'^2}{9} + \dfrac{y'^2}{36} = 1$

เป็นสมการของรูปอิลิปต์ เขียนรูปได้ดังนี้



จากตัวอย่างที่ผ่านมาสามารถสรุปนิยามได้ดังนี้

<u>นิยาม 3.3.1</u> ให้ V เป็นอินเนอร์โพรดัคท์สเปซในมิติจำกัด และฟังก์ชัน $Q : V \dashrightarrow R$ จะเรียกว่าควอดดราติค ก็ต่อเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงแบบ self-adjont $T : V \dashrightarrow V$ ซึ่งทำให้ $Q(X) = \langle X, T(X)\rangle$ สำหรับทุก ๆ X ที่อยู่ใน V

<u>ตัวอย่าง 3.3.2</u> ให้ $Q : R^2 \dashrightarrow R$ โดย $Q(X) = x^2 + 2xy + y^2$ โดย $X = (x,y)$ ให้แสดงว่า $Q(X)$ เป็นควอดดราติคฟังก์ชัน

<u>วิธีทำ</u> ให้ $T : R^2 \dashrightarrow R^2$ เป็น เอนโดมอร์ฟิซึม ที่มีเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐานมาตรฐานเป็น $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ เนื่องจากเมตริกซ์นี้เป็นเมตริกซ์สมมาตร ดังนั้น เอนโดมอร์ฟิซึม $T : R^2 \dashrightarrow R^2$ เป็นการเปลี่ยนแปลงแบบ self-adjont จะได้ว่า

$$T(x,y) = (x+y,\ x+y)$$

และจะเห็นว่า

$$\langle (x,y),\ T(x,y)\rangle = x^2 + 2xy + y^2 = Q(X)$$

ดังนั้น $Q(X)$ เป็นควอดดราติคฟังก์ชัน

<u>ทฤษฎี 3.3.1</u> ให้ $Q : V \dashrightarrow R$ เป็นควอดคราติคฟังก์ชัน โดย V เป็นอินเนอร์-โพรดัคท์สเปซในมิติจำกัด แล้วจะมีฐาน $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ ใน V และสกาลาร์ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ใน R และสำหรับแต่ละเวกเตอร์

$$X = x_1X_1 + x_2X_2 + \ldots + x_nX_n$$

ใน V จะได้ว่า $Q(X) = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + \ldots + \lambda_nx_n^2$

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า Q เป็นควอดคราติคฟังก์ชัน ดังนั้น $T : V \dashrightarrow V$ เป็นการเปลี่ยนแปลงแบบ self-adjont ที่ทำให้ $Q(X) = \langle X, T(X)\rangle$ สำหรับทุก ๆ $X \in V$ จากทฤษฎีสเปคตรัล เราสามารถหาฐาน $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ ใน V ที่เป็นไอเกนเวกเตอร์ และเป็นออร์ธอนอร์มอลเซต ให้ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ เป็นค่าไอเกนที่สอดคล้องกับไอเกนเวกเตอร์ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ให้ $X = x_1X_1 + x_2X_2 + \ldots + x_nX_n$ สำหรับ $X \in V$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
Q(X) &= \langle X, T(X)\rangle \\
&= \langle x_1X_1 + x_2X_2 + \ldots + x_nX_n, T(x_1X_1 + x_2X_2 + \ldots + x_nX_n)\rangle \\
&= \langle x_1X_1 + x_2X_2 + \ldots + x_nX_n, x_1T(x_1) + x_2T(x_2) + \ldots \\
&\quad + x_nT(x_n)\rangle \\
&= \langle x_1X_1 + x_2X_2 + \ldots + x_nX_n, x_1\lambda_1X_1 + x_2\lambda_2X_2 + \ldots \\
&\quad + x_n\lambda_nX_n\rangle
\end{aligned}$$

$$\therefore Q(X) = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + \ldots + \lambda_nx_n^2$$

<u>ตัวอย่าง 3.3.3</u> จงกำจัด xy เทอมของสมการ $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 36$ และบอกชนิดของรูป และวาดรูปประกอบ

<u>วิธีทำ</u> ให้ $Q(x) = x^2 - 4xy + 5y^2$ เป็นควอดดราติคฟังก์ชัน ทั้งนี้ถ้าให้ $T: R^2 \dashrightarrow R^2$ เป็น เอนโดมอร์ฟิซึม ซึ่งมีเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐานมาตรฐานคือ $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ และเมตริกซ์นี้เป็นเมตริกซ์สมมาตร ดังนั้น T จะเป็น self-adjont และ

$$T(x,y) = (2x-2y, -2x+5y) \text{ และ } <(x,y),T(x,y)> = 2x^2-4xy+2y^2 = Q(X)$$

เมื่อ $X = (x,y)$ ดังนั้น $Q(X)$ เป็นควอดดราติคฟังก์ชัน

ให้ A เป็นเมตริกซ์ของ T จะได้ว่า $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

พิจารณาสมการคาแรคเตอริสติคของ A คือ

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 \\ 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-5) - 4$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda-1)\lambda-6) = 0$$

ดังนั้น $\lambda = 1,6$

ต่อไปจะหาไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน $\lambda = 1$ ได้จากสมการ $(\lambda I-A)[X]_E = 0$ โดย $[X]_E$ เป็นโคออร์ดิเนตที่สอดคล้องกับฐานมาตรฐาน เมื่อ $X = (x,y)$ จะได้

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

หรือ $-x + 2y = 0$ หรือ $x - 2y = 0$

$2x + 4y = 0$

ดังนั้นไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน $\lambda = 1$ คือ $\begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix}$ จะได้ $(2a, a)$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ T ถ้า $a = 1$ จะได้ $X_1 = (2,1)$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ค่าหนึ่งของ T

ในทำนองเดียวกันจะได้ $X_2 = (-1,2)$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ค่าหนึ่งของ T ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน $\lambda = 6$ และจะได้ว่า X_1, X_2 เป็นออร์ธอโกนอล และสามารถทำให้เป็นออร์ธอนอร์มอลได้ และจะได้

$S = \{Y_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}), Y_2 = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})\}$ เป็นฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต และประกอบด้วยไอเกนเวกเตอร์ของ T

ให้ $X = (x', y')$ เป็นเวกเตอร์ในระบบโคออร์ดิเนตใหม่ที่กำหนดโดยเวกเตอร์ Y_1, Y_2 จากทฤษฎี 3.3.1 จะได้ว่า

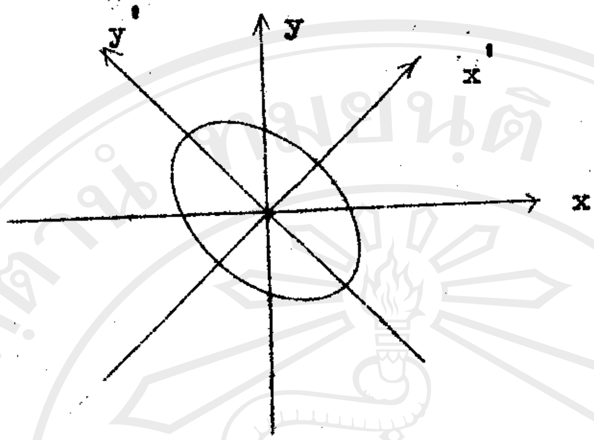
$$Q(X) = 6x'^2 + y'^2$$

และจะได้ว่า

$$6x'^2 + y'^2 = 36$$

หรือ $\frac{x'^2}{6} + \frac{y^2}{36} = 1$ เป็นสมการของรูปอิลิปต์

เขียนรูปได้ดังนี้



ตัวอย่าง 3.3.4 จงกำจัด xy เทอมของสมการ $2xy = 1$ และบอกชนิดของรูป และวาดรูปประกอบ

วิธีทำ ให้ $Q(X) = 2xy$ และ $Q(X)$ เป็นควอดคราติคฟังก์ชัน โดย $T: R^2 \rightarrow R^2$ เป็นการเปลี่ยนแปลงแบบ self-adjont โดยเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐานมาตรฐานคือ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ให้ A เป็นเมตริกซ์ของ T จะได้ว่า $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ พิจารณาสมการคาแรคเตอริสติคของ A คือ

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \text{ จะได้ } \lambda = 1, -1$$

ต่อไปจะหาไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน $\lambda = 1$ ได้จากสมการ $(\lambda I-A)[X]_E = 0$ โดย $[X]_E$ เป็นโคออร์ดิเนตที่สอดคล้องกับฐานมาตรฐาน โดย $X = (x,y)$ จะได้

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

หรือ $x - y = 0$ หรือ $x - y = 0$

$-x + y = 0$

ดังนั้นไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน $\lambda = 1$ คือ $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ จะได้ (a,a) เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ T ถ้า $a = 1$ จะได้ $X_1 = (1,1)$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ค่าหนึ่งของ T

ในทำนองเดียวกันสำหรับ $\lambda = -1$ จะได้ $X_2 = (-1,1)$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้อง

และจะได้ว่า X_1, X_2 เป็นออร์ธอโกนอล และสามารถทำให้เป็นออร์ธอนอร์มอลได้

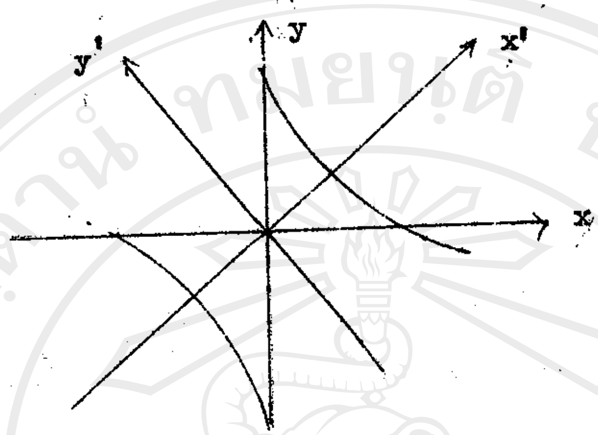
และจะได้ $S = \{Y_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), Y_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$

เป็นฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต และประกอบด้วยไอเกนเวกเตอร์ของ T

ให้ $X = (x',y')$ เป็นเวกเตอร์ในระบบโคออร์ดิเนตใหม่ที่กำหนดโดยเวกเตอร์ Y_1, Y_2 จะได้

$$Q(X) = x'^2 - y'^2$$

นั่นคือจะได้ว่า $x'^2 - y'^2 = 1$ เป็นสมการของรูปไฮเปอร์โบลา



ต่อไปจะพิจารณาตัวอย่างในสเปซ 3 มิติ

<u>ตัวอย่าง 3.3.5</u> จงพิจารณาสมการ $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4xy - 4yz = 10$ และบอกชนิดของรูป

<u>วิธีทำ</u> ให้ $Q(X) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4xy - 4yz$ และ $Q(X)$ เป็นควอดดราติคฟังก์ชัน โดย $T: R^3 \longrightarrow R^3$ เป็นการเปลี่ยนแปลงแบบ self-adjont และเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐานมาตรฐานคือ

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

ให้ A เป็นเมตริกซ์ของ T จะได้

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

พิจารณาสมการคาแรคเตอริสติคของ A จะได้ว่า

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda^3-6\lambda^2+3\lambda+10 = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

$$\lambda = 2,5,-1$$

ต่อไปจะหาไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน $\lambda = 2$ ได้จากสมการ $(\lambda I-A)\,[X]_E = 0$ โดย $[X]_E$ เป็นโคออร์ดิเนทที่สอดคล้องกับฐานมาตรฐาน โดย $X = (x,y,z)$

จะได้ $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x + 2y \quad &= 0 \\ 2x \quad +2z &= 0 \\ 2y - z &= 0 \end{aligned} \qquad \text{หรือ} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ 2y-z &= 0 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\begin{pmatrix} -2a \\ a \\ 2a \end{pmatrix}$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ A ที่สอดคล้องกับ $\lambda = 1$

จะได้ $(-2a, a, 2a)$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ T ถ้า $a = 1$ จะได้

$X_1 = (-2,1,2)$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ค่าหนึ่งของ T

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $X_2 = (1,-2,2)$, $X_3 = (2,2,1)$

เป็นไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน $\lambda=5$, $\lambda = -1$ ตามลำดับ

และจะได้ว่า X_1, X_2, X_3 เป็นออร์ธอโกนอล และสามารถทำให้เป็นออร์ธอนอร์มอลเซตได้ และจะได้

$$S = \{Y_1 = \tfrac{1}{3}(-2,1,2),\ Y_2 = \tfrac{1}{3}(1,-2,2),\ Y_3 = \tfrac{1}{3}(2,2,1)\}$$

เป็นฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต และประกอบด้วยไอเกนเวกเตอร์ของ T

ให้ $X = (x', y', z')$ เป็นเวกเตอร์ในระบบโคออร์ดิเนตใหม่ที่กำหนดโดยเวกเตอร์ Y_1, Y_2, Y_3 จะได้

$$Q(X) = 2x'^2 + 5y'^2 - z'^2$$

นั่นคือ จะได้ $2x'^2 + 5y'^2 - z'^2 = 10$

$$\text{หรือ} \quad \frac{x'^2}{5} + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{10} = 1$$

เป็นสมการของรูป hyperboloid of one sheet

<u>ตัวอย่าง 3.3.6</u> จงพิจารณาสมการ $2xy + 2xz + 2yz = 1$ พร้อมทั้งบอกชนิดของรูป

<u>วิธีทำ</u> ให้ $Q(X) = 2xy + 2xz + 2yz$ แล้ว $Q(X)$ เป็นควอดดราติคฟังก์ชัน โดย $T: R^3 \to R^3$ เป็นการเปลี่ยนแปลงแบบ self-adjont และเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐานมาตรฐานคือ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ให้ A เป็นเมตริกซ์ของ T จะได้

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

พิจารณาสมการคาแรคเตอริสติคของ A จะได้ว่า

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda+1) = 0$$

ได้ค่าไอเกน $\lambda = 2, -1, -1$

จะได้ $X_1 = (1,1,1)$, $X_2 = (1,-2,4)$, $X_3 = (1,0,-1)$

เป็นไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเกน $\lambda = 2,-1,-1$ ตามลำดับ

และเป็นออร์ธอโกนอล สามารถทำให้เป็นออร์ธอนอร์มอลเซตได้

และจะได้

$$S = \{Y_1 = (\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}),\ Y_2 = (\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{-2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}),\ Y_3 = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{-1}{\sqrt{2}})\}$$

เป็นฐานที่เป็นออร์ธอนอร์มอลเซต และประกอบด้วยไอเกนเวกเตอร์ของ T

ให้ $X = (x', y', z')$ เป็นเวกเตอร์ในระบบโคออร์ดิเนตใหม่

ที่กำหนดโดยเวกเตอร์ Y_1, Y_2, Y_3 จะได้

$$Q(X) = 2x'^2 - y'^2 - z'^2$$

เพราะว่า $Q(X) = 1$

ดังนั้นจะได้ $2x'^2 - y'^2 - z'^2 = 1$

เป็นสมการของรูป hyperboloid of two sheet

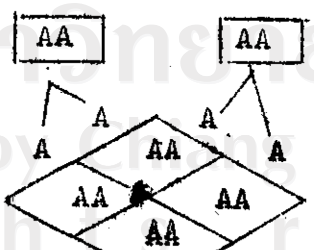
การประยุกต์เกี่ยวกับด้านพันธุกรรม

ในหัวข้อนี้จะนำทฤษฎีสเปคตรัลไปใช้เกี่ยวกับด้านพันธุกรรมตามตัวอย่าง 3.3.9 โดยตัวอย่าง 3.3.7 , 3.3.8 เป็นตัวอย่างนำไปประกอบการพิจารณาตัวอย่าง 3.3.9

ตัวอย่าง 3.3.7 ในการทดลองนำหมูผิวสีดำ ซึ่งเป็นลักษณะเด่นและถูกควบคุมโดยยีน A กับหมูผิวสีขาว ซึ่งเป็นลักษณะด้อย และถูกควบคุมโดยยีน a ในรุ่นพ่อแม่ชนิดที่ 1 ให้หมูตัวผู้ผิวสีดำพันธุ์แท้ (AA) ผสมกับหมูตัวเมียผิวสีดำพันธุ์แท้(AA) ชนิดที่ 2 ให้หมูตัวผู้ผิวสีดำพันธุ์แท้ (AA) ผสมกับหมูตัวเมียผิวสีดำพันธุ์ทาง (Aa) ชนิดที่ 3 ให้หมูตัวผู้ผิวสีดำพันธุ์แท้ (AA) ผสมกับหมูตัวเมียผิวสีขาวพันธุ์แท้(aa) โดย a_o เป็นสัดส่วนของหมูผิวสีดำพันธุ์แท้ (AA) b_o เป็นสัดส่วนของหมูผิวสีดำพันธุ์ทาง (Aa) และ c_o เป็นสัดส่วนของหมูผิวสีขาวพันธุ์แท้ (aa) ในรุ่นพ่อแม่ ใช้ลักษณะการผสมพันธุ์แบบเดิมที่ใช้ในรุ่นพ่อแม่ในการผสมพันธุ์รุ่นลูกจนเกิดหลาน และผสมเช่นนี้จนถึงรุ่นที่ n ให้หา a_n, b_n, c_n โดย a_n, b_n, c_n เป็นสัดส่วนในรุ่นที่ n ของหมูผิวสีดำพันธุ์แท้ (AA) หมูผิวสีดำพันธุ์ทาง (Aa) และหมูผิวสีขาวพันธุ์แท้ (aa)

วิธีทำ ในกรณีที่หมูตัวผู้ผิวสีดำพันธุ์แท้ (AA) ผสมกับหมูตัวเมียผิวสีดำพันธุ์แท้ (AA) พิจารณาดังนี้

รุ่นพ่อแม่

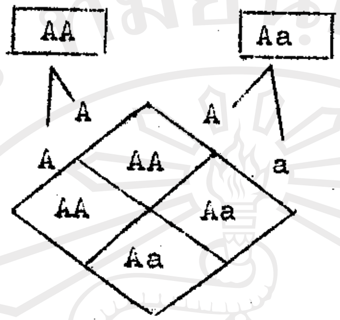


ลูก (รุ่นที่ 1)

ดังนั้น ได้ลูกเป็นหมูผิวสีดำพันธุ์แท้ (AA) ทั้งหมด

ในกรณีที่หมูตัวผู้ผิวสีดำพันธุ์แท้ (AA) ผสมกับหมูตัวเมียผิวสีดำพันธุ์ทาง(Aa) พิจารณาดังนี้

รุ่นพ่อแม่

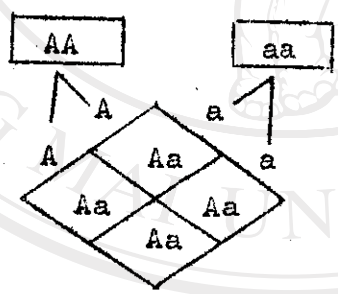


ลูก (รุ่นที่ 1)

ดังนั้นลูกได้หมูผิวสีดำพันธุ์แท้เป็นสัดส่วน $\frac{1}{2}$ หมูผิวสีดำพันธุ์ทางเป็นสัดส่วน $\frac{1}{2}$

ในกรณีที่หมูตัวผู้ผิวสีดำพันธุ์แท้ (AA) ผสมกับหมูตัวเมียผิวสีขาวพันธุ์แท้ (aa) พิจารณาดังนี้.

รุ่นพ่อแม่



ลูก (รุ่นที่ 1)

ดังนั้นลูกได้หมูผิวสีดำพันธุ์ทาง (Aa) ทั้งหมด

จากการพิจารณารุ่นลูก จากรุ่นพ่อแม่ชนิดที่ 1,2,3 สามารถสรุปได้ดังนี้

	AA	Aa	aa
AA x AA	1 a_o	0 a_o	0 a_o
AA x Aa	$\frac{1}{2}$ b_o	$\frac{1}{2}$ b_o	0 b_o
AA x aa	0 c_o	1 c_o	0 c_o

เพราะฉะนั้น
$$a_1 = 1a_0 + \frac{1}{2}b_0 + 0c_0$$
$$b_1 = 0a_0 + \frac{1}{2}b_0 + 1c_0$$
$$c_1 = 0a_0 + 0b_0 + 0c_0$$

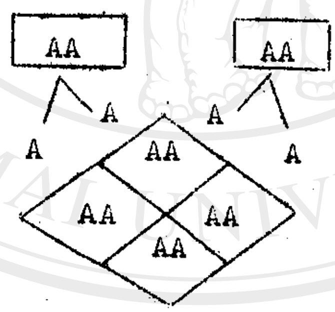
โดย a_1, b_1, c_1 เป็นสัดส่วนในรุ่นลูก (รุ่นที่ 1) และสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ คือ

$$X_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = CX_0$$

จากการพิจารณาหมู่รุ่นหลาน (รุ่นที่ 2) ชนิดที่ 1,2,3 โดยใช้หมู่รุ่นลูกผสมกันแบบเดิม แยกพิจารณาดังนี้

ในกรณีที่หมูตัวผู้ผิวสีดำพันธุ์แท้ (AA) ผสมกับหมูตัวเมียผิวสีดำพันธุ์แท้ (AA)

ลูก (รุ่นที่ 1)

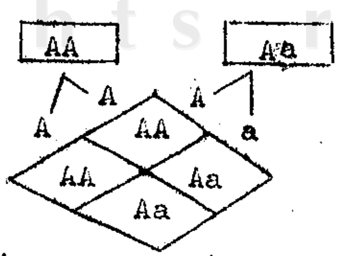


หลาน (รุ่นที่ 2)

ดังนั้น หลาน (รุ่นที่ 2) ได้หมูผิวสีดำพันธุ์แท้ (AA) ทั้งหมด

ในกรณีที่หมูตัวผู้ผิวสีดำพันธุ์แท้ (AA) ผสมกับหมูตัวเมียผิวสีดำพันธุ์ทาง (Aa)

ลูก (รุ่นที่ 1)

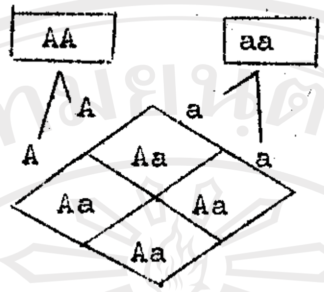


หลาน (รุ่นที่ 2)

ดังนั้น หลาน (รุ่นที่ 2) ได้หมูผิวสีดำพันธุ์แท้เป็นสัดส่วน $\frac{1}{2}$ หมูผิวสีดำพันธุ์ทางเป็นสัดส่วน $\frac{1}{2}$

ในกรณีที่หมูตัวผู้ผิวสีดำพันธุ์แท้ (AA) ผสมกับหมูตัวเมียผิวสีขาวพันธุ์แท้ (aa)

ลูก (รุ่นที่ 1)



หลาน (รุ่นที่ 2)

ดังนั้น หลาน (รุ่นที่ 2) ได้หมูผิวสีดำพันธุ์ทาง (Aa) ทั้งหมด

จากการพิจารณา หลาน (รุ่นที่ 2) จากพ่อแม่ที่เป็นลูก (รุ่นที่ 1) สามารถสรุปได้ดังนี้

	AA	Aa	aa
AA x AA	$1\,a_1$	$0\,a_1$	$0\,a_1$
AA x Aa	$\frac{1}{2}\,b_1$	$\frac{1}{2}\,b_1$	$0\,b_1$
AA x aa	$0\,c_1$	$1\,c_1$	$0\,c_1$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$a_2 = 1a_1 + \frac{1}{2}b_1 + 0c_1$$

$$b_2 = 0a_1 + \frac{1}{2}b_1 + 1c_1$$

$$c_2 = 0a_1 + 0b_1 + 0c_1$$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

ให้ $X_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ จะได้ $X_2 = CX_1$

แต่ $X_1 = CX_o$

ดังนั้น $X_2 = C^2X_o$

ต่อไปจะพิจารณาหมู่ในรุ่นที่ 3 ชนิดที่ 1,2,3 โดยใช้หมู่รุ่นที่ 2 ผสมกันแบบเดิม จะได้ว่า

$$X_3 = CX_2 = C(C^2X_o) = C^3X_o$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อพิจารณาหมู่ในรุ่นที่ n ชนิดที่ 1,2,3 โดยใช้หมู่รุ่นที่ n - 1 ผสมกันแบบเดิม
จะได้ว่า

$$X_n = C^nX_o \quad , \quad X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

พิจารณาเมตริกซ์ $C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ให้ $T : R^3 \dashrightarrow R^3$ เป็น

เอนโดมอร์ฟิซึม ที่เมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐานมาตรฐาน คือ C ต่อไป จะหาค่าไอเกน และไอเกนเวกเตอร์ของ T

พิจารณาสมการคาแรคเตอร์ริสติคของ C คือ

$$|\lambda I - C| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-\tfrac{1}{2}) = 0$$

$$\lambda = 1, \tfrac{1}{2}, 0$$

ดังนั้น $\lambda = 1, \frac{1}{2}, 0$ เป็นค่าไอเกนของ T

ให้ $X = (x,y,z)$ จะได้ $[X]_E = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ และหาไอเกนเวกเตอร์

ได้จาก $(\lambda I - C)[X]_E = 0$

$\lambda = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

จะได้ว่า $\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}y &= 0 \\ \tfrac{1}{2}y - z &= 0 \end{aligned}$ แล้ว $y = 0, z = 0$

ดังนั้น จะได้ $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ C ดังนั้น $(a,0,0)$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ T ถ้า $a = 1$ จะได้ $X_1 = (1,0,0)$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ T ที่สอดคล้องกับ $\lambda = 1$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $X_2 = (-1, 1, 0)$ เมื่อ $\lambda = \frac{1}{2}$

และ $X_3 = (1, -2, 1)$ เมื่อ $\lambda = 0$

ดังนั้น จะได้ $S = \{X_1 = (1,0,0), X_2 = (-1,1,0), X_3 = (1,-2,1)\}$ เป็นฐานที่ประกอบด้วยไอเกนเวกเตอร์ของ T ดังนั้น ถ้าให้ D เป็นเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน S จะได้ว่า

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{และ} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

และ $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ จากทฤษฎี 2.4.3 จะได้ว่า $D = P^{-1}CP$

แล้ว $C = PDP^{-1}$ จากทฤษฎี 2.4.5 จะได้ว่า $C^n = PD^nP^{-1}$

พิจารณา

$$C^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1-\frac{1}{2^n} & 1-\frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

เพราะว่า $X_n = C^n X_o$ จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-\frac{1}{2^n} & 1-\frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_o \\ b_o \\ c_o \end{pmatrix}$$

ดังนั้น

$$a_n = a_o + (1 - \frac{1}{2^n})b_o + (1 - \frac{1}{2^{n-1}})c_o$$

$$b_n = \frac{1}{2^n} b_o + \frac{1}{2^{n-1}} c_o$$

$$c_n = 0$$

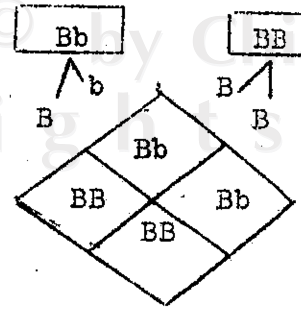
เมื่อ n มีค่ามาก ๆ ในรุ่นที่ n จะได้ว่า

$$a_n \to a_o + b_o + c_o$$
$$b_n \to 0$$
$$c_n = 0$$

ตัวอย่าง 3.3.8 ในการทดลองนำแกะขนยาว ซึ่งเป็นลักษณะเด่นและถูกควบคุมโดยมียีน B กับแกะขนสั้น ซึ่งเป็นลักษณะด้อย และถูกควบคุมโดยยีน b ในรุ่นพ่อแม่ชนิดที่ 1 ให้แกะตัวผู้ขนยาวพันธุ์ทาง (Bb) ผสมกับแกะตัวเมียขนยาวพันธุ์แท้ (BB) ชนิดที่ 2 ให้แกะตัวผู้ขนยาวพันธุ์ทาง (Bb) ผสมกับแกะตัวเมียขนยาวพันธุ์ทาง (Bb) ชนิดที่ 3 ให้แกะตัวผู้มีขนยาวพันธุ์ทาง (Bb) ผสมกับแกะตัวเมียขนยาวพันธุ์แท้ (bb) โดย a_o เป็นสัดส่วนของแกะขนยาวพันธุ์แท้ (BB) b_o เป็นสัดส่วนของแกะขนยาวพันธุ์ทาง (Bb) และ c_o เป็นสัดส่วนของแกะขนสั้นพันธุ์แท้ (bb) ในรุ่นพ่อแม่ ใช้ลักษณะการผสมพันธุ์แบบเดิมที่ใช้ในรุ่นพ่อแม่ในการผสมพันธุ์รุ่นลูกจนเกิดหลานและผสมกันเช่นนี้จนถึงรุ่นที่ n ให้หา a_n, b_n, c_n โดย a_n, b_n, c_n เป็นสัดส่วนในรุ่นที่ n ของแกะขนยาวพันธุ์แท้ (BB) แกะขนยาวพันธุ์ทาง (Bb) และแกะขนสั้นพันธุ์แท้ (bb)

วิธีทำ ในกรณีที่แกะตัวผู้ขนยาวพันธุ์ทาง (Bb) ผสมกับแกะตัวเมียขนยาวพันธุ์แท้ (BB) พิจารณาดังนี้

รุ่นพ่อแม่

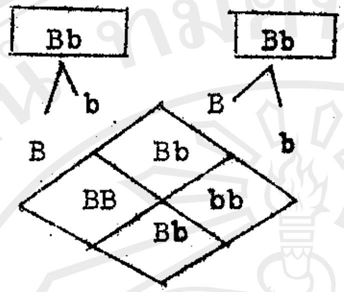


ลูก (รุ่นที่ 1)

ดังนั้น ลูกได้แกะขนยาวพันธุ์แท้เป็นสัดส่วน $\frac{1}{2}$ แกะขนยาวพันธุ์ทางเป็นสัดส่วน $\frac{1}{2}$

ในกรณีที่แกะตัวผู้ขนยาวพันธุ์ทาง (Bb) ผสมกับแกะตัวเมียขนยาวพันธุ์ทาง (Bb) พิจารณาดังนี้

รุ่นพ่อแม่

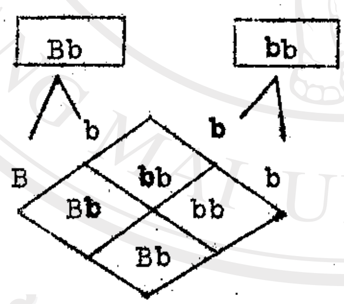


ลูก (รุ่นที่ 1)

ดังนั้น ลูกได้แกะขนยาวพันธุ์แท้เป็นสัดส่วน $\frac{1}{4}$ แกะขนยาวพันธุ์ทางเป็นสัดส่วน $\frac{1}{2}$ และแกะขนสั้นพันธุ์แท้เป็นสัดส่วน $\frac{1}{4}$

ในกรณีที่แกะตัวผู้ขนยาวพันธุ์ทาง(Bb) ผสมกับแกะตัวเมียขนสั้นพันธุ์แท้(bb) พิจารณาดังนี้

รุ่นพ่อแม่



ลูก

ดังนั้น ลูกได้แกะขนยาวพันธุ์ทางเป็นสัดส่วน $\frac{1}{2}$ แกะขนสั้นพันธุ์แท้เป็นสัดส่วน $\frac{1}{2}$

จากการพิจารณารุ่นลูกจากรุ่นพ่อแม่ชนิดที่ 1,2,3 สามารถสรุปได้ดังนี้

	BB	Bb	bb
Bb x BB	$\frac{1}{2}\ a_o$	$\frac{1}{2}\ a_o$	$0\ a_o$
Bb x Bb	$\frac{1}{4}\ b_o$	$\frac{1}{2}\ b_o$	$\frac{1}{4}\ b_o$
Bb x bb	$0\ c_o$	$\frac{1}{2}\ c_o$	$\frac{1}{2}\ c_o$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า

$$a_1 = \frac{1}{2}a_o + \frac{1}{4}b_o + 0\,c_o$$
$$b_1 = \frac{1}{2}a_o + \frac{1}{2}b_o + \frac{1}{2}c_o$$
$$c_1 = 0\,a_o + \frac{1}{4}b_o + \frac{1}{2}c_o$$

โดย a_1, b_1, c_1 เป็นสัดส่วนในรุ่นลูก (รุ่นที่ 1) และสามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ คือ

$$X_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_o \\ b_o \\ c_o \end{pmatrix} = AX_o$$

จากการพิจารณาแกะรุ่นหลาน (รุ่นที่ 2) ชนิดที่ 1,2,3 โดยใช้แกะรุ่นลูกผสมกันแบบเดิม สามารถสรุปได้ดังนี้

	BB	Bb	bb
BB x Bb	$\frac{1}{2}a_1$	$\frac{1}{2}a_1$	$0\,a_1$
Bb x Bb	$\frac{1}{4}b_1$	$\frac{1}{2}b_1$	$\frac{1}{4}b_1$
Bb x bb	$0\,c_1$	$\frac{1}{2}c_1$	$\frac{1}{2}c_1$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}b_1 + 0\,c_1$$
$$b_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}c_1$$
$$c_2 = 0\,a_1 + \frac{1}{4}b_1 + \frac{1}{2}c_1$$

ให้ $X_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ จะได้ $X_2 = AX_1$

แต่ $X_1 = AX_o$

ดังนั้น $X_2 = A^2X_o$

ต่อไปจะพิจารณาแกะในรุ่นที่ 3 ชนิดที่ 1,2,3 โดยใช้แกะรุ่นที่ 2 ผสมกันแบบเดิม จะได้ว่า $X_3 = AX_2 = A(A^2X_o) = A^3X_o$

ในทำนองเดียวกันเมื่อพิจารณาแกะในรุ่นที่ n ชนิดที่ 1,2,3 โดยใช้แกะรุ่นที่ n - 1 ผสมกันแบบเดิม จะได้

$$X_n = A^nX_o \quad \text{โดย} \quad X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

พิจารณาเมตริกซ์ $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

พิจารณา $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ เนื่องจาก $T : R^3 \dashrightarrow R^3$ เป็นเอนโดมอร์ฟิซึม โดยเมตริกซ์แทน T คือ A จะได้ $\lambda = 0, \frac{1}{2}, 1$ เป็นค่าไอเกนของ T และจะได้

$$S = \{X_1 = (1,-2,1),\ X_2 = (1,0,-1),\ X_3 = (1,2,1)\}$$

เป็นฐานที่ประกอบด้วยไอเกนเวกเตอร์

ให้ D เป็นเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน S

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{และ} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{และ} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

จากทฤษฎี 2.4.3 $D = Q^{-1}AQ$ แล้ว $A = QDQ^{-1}$

จากทฤษฎี 2.4.5 $A^n = QD^nQ^{-1}$

พิจารณา

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n+1}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n+1}} \end{pmatrix}$$

เพราะว่า $X_n = A^n X_o$ จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n+1}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_o \\ b_o \\ c_o \end{pmatrix}$$

ดังนั้น

$$a_n = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)a_o + \frac{1}{4}b_o + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)c_o$$

$$b_n = \frac{1}{2}a_o + \frac{1}{2}b_o + \frac{1}{2}c_o$$

$$c_n = \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)a_o + \frac{1}{4}b_o + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)c_o$$

เมื่อ n มีค่ามาก ๆ ในรุ่นที่ n จะได้ว่า

$$a_n \dashrightarrow \frac{1}{4}a_o + \frac{1}{4}b_o + \frac{1}{4}c_o$$

$$b_n \dashrightarrow \frac{1}{2}a_o + \frac{1}{2}b_o + \frac{1}{2}c_o$$

$$c_n \dashrightarrow \frac{1}{4}a_o + \frac{1}{4}b_o + \frac{1}{4}c_o$$

จากตัวอย่าง 3.3.8

ถ้าให้ $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ และ $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

จะได้ $Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

พิจารณา

$$QDQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A$$

นั่นคือ $A = QDQ^{-1}$

จากทฤษฎี 2.4.5 $A^n = QD^nQ^{-1}$

พิจารณา

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2^n} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n+1}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n+1}} \end{pmatrix}$$

เพราะว่า $X_n = A^n X_o$ จะได้ว่า

$$a_n = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)a_o + \frac{1}{4}b_o + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)c_o$$

$$b_n = \frac{1}{2}a_o + \frac{1}{2}b_o + \frac{1}{2}c_o$$

$$c_n = \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)a_o + \frac{1}{4}b_o + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)c_o$$

เมื่อ n มีค่ามาก ๆ ในรุ่นที่ n จะได้ว่า

$$a_n \dashrightarrow \frac{1}{4}a_o + \frac{1}{4}b_o + \frac{1}{4}c_o$$

$$b_n \dashrightarrow \frac{1}{2}a_o + \frac{1}{2}b_o + \frac{1}{2}c_o$$

$$c_n \dashrightarrow \frac{1}{4}a_o + \frac{1}{4}b_o + \frac{1}{4}c_o$$

จะสรุปได้ว่า สัดส่วนในรุ่นที่ n เมื่อ $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ มีค่าเท่ากับ

สัดส่วนในรุ่นที่ n เมื่อ $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ในตัวอย่าง 3.3.8

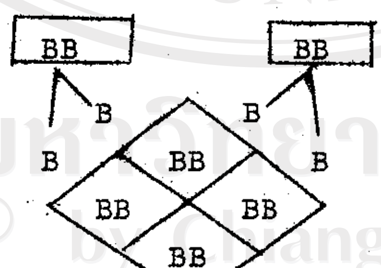
ตัวอย่างที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้เป็นตัวอย่างที่นำทฤษฎีสเปคตรัลไปใช้

<u>ตัวอย่าง 3.3.9</u> ในการทดลองนำหนูตาสีดำ ซึ่งเป็นลักษณะเด่นและถูกควบคุมโดยยีน B กับหนูตาสีน้ำตาล ซึ่งเป็นลักษณะด้อยและถูกควบคุมโดยยีน b ในรุ่นพ่อแม่ชนิดที่ 1 ให้หนูตัวผู้ตาสีดำพันธุ์แท้ (BB) ผสมกับหนูตัวเมียตาสีดำพันธุ์แท้ (BB) ชนิดที่ 2 ให้หนูตัวผู้ตาสีน้ำตาลพันธุ์ทาง (Bb) ผสมกับหนูตัวเมียตาสีน้ำตาลพันธุ์แท้ (bb) ชนิดที่ 3 ให้หนูตัวผู้ตาสีน้ำตาลพันธุ์แท้ (bb) ผสมกับหนูตัวเมียตาสีดำพันธุ์ทาง (Bb) โดย a_o เป็นสัดส่วนของหนูตาสีดำพันธุ์แท้ (BB) b_o เป็นสัดส่วนของหนูตาสีดำพันธุ์ทาง (Bb) และ c_o เป็นสัดส่วนของหนูตาสีน้ำตาลพันธุ์แท้ (bb) ในรุ่นพ่อแม่ ใช้ลักษณะการผสมพันธุ์แบบเดิมที่ใช้ในรุ่นพ่อแม่ในการผสมพันธุ์รุ่นลูกจนเกิดหลาน และผสมกันเช่นนี้จนถึงรุ่นที่ n ให้หา a_n, b_n, c_n โดย a_n, b_n, c_n เป็นสัดส่วนในรุ่นที่ n ของหนูตาสีดำพันธุ์แท้ (BB) หนูตาสีดำพันธุ์ทาง (Bb) และหนูตาสีน้ำตาลพันธุ์แท้ (bb)

<u>วิธีทำ</u> ในกรณีที่หนูตัวผู้ตาสีดำพันธุ์แท้ (BB) ผสมกับหนูตัวเมียตาสีดำพันธุ์แท้ (BB) จะได้ลูก เป็นหนูตาสีดำพันธุ์แท้หมด พิจารณาดังนี้

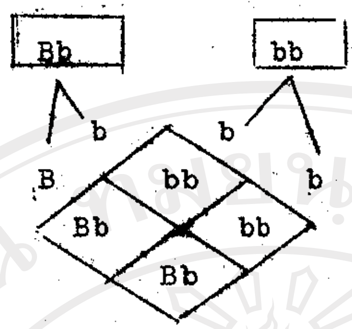
รุ่นพ่อแม่

ลูก (รุ่นที่ 1)



ในกรณีที่หนูตัวผู้ตาสีดำพันธุ์ทาง (Bb) ผสมกับหนูตัวเมียตาสีน้ำตาลพันธุ์แท้ (bb) จะได้ลูกเป็นหนูตาสีดำพันธุ์ทางเป็นสัดส่วน $\frac{1}{2}$ หนูตาสีน้ำตาลพันธุ์แท้เป็นสัดส่วน $\frac{1}{2}$ พิจารณาดังนี้

รุ่นพ่อแม่

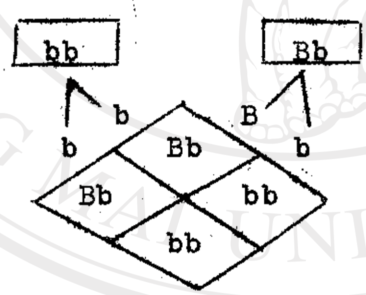


ลูก (รุ่นที่ 1)

ดังนั้นลูก ได้หนูตาสีดำพันธุ์ทาง (Bb) เป็นสัดส่วน $\frac{1}{2}$ และหนูตาสีน้ำตาลพันธุ์แท้ (bb) เป็นสัดส่วน $\frac{1}{2}$

ในกรณีที่หนูตัวผู้ตาสีน้ำตาลพันธุ์แท้ (bb) ผสมกับหนูตัวเมียตาสีดำพันธุ์ทาง (Bb) จะได้ลูกเป็นหนูตาสีน้ำตาลพันธุ์แท้เป็นสัดส่วน $\frac{1}{2}$ และหนูตาสีดำพันธุ์ทางเป็นสัดส่วน $\frac{1}{2}$ พิจารณาดังนี้

รุ่นพ่อแม่



ลูก (รุ่นที่ 1)

ดังนั้นลูก ได้หนูตาสีน้ำตาลพันธุ์แท้เป็นสัดส่วน $\frac{1}{2}$ และหนูตาสีดำพันธุ์ทางเป็นสัดส่วน $\frac{1}{2}$

จากการพิจารณารุ่นลูก และรุ่นพ่อแม่ชนิดที่ 1,2,3 สามารถสรุปได้ดังนี้

	BB	Bb	bb
BB x BB	$1\ a_o$	$0\ a_o$	$0\ a_o$
Bb x bb	$0\ b_o$	$\frac{1}{2}\ b_o$	$\frac{1}{2}\ b_o$
bb x Bb	$0\ c_o$	$\frac{1}{2}\ c_o$	$\frac{1}{2}\ c_o$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า

$$a_1 = 1\,a_o + 0\,b_o + 0\,c_o$$
$$b_1 = 0\,a_o + \frac{1}{2}\,b_o + \frac{1}{2}\,c_o$$
$$c_1 = 0\,a_o + \frac{1}{2}\,b_o + \frac{1}{2}\,c_o$$

โดย a_1, b_1, c_1 เป็นสัดส่วนในรุ่นลูก (รุ่นที่ 1) และสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์คือ

$$X_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_o \\ b_o \\ c_o \end{pmatrix} = CX_o$$

จากการพิจารณาหนูรุ่นหลาน (รุ่นที่ 2) ชนิดที่ 1,2,3 โดยใช้หนูรุ่นลูกผสมกันแบบเดิม สามารถสรุปได้ดังนี้

	BB	Bb	bb
BB x BB	$1\,a_1$	$0\,a_1$	$0\,a_1$
Bb x bb	$0\,b_1$	$\frac{1}{2}\,b_1$	$\frac{1}{2}\,b_1$
bb x Bb	$0\,c_1$	$\frac{1}{2}\,c_1$	$\frac{1}{2}\,c_1$

จะได้ว่า

$$a_2 = 1\,a_1 + 0\,b_1 + 0\,c_1$$
$$b_2 = 0\,a_1 + \frac{1}{2}\,b_1 + \frac{1}{2}\,c_1$$
$$c_2 = 0\,a_1 + \frac{1}{2}\,b_1 + \frac{1}{2}\,c_1$$

ให้ $X_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ จะได้ $X_2 = CX_1$

แต่ $X_1 = CX_o$

ดังนั้น $X_2 = C^2X_o$

ต่อไปจะพิจารณาหนูในรุ่นที่ 3 ชนิดที่ 1,2,3 โดยใช้หนูรุ่นที่ 2 ผสมกันแบบเดิม จะได้

$$X_3 = CX_2 = C(C^2X_o) = C^3X_o$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อพิจารณาหนูในรุ่นที่ n ชนิดที่ 1,2,3 โดยใช้หนูรุ่นที่ n-1 ผสมกันแบบเดิม จะได้

$$X_n = C^nX_o \quad \text{โดย} \quad X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

พิจารณาเมตริกซ์ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ เป็นเมตริกซ์สมมาตร จะใช้ทฤษฎีสเปคตรัล ดังนั้นจะมีฐานประกอบด้วยไอเกนเวกเตอร์และเป็นออร์ธอนอร์มอลเซต ให้ $T : R^3 \longrightarrow R^3$ เป็นเอนโดมอร์ฟิซึมที่เมตริกซ์สัมพันธ์ต่อฐานมาตรฐาน คือ

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ เพราะว่าเมตริกซ์นี้เป็นเมตริกซ์สมมาตร

ดังนั้น T เป็น self-adjont

พิจารณาสมการคาแรคเตอริสติคของ C คือ

$$|\lambda I - C| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda - 1)^2 = 0$$

จะได้ว่า $\lambda = 0, 1$ เป็นค่าไอเกนของ C

ให้ $X = (x,y,z)$ ดังนั้น $[X]_E = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ซึ่งจะหาไอเกนเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเกนได้จาก $(\lambda I - C)[X]_E = 0$

และจะได้ $S = \{Y_1 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), Y_2 = (1,0,0),$

$Y_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$

เป็นฐานที่ประกอบด้วยไอเกนเวกเตอร์ และเป็นออร์ธอนอร์มอลเซต เพราะว่า T เป็นการเปลี่ยนแปลงแบบ self-adjont จากทฤษฎีสเปคตรัล จะได้เมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน S คือ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ให้ D เป็นเมตริกซ์ของ T ที่สอดคล้องกับฐาน S จากทฤษฎี 2.4.3 จะได้ว่า

$D = P^{-1}CP$

โดย $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ และ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

และ $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

เนื่องจาก $C = PDP^{-1}$ จากทฤษฎี 2.4.5 $C^n = PD^nP^{-1}$

พิจารณา

$$C^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

เพราะว่า $X_n = C^nX_o$ จะได้ว่า

$$X_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_o \\ b_o \\ c_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

จะได้ว่า
$$a_n = 1a_o + 0b_o + 0c_o$$
$$b_n = 0a_o + \frac{1}{2}b_o + \frac{1}{2}c_o$$
$$c_n = 0a_o + \frac{1}{2}b_o + \frac{1}{2}c_o$$

ดังนั้น ในรุ่นที่ n

$$a_n = a_o, \; b_n = \frac{1}{2}b_o + \frac{1}{2}c_o$$

และ $$c_n = \frac{1}{2}b_o + \frac{1}{2}c_o$$