บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานเฉพาะที่จำเป็น เพื่อนำไปใช้ในบทที่ 3 และบทที่ 4 โดยจะกล่าวถึงนิยาม ทฤษฎี และตัวอย่าง สำหรับการพิสูจน์ไม่ได้แสดงไว้ แต่ผู้สนใจสามารถศึกษาได้จากหนังสือ และเอกสารที่ระบุไว้ท้ายเล่ม

สัญลักษณ์ที่ใช้ในบทที่ 2, 3, 4 มีดังนี้

$>$	หมายถึง	มากกว่า
$<$	หมายถึง	น้อยกว่า
$\geq$	หมายถึง	มากกว่าหรือเท่ากับ
$\leq$	หมายถึง	น้อยกว่าหรือเท่ากับ
$\in$	หมายถึง	เป็นสมาชิก
$\notin$	หมายถึง	ไม่เป็นสมาชิก
$\subset$	หมายถึง	สับเซต
A^c	หมายถึง	คอมพลีเมนต์ (complement) ของเซต A
$P(X)$	หมายถึง	เซตของสับเซตทั้งหมดของ X
$\emptyset$	หมายถึง	เซตว่าง
N	หมายถึง	เซตของจำนวนธรรมชาติ
Q	หมายถึง	เซตของจำนวนตรรกยะ
R	หมายถึง	เซตของจำนวนจริง
R^+	หมายถึง	เซตของจำนวนจริงบวก
R^n	หมายถึง	เซต $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) / x_i \in R, i = 1, 2, \ldots, n\}$

$A \cap B$ หมายถึง $\{x \,/\, x \in A$ และ $x \in B\}$

$A \cup B$ หมายถึง $\{x \,/\, x \in A$ หรือ $x \in B\}$

$\bigcap_{\alpha \in \lambda} A_\alpha$ หมายถึง อินเตอร์เซคชัน ระหว่าง A_α ทุก $\alpha \in \lambda$

$\bigcup_{\alpha \in \lambda} A_\alpha$ หมายถึง ยูเนียนระหว่าง A_α ทุก ๆ $\alpha \in \lambda$

2.1 <u>เซตและฟังก์ชัน</u> (Sets and Functions)

<u>นิยาม</u> 2.1.1 ให้ X เป็นเซตใด ๆ จะเรียกเซต X ว่า เซตจำกัด ก็ต่อเมื่อ $X = \emptyset$ หรือ X มีสมาชิกแตกต่างกัน จำนวน n ตัว เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

<u>นิยาม</u> 2.1.2 ให้ X เป็นเซตใด ๆ จะเรียกเซต X ว่าเซตอนันต์ ก็ต่อเมื่อ X ไม่เป็นเซตจำกัด

เซตอนันต์แบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท คือ

1. เซตอนันต์ที่นับได้ เช่นเซตของจำนวนเต็ม เซตของจำนวนตรรกยะ
2. เซตอนันต์ที่นับไม่ได้ เช่น เซตของจำนวนจริง

คุณสมบัติของเซตที่จะนำไปใช้มีดังนี้

1. ถ้า $A \cup B = A \cap B$ แล้วจะได้ว่า $A = B$,
2. ให้ I และ K เป็นเซตใด ๆ

   2.1 $\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$ ทุก $i \in I$

   2.2 $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$

2.3 $A \cap (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$

2.4 $(\bigcup_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup_{k \in K} A_k) = \bigcup_{(i,\, k) \in I \times K} (A_i \cap A_k)$

ในที่นี้จะเรียก I, K ว่าเซตดัชนี

<u>นิยาม</u> 2.1.3 ถ้าให้ A และ B เป็นเซต ผลคูณคาร์ทีเซียนของ A กับ B เขียนแทนด้วย $A \times B$ จะหมายถึง เซต

$\{(a,b) \,/\, a \in A$ และ $b \in B\}$ และสำหรับ

$(a,b), (c,d) \in A \times B$

จะได้ว่า $(a,b) = (c,d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

<u>นิยาม</u> 2.1.4 ฟังก์ชัน (function) หมายถึง ความสัมพันธ์ซึ่งคู่ลำดับสองคู่ลำดับใด ๆ ที่ต่างกันในความสัมพันธ์ จะมีสมาชิกในพิกัดที่หนึ่งต่างกัน นั่นคือ ถ้าให้ f เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $(x, y), (x, z) \in f$ แล้ว $y = z$

<u>นิยาม</u> 2.1.5 เรียกเซตของพิกัดที่หนึ่งของคู่ลำดับทั้งหมดของฟังก์ชัน f ว่า โดเมน (domain) ของ f เขียนแทนด้วย D_f เรียกเซตของพิกัดที่สองของคู่ลำดับทั้งหมดของฟังก์ชัน f ว่า เรนจ์ (range) ของ f เขียนแทนด้วย $f(X)$ โดยที่ f เป็นฟังก์ชันจากเซต X ไปยังเซต Y

ต่อไปใช้สัญลักษณ์ $f : X \dashrightarrow Y$ แทน f เป็นฟังก์ชันจาก X ไปยัง Y

<u>นิยาม</u> 2.1.6 ให้ $X \neq \emptyset$ และ $Y \neq \emptyset$ และ $f : X \dashrightarrow Y$

1. เรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันออนทู (onto function) ก็ต่อเมื่อ $f(X) = Y$
2. เรียก f ว่าเป็นฟังก์ชัน 1-1 (one to one function) ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก $x_1, x_2 \in X$ ซึ่ง $f(x_1) = f(x_2)$ จะได้ว่า $x_1 = x_2$

<u>นิยาม</u> 2.1.7 ให้ $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ และ $f : X \dashrightarrow Y$ อินเวอร์สของฟังก์ชัน (inverse function of f) ใช้สัญลักษณ์ f^{-1} คือความสัมพันธ์จาก Y ไปยัง X โดยมีเงื่อนไขว่า $(y, x) \in f^{-1}$ ก็ต่อเมื่อ $(x, y) \in f$

สำหรับคุณสมบัติของฟังก์ชันที่นำไปใช้ในบทที่ 3 , บทที่ 4 มีดังต่อไปนี้

ถ้า $f : X \dashrightarrow Y$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $A, B \subset X$ และ $C, D \subset Y$ แล้วจะได้ว่า

1. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $f(A) \subset f(B)$
2. ถ้า $C \subset D$ แล้ว $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

3. $f(f^{-1}(A)) \subset A$

4. $f^{-1}(f(A)) \supset A$

5. ถ้า f เป็นฟังก์ชันออนทูแล้ว $f(f^{-1}(A)) = A$

<u>นิยาม</u> 2.1.8 ให้ $A \subset R$ ซึ่ง $A \neq \emptyset$

จะเรียก $a \in R$ ว่าเป็นขอบเขตล่าง (lowerbound) ของ A ถ้า $a \leq x$ สำหรับทุก $x \in A$

จะเรียกเซต A ว่าเป็นเซตที่มีขอบเขตล่าง (lowerbound set) ถ้า A มีขอบเขตล่าง

<u>นิยาม</u> 2.1.9 ให้ $A \subset R$ ซึ่ง $A \neq \emptyset$

ถ้า A มีขอบเขตล่าง จะเรียก $a \in R$ ว่าเป็น ขอบเขตล่างค่ามากสุด (greatest lowerbound) ของ A ซึ่งเขียนแทนด้วย $\inf A$ ถ้า a เป็นขอบเขตล่างของ A และ $a \geq b$ สำหรับทุก ๆ b ที่เป็นขอบเขตล่างของ A

2.2 <u>ปริภูมิเมตริก</u> (Metric spaces)

<u>นิยาม</u> 2.2.1 ให้ $X \neq \emptyset$ จะเรียกฟังก์ชัน $d : X \times X \longrightarrow R$ ว่าเป็นเมตริก (metric) บนเซต X ก็ต่อเมื่อ d มีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $d(x, y) \geq 0$ สำหรับทุก $x, y \in X$

2. $d(x, y) = d(y, x)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

3. $d(x, z) \leq d(x,y) + d(y, z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

4. $d(x, x) = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

5. ถ้า $x, y \in X$ และ $d(x, y) = 0$ แล้ว $x = y$

เรียก $d(x, y)$ ว่าระยะทางระหว่าง x กับ y

และจะเรียกฟังก์ชัน d ว่า ซูโดเมตริก (pseudo metric)

ถ้า d สอดคล้องเงื่อนไขเพียง 4 ข้อแรก

<u>ตัวอย่าง</u> 2.2.1 ให้ $X = R$ และ $d : R \times R \longrightarrow R$ โดยที่

$$d(x, y) = |x - y| \quad \text{สำหรับทุก } x, y \in R$$

จากคุณสมบัติของค่าสัมบูรณ์ สามารถแสดงได้ว่า d เป็นเมตริกบน R

$\square$

<u>นิยาม</u> 2.2.2 จะเรียกเซต $X \neq \emptyset$ พร้อมด้วยเมตริก d ว่าเป็นปริภูมิเมตริก (metric space) และแทนด้วยสัญลักษณ์ (X, d)

<u>นิยาม</u> 2.2.3 จะเรียกเซต $X \neq \emptyset$ พร้อมด้วยซูโดเมตริก d ว่าเป็นปริภูมิซูโดเมตริก (pseudometric space) และแทนด้วยสัญลักษณ์ (X, d)

<u>ข้อสังเกต</u> 2.2.1 จากนิยาม 2.2.1 จะเห็นว่าทุก ๆ ปริภูมิเมตริก เป็นปริภูมิซูโดเมตริก

<u>นิยาม</u> 2.2.4 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิซูโดเมตริก โดยมี $p \in X$ และ $\varepsilon > 0$ จะนิยาม $B(p, \varepsilon) = \{x \in X / d(x,p) < \varepsilon\}$ และเรียก $B(p, \varepsilon)$ ว่าเป็นบอลล์เปิด (open ball) ที่มีจุดศูนย์กลางที่ p รัศมี ε

<u>ตัวอย่าง</u> 2.2.2 ให้เซต R กับซูโดเมตริก $d(x, y) = |x - y|$ เมื่อ $x, y \in R$

ให้ $x_o \in R$ จะได้บอลล์เปิด

$$\begin{aligned} B(x_o, r) &= \{x / x \in R, |x - x_o| < r\} \text{ เมื่อ } r > 0 \\ &= \{x / x \in R, -r < x - x_o < r\} \\ &= \{x / x \in R, x_o - r < x < x_o + r\} \\ &= (x_o - r, x_o + r) \end{aligned}$$

นั่นคือ บอลล์เปิดรอบจุด x_o ใน R เป็นช่วงเปิด $(x_o - r, x_o + r)$

□

<u>นิยาม</u> 2.2.5 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิซูโดเมตริก และ $A \subset X$, A เป็นเซตเปิด ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x \in A$ จะมี $\varepsilon_x > 0$ ซึ่ง $B(x, \varepsilon_x) \subset A$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.2.3 ให้เซต $X \neq \emptyset$ และ $d : X \times X \longrightarrow R$ กำหนดโดย

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & , x = y \\ 1 & , x \neq y \end{cases}$$

จะได้ว่า สับเซต (subset) ที่มีสมาชิกตัวเดียว ทั้งหมดของ X คือ $\{x\}$ สำหรับทุก $x \in X$ เป็นเซตเปิด เพราะ

$B_d(x, 1) = \{x\} \subset \{x\}$ สำหรับทุก $x \in X$

□

ทฤษฎี 2.2.1 ทุกบอลล์เปิดเป็นเซตเปิด

พิสูจน์ ดูรายละเอียดจาก [5] หน้า 50

นิยาม 2.2.6 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิซูโดเมตริก และ $F \subset X$ จะเรียก F ว่าเป็นเซตปิด (closed set) ก็ต่อเมื่อ F^c เป็นเซตเปิด

ตัวอย่าง 2.2.4 ให้เซต R กับซูโดเมตริก $d(x, y) = |x - y|$ เมื่อ $x, y \in R$

$[a, b]^c = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$

เนื่องจาก $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ เป็นเซตเปิดดังนั้น $[a, b]$ เป็นเซตปิด

□

ทฤษฎี 2.2.2 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิซูโดเมตริก จะได้ว่า

1. $X, \emptyset$ เป็นเซตเปิด
2. ถ้า A, B เป็นเซตเปิดแล้ว $A \cap B$ เป็นเซตเปิด
3. ถ้า A_i เป็นเซตเปิด สำหรับทุก $i \in I$ แล้ว $\bigcup_{i \in I} A_i$ เป็นเซตเปิด

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [9] หน้า 121 - 122

<u>ทฤษฎี</u> 2.2.3 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิซูโดเมตริก จะได้ว่า

1. $X, \emptyset$ เป็นเซตปิด
2. ถ้า A, B เป็นเซตปิดแล้ว $A \cup B$ เป็นเซตปิด
3. ถ้า A_i เป็นเซตปิด สำหรับทุก $i \in I$ แล้ว $\bigcap_{i \in I} A_i$ เป็นเซตปิด

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [12] หน้า 65 - 66

<u>นิยาม</u> 2.2.7 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิซูโดเมตริก และ A, B เป็นสับเซตที่ไม่ใช่เซตว่างของ X สำหรับ $p \in X$ จะนิยามระยะทางระหว่าง p กับ A คือ

$$d(p, A) = \inf \{d(x, p) / x \in A\}$$

และระยะทางระหว่าง A กับ B คือ

$$d(A, B) = \inf\{d(a,b) / a \in A, b \in B\}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.2.5 ให้เซต $X = R$ กับซูโดเมตริก $d(x, y) = |x - y|$ เมื่อ $x, y \in R$, ให้ $A = [0, 1]$ และ $B = [2, 3]$ จะได้ $d(A, B) = \inf\{d(a,b) / a \in A, b \in B\} = 1$ □

<u>หมายเหตุ</u> 2.2.1 ให้ $n \in N$ และ (R^n, d) เป็นปริภูมิชูโดเมตริก โดยที่

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

สำหรับทุก $x = (x_1, x_1, \dots, x_n)$ และ

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$

ในกรณีเช่นนี้เรียก d ว่า ยูชวลเมตริก (usual metric)

2.3 <u>ปริภูมิโทโพโลยีและปริภูมิย่อย</u> (Topological spaces and Subspaces)

<u>นิยาม</u> 2.3.1 ให้เซต $X \neq \emptyset$ และ J เป็นเซตของสับเซตของ X จะเรียก J ว่าเป็นโทโพโลยี (topology) สำหรับ X ก็ต่อเมื่อ J มีคุณสมบัติ

1. $X, \emptyset \in J$
2. ถ้า $A, B \in J$ แล้ว $A \cap B \in J$
3. ถ้า $A_i \in J$ สำหรับทุก $i \in I$ แล้ว $\bigcup_{i \in I} A_i \in J$

และจะเรียกสมาชิกใน J ว่าเซตเปิด

<u>หมายเหตุ</u> 2.3.1 จากนิยาม 2.3.1(2) จะได้ว่า ถ้า $A_1, A_2, \dots, A_n \in J$ แล้ว $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in J$

<u>หมายเหตุ</u> 2.3.2 จากนิยาม 2.3.1 จะได้ว่าเพาเวอร์เซตของ X จะเป็น โทโพโลยี สำหรับ X และเรียกว่า ดีสครีตโทโพโลยี (discrete topology) เขียนแทนด้วย $\mathcal{J}_D$ และจะได้ว่า ถ้าทุกสับเซตของ X ที่มีสมาชิก 1 ตัว เป็นสมาชิกในโทโพโลยี สำหรับ X แล้ว โทโพโลยีนั้นคือ $\mathcal{J}_D$

<u>นิยาม</u> 2.3.2 ให้ $\mathcal{J}$ เป็นโทโพโลยีสำหรับ X จะเรียก $(X, \mathcal{J})$ ว่าปริภูมิโทโพโลยี (topological space)

<u>ตัวอย่าง</u> 2.3.1 ให้ $X = \{a,b,c\}$, $\mathcal{J} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$
จะได้ว่า $\mathcal{J}$ เป็นโทโพโลยีสำหรับ X

□

<u>นิยาม</u> 2.3.3 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิซูโดเมตริก และ

$$\mathcal{J}_d = \{G \subset X \ / \ G \text{ เป็นเซตเปิดของ } X\}$$

จะได้ว่า $\mathcal{J}_d$ เป็นโทโพโลยีสำหรับ X ดังนั้นจะเรียก $(X, \mathcal{J}_d)$ ว่าเป็นปริภูมิโทโพโลยี ที่กำหนดโดยซูโดเมตริก d

<u>นิยาม</u> 2.3.4 ให้ $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิโทโพโลยี ถ้ามีซูโดเมตริก d สำหรับ X ซึ่ง $\mathcal{J}_d = \mathcal{J}$ แล้วจะเรียก $(X, \mathcal{J})$ ว่าเป็น ปริภูมิซูโดเมตไทรเซเบิล (pseudometrizable space)

<u>นิยาม</u> 2.3.5 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี ถ้ามีเมตริก d สำหรับ X ซึ่ง $J_d = J$ แล้วจะเรียก (X, J) ว่าเป็นปริภูมิเมตไทรเซเบิล (metrizable space)

<u>ตัวอย่าง</u> 2.3.2 ให้ (R^n, d) เป็นปริภูมิเมตริก และ d เป็นยูชวลเมตริกบน R^n โดยที่ J_d เป็นโทโพโลยีที่เกิดจาก d แล้ว จะได้ว่า (R^n, J_d) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และจะเรียก J_d ในกรณีนี้ว่า ยูชวลโทโพโลยี (usual topology) ซึ่งเขียนแทนด้วย J_u

□

<u>นิยาม</u> 2.3.6 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ $F \subset X$ จะเรียก F ว่าเป็นเซตปิด ก็ต่อเมื่อ F^c เป็นเซตเปิด

<u>ตัวอย่าง</u> 2.3.3 ให้ $X = \{a,b,c\}$, $J = \{\emptyset, \{a,b\}, \{b\}, \{b,c\}, X\}$

จะได้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี

เซตปิดได้แก่ $X, \{c\}, \{a,c\}, \{a\}, \emptyset$

□

<u>ทฤษฎี</u> 2.3.1 สำหรับปริภูมิโทโพโลยี (X, J) จะได้ว่า

1. $X, \emptyset$ เป็นเซตปิด
2. ถ้า A, B เป็นเซตปิด แล้ว $A \cup B$ เป็นเซตปิด
3. ถ้า A_i เป็นเซตปิด สำหรับทุก $i \in I$ แล้ว $\bigcap_{i \in I} A_i$ เป็นเซตปิด

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [7] หน้า 24 - 25

<u>นิยาม</u> 2.3.7 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี จะเรียกสับเซต W ของ X ว่าเป็น<u>เนเบอร์ฮูด</u> (neighborhood) ของ $x \in X$ ก็ต่อเมื่อ มี $G \in J$ ซึ่ง $x \in G \subset W$ และจะเรียก W ว่าเป็นเนเบอร์ฮูดของ $A \subset X$ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก $a \in A$ มี $U \in J$ ซึ่ง $a \in U \subset W$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.3.4 กำหนดให้ $X = \{a, b, c, d, e\}$

$J = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$

เนเบอร์ฮูดของ e ทั้งหมดคือ

$\{a,b,e\}, \{a,b,e,c\}, \{a,b,e,d\}, X$

เนเบอร์ฮูดของ $\{b,c\}$ คือ $\{a,b,c,d\}, X$

□

<u>ทฤษฎี</u> 2.3.2 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ $G \subset X$, G เป็นเซตเปิด ก็ต่อเมื่อ G เป็นเนเบอร์ฮูดของทุกสมาชิกใน G.

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [9] หน้า 81

<u>สัญลักษณ์</u> 2.3.1 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ $x \in X$

สัญลักษณ์ $n(x)$ หมายถึง เซตของเนเบอร์ฮูดทั้งหมดของ x

<u>นิยาม</u> 2.3.8 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ $\beta \subset J$

จะเรียก β ว่าเป็น เบส (base) สำหรับ J ก็ต่อเมื่อทุก

สมาชิกใน J สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $\bigcup_{i \in I} B_i$ โดยที่ $B_i \in \beta$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.3.5 ให้ $X = \{a,b,c,d\}$ และโทโพโลยี สำหรับ X คือ

$J = \{\emptyset, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, X\}$

และกำหนด $\beta = \{\{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, X\}$

จะเห็นว่า J รวม $\emptyset$ ไว้ด้วย และ $\emptyset = \bigcup_{\alpha \in \emptyset} A_\alpha$, $A_\alpha \in \beta$

ซึ่งทำให้ $\emptyset$ เกิดจากการยูเนียนของสมาชิกใน β

นอกจากนี้เราจะตรวจสอบได้ว่า ทุกสมาชิกใน J เป็นการยูเนียนของ

สมาชิกใน β ดังนั้น β เป็นเบสสำหรับ J บน X

□

<u>ทฤษฎี</u> 2.3.3 ให้เซต $X \neq \emptyset$ และ β เป็นเซตของสับเซตของ X

โดยที่ $X = \bigcup \{B \mid B \in \beta\}$

จะได้ว่า β เป็นเบสสำหรับบางโทโพโลยี บน X ก็ต่อเมื่อ

สำหรับทุก $U, V \in \beta$ และ $x \in U \cap V$

จะมี $W \in \beta$ ซึ่ง $x \in W \subset U \cap V$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [8] หน้า 47

<u>นิยาม</u> 2.3.9 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ $S \subset P(X)$

จะเรียก S ว่าเป็นสับเบส (Subbase) สำหรับ J

ก็คือเมื่อ $\beta = \{B \,/\, B$ เป็นอินเตอร์เซคชันแบบจำกัดของสมาชิกใน $S\}$
เป็นเบสสำหรับ J

<u>ทฤษฎี</u> 2.3.4 ให้เซต $X \neq \emptyset$ และถ้า $S \subset P(X)$ แล้วจะมี J
เป็นโทโพโลยีเพียงโทโพโลยีเดียวที่มี S เป็นสับเบส

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [5] หน้า 183

<u>นิยาม</u> 2.3.10 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี , $A \subsetneq X$ และ $p \in X$
จะเรียก p ว่า <u>จุดลิมิต</u> (limit point) ของ A ก็ต่อเมื่อ
ทุกเนเบอร์ฮูด V ของ p ใน X
$V \cap (A - \{p\}) \neq \emptyset$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.3.6 ให้ $X = \{a,b,c,d,e\}$

และ $J = \{\emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}, X\}$

ให้ $A = \{a,b,c\}$ และ $b \in X$ เป็นจุดลิมิตของ A ทั้งนี้
เพราะเนเบอร์ฮูดของ b ใน X มี $\{b,c,d,e\}$ กับ X
ซึ่ง $\{b,c,d,e\} \cap (A - \{b\}) = \{c\}$
และ $X \cap (A - \{b\}) = \{a,c\}$
ทำนองเดียวกันก็สามารถแสดงได้ว่า d, e ต่างก็เป็นจุดลิมิตของ A
แต่ a ไม่เป็นจุดลิมิตของ A เพราะ $\{a\}$ เป็น
เนเบอร์ฮูดของ a

แต่ $\{a\} \cap (A - \{a\}) = \emptyset$

ทำนองเดียวกัน c ก็ไม่เป็นจุดลิมิตของ A

$\square$

<u>สัญลักษณ์</u> 2.3.2 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ $A \subset X$ สัญลักษณ์

A' หมายถึง เซตของจุดลิมิตทั้งหมดของ A

นั่นคือ $A' = \{p \in X \,/\, p$ เป็นจุดลิมิตของ $A\}$

<u>นิยาม</u> 2.3.11 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี , $A \subset X$, โคลเชอร์

(closure) ของ A

เขียนแทนด้วย $\bar{A}$ หมายถึง $A \cup A'$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.3.7 ให้ $X = \{a,b,c\}$, $J = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, X, \{b\}\}$

จะได้ J เป็นโทโพโลยีบน X

ให้ $A = \{a,b\}$, จะได้ c เป็นจุดลิมิตของ A เพราะ

เนเบอร์ฮูดของ c ใน X คือ X ซึ่ง $X \cap (A - \{c\}) \neq \emptyset$

แต่ a, b ไม่เป็นจุดลิมิตของ A เพราะ $\{a\} \cap (A - \{a\}) = \emptyset$

และ $\{b\} \cap (A - \{b\}) = \emptyset$,

ดังนั้น $A' = \{c\}$ จะได้ $\bar{A} = \{a,b\} \cup \{c\}$

นั่นคือ $\bar{A} = X$

$\square$

<u>ทฤษฎี</u> 2.3.5 ให้ $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ $A \subset X$ จะได้ว่า $x \in \bar{A}$ ก็ต่อเมื่อ $V \cap A \neq \emptyset$ สำหรับทุกเนเบอร์ฮูด V ของ x ใน X

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [13] หน้า 21

<u>ทฤษฎี</u> 2.3.6 ให้ A, B เป็นสับเซตใด ๆ ของปริภูมิโทโพโลยี $(X, \mathcal{J})$ จะได้ว่า

1. $A \subset \bar{A}$
2. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $\bar{A} \subset \bar{B}$
3. A เป็นเซตปิดก็ต่อเมื่อ $A = \bar{A}$
4. $\bar{A}$ เป็นเซตปิดที่เล็กที่สุดที่คลุม A
5. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$
6. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
7. $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [9] หน้า 79

<u>นิยาม</u> 2.3.12 ให้ $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิโทโพโลยี , $A \subset X$ และ $b \in X$ จะเรียก b ว่าเป็น จุดบาวดารี (boundary point) ของ A

ก็ต่อเมื่อ ทุกเนเบอร์ฮูด V ของ b ใน X ได้ว่า $V \cap A \neq \emptyset$ และ $V \cap (X - A) \neq \emptyset$

<u>สัญลักษณ์</u> 2.3.3 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ $A \subset X$ สัญลักษณ์ Bdr A หมายถึง เซตของจุดบาวดารีทั้งหมดของ A นั่นคือ

$$\text{Bdr } A = \{x \in X \,/\, V \cap A \neq \emptyset \text{ และ } V \cap (X - A) \neq \emptyset$$

สำหรับทุกเนเบอร์ฮูด V ของ $x\}$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.3.8 ให้ $X = \{a,b,c,d,e\}$ และ

$$J = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,e\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, X\}$$

ให้ $A = \{a,b,c\}$ จะได้ว่า c เป็นจุดบาวดารีของ A เพราะเนเบอร์ฮูดของ c ใน X คือ

$\{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,e,c,d\}, X$ ซึ่ง

$\{a,c,d\} \cap \{a,b,c\} \neq \emptyset$ และ $\{a,c,d\} \cap (X - \{a,b,c\}) \neq \emptyset$

$\{a,b,c,d\} \cap \{a,b,c\} \neq \emptyset$ และ $\{a,b,c,d\} \cap (X - \{a,b,c\}) \neq \emptyset$

$\{a,e,c,d\} \cap \{a,b,c\} \neq \emptyset$ และ $\{a,e,c,d\} \cap (X - \{a,b,c\}) \neq \emptyset$

$X \cap \{a,b,c\} \neq \emptyset$ และ $X \cap (X - \{a,b,c\}) \neq \emptyset$

ทำนองเดียวกันได้ว่า d, e เป็นจุดบาวดารีของ A แต่ a ไม่เป็นจุดบาวดารีของ A เพราะ $\{a\}$ เป็นเนเบอร์ฮูดของ a ซึ่ง $\{a\} \cap (X - A) = \emptyset$ ทำนองเดียวกัน b ก็ไม่เป็นจุดบาวดารีของ A ดังนั้น Bdr $A = \{c,d,e\}$

□

<u>ทฤษฎี</u> 2.3.7 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และถ้า $A \subset X$ แล้ว

$$\bar{A} = A \cup \text{Bdr } A$$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [11] หน้า 23

<u>ทฤษฎี</u> 2.3.8 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ $Y \subset X$ จะได้ว่า

$J_Y = \{ U \subset Y / U = G \cap Y$ สำหรับบาง $G \in J\}$

เป็นโทโพโลยี สำหรับ Y นั่นคือ (Y, J_Y) เป็นปริภูมิโทโพโลยี

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [9] หน้า 83

<u>นิยาม</u> 2.3.13 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ $Y \subset X$ จะเรียก (Y, J_Y) ว่าเป็นปริภูมิย่อย (subspace) ของ (X, J)

<u>ตัวอย่าง</u> 2.3.9 ให้ $X = \{a,b,c\}$, โทโพโลยี สำหรับ

$X = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

ให้ $A = \{a,b\}$ ซึ่ง $A \subset X$

ดังนั้น $J_A = \{A, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ เป็นโทโพโลยีสำหรับ A

□

<u>ทฤษฎี</u> 2.3.9 ให้ (Y, J_Y) เป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิโทโพโลยี (X, J_X) และ $A \subset Y$ แล้ว $\bar{A}$ (ใน Y) $= Y \cap \bar{A}$ (ใน X)

พิสูจน์ ดูรายละเอียดจาก [13] หน้า 26

นิยาม 2.3.14 จะเรียกคุณสมบัติ P บนปริภูมิโทโพโลยี (X, J) ว่าเป็นเฮริดิทารี (hereditary) ก็ต่อเมื่อ ถ้า (X, J) มีคุณสมบัติ P แล้ว ทุกปริภูมิย่อยของ (X, J) มีคุณสมบัติ P

2.4 ฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous Functions)

นิยาม 2.4.1 ให้ (X, J_X) และ (Y, J_Y) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ $f : (X, J_X) \dashrightarrow (Y, J_Y)$ จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x_o \in X$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $M \in n(f(x_o))$ จะได้ว่า $f^{-1}(M) \in n(x_o)$ และจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน X ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องที่ทุก $x \in X$

ทฤษฎี 2.4.1 ให้ (X, J_X) และ (Y, J_Y) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ $f : (X, J_X) \dashrightarrow (Y, J_Y)$ จะได้ประพจน์ต่อไปนี้สมมูลกัน

1. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน X
2. ถ้า $U \in J_Y$ แล้ว $f^{-1}(U) \in J_X$
3. ถ้า K เป็นเซตปิดใน Y แล้ว $f^{-1}(K)$ เป็นเซตปิดใน X
4. ถ้า $A \subset X$ แล้ว $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [2] หน้า 25 - 26

<u>นิยาม</u> 2.4.2 ให้ (X, J_X) และ (Y, J_Y) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ $f : (X, J_X) \longrightarrow (Y, J_Y)$ จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันเปิด (ฟังก์ชันปิด) ก็ต่อเมื่อ ถ้า $G \in J_X$ แล้ว $f(G) \in J_Y$ (ถ้า K เป็นเซตปิดใน X แล้ว f(K) เป็นเซตปิดใน Y)

<u>นิยาม</u> 2.4.3 ให้ (X, J_X) และ (Y, J_Y) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ $f : (X, J_X) \longrightarrow (Y, J_Y)$ จะเรียก f ว่าเป็นโฮมิโอมอร์ฟิซึม (homeomorphism) จาก X ไปยัง Y ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1-1, ออนทู, ต่อเนื่อง และ f^{-1} ต่อเนื่อง

<u>หมายเหตุ</u> 2.4.1 ถ้า f เป็นโฮมิโอมอร์ฟิซึม จาก X ไปยัง Y แล้ว f^{-1} จะเป็นโฮมิโอมอร์ฟิซึม จาก Y ไปยัง X ดังนั้นจะเรียกปริภูมิโทโพโลยี (X, J_X) และ (Y, J_Y) ว่า โฮมิโอมอร์ฟิค (homeomorphic) ซึ่งกันและกัน

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.2 ให้ (X, J_X) และ (Y, J_Y) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ $f : (X, J_X) \longrightarrow (Y, J_Y)$ โดยที่ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และออนทู จะได้ว่าประพจน์ต่อไปนี้สมมูลกัน

1. f เป็นโฮมีโอมอร์ฟิซึม

2. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและฟังก์ชันเปิด

3. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและฟังก์ชันปิด

4. สำหรับทุก $A \subset X$ จะได้ว่า $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [7] หน้า 74

<u>นิยาม</u> 2.4.4 จะเรียกคุณสมบัติ P บนปริภูมิโทโพโลยี ว่าเป็นโทโพโลจิคัล อินแวเรียนท์ (topological invariant) ก็ต่อเมื่อ ถ้าสเปซ (X, J) มีคุณสมบัติ P แล้ว สเปซที่โฮมีโอมอร์ฟิค กับ (X, J) มีคุณสมบัติ P ด้วย

2.5 <u>ปริภูมิผลคูณ</u> (Product spaces)

<u>ทฤษฎี</u> 2.5.1 ให้ (X_1, J_1), (X_2, J_2) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ

$\beta = \{U \times V \,/\, U \in J_1, V \in J_2\}$

จะได้ว่า β เป็นเบสสำหรับบางโทโพโลยีบน $X_1 \times X_2$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [4] หน้า 64

<u>นิยาม</u> 2.5.1 โทโพโลยีที่ได้จากทฤษฎี 2.5.1 จะเรียกว่า โปรดักโทโพโลยี (product topology) สำหรับ $X_1 \times X_2$ เขียนแทนด้วย J_p

<u>ทฤษฎี</u> 2.5.2 ให้ (X_1, J_1) , (X_2, J_2) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ

$J_p = \{G \subset X_1 \times X_2 /$ สำหรับทุก $(x_1, x_2) \in G$ จะมี

$U \in J_1, V \in J_2$ ซึ่ง $(x_1, x_2) \in U \times V \subset G\}$

จะได้ว่า J_p เป็นโทโพโลยี สำหรับ $X_1 \times X_2$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [4] หน้า 65

<u>นิยาม</u> 2.5.2 ให้ $P_1 : X_1 \times X_2 \dashrightarrow X_1$ และ

$P_2 : X_1 \times X_2 \dashrightarrow X_2$

โดยที่ $P_1((x_1, x_2)) = x_1$ และ $P_2((x_1, x_2)) = x_2$

สำหรับ $x_1 \in X_1$ และ $x_2 \in X_2$ จะเรียก P_1 ว่าเป็น

โปรเจคชันของ $X_1 \times X_2$ ไปบนแกน X_1 และ P_2 เป็นโปรเจคชัน

ของ $X_1 \times X_2$ ไปบนแกน X_2

<u>ทฤษฎี</u> 2.5.3 โปรเจกชัน P_1 และ P_2 เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและฟังก์ชันเปิด

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [4] หน้า 67

<u>ข้อสังเกต</u> 2.5.1 ให้ (X_1, J_1), (X_2, J_2) เป็นปริภูมิโทโพโลยี ถ้า U

เป็นเซตเปิดใน X_1

V เป็นเซตเปิดใน X_2 แล้ว $U \times V$ เป็นเซตเปิดใน $X_1 \times X_2$

ในทำนองเดียวกันถ้า (X_i, J_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ เป็นปริภูมิโทโพโลยี แล้ว เบสสำหรับโปรดักโทโพโลยีบนเซต

$\prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ คือ β และ

$\beta = \{ \prod_{i=1}^{n} U_i \ / \ U_i \in J_i$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \ldots, n\}$

และเรียก โทโพโลยีที่เกิดจาก β **นี้ว่า**โปรดักโทโพโลยีบน $\prod_{i=1}^{n} X_i$

ให้ $P_k : \prod_{i=1}^{n} X_i \dashrightarrow X_k$ สำหรับ $1 \leq k \leq n$

โดยที่ $P_k(x) = x_k$

เมื่อ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i$

จะเรียก P_k ว่าเป็นโปรเจคชันของ $\prod_{i=1}^{n} X_i$ ไปบนแกน X_k และ P_k เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และฟังก์ชันเปิด

<u>นิยาม</u> 2.5.3 ให้ $\{(X_i, J_i) \ / \ i \in I\}$ เป็นเซตของปริภูมิโทโพโลยี โดยที่ I เป็นเซตดัชนี ผลคูณของปริภูมิเหล่านี้ จะแทนด้วย

$\prod_{i \in I} X_i$ และ

$$\underset{i\in I}{\pi} X_i = \{x \ / \ x : I \dashrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i \text{ โดยที่ } x(i) \in X_i\}$$

ต่อไปจะเขียน x_i แทน $x(i)$

<u>นิยาม</u> 2.5.4 ให้ $P_c : \underset{i\in I}{\pi} X_i \dashrightarrow X_c$ โดยที่ $P_c(x) = x_c$ จะเรียก P_c ว่าเป็นโปรเจคชัน (projection) ของ $\underset{i\in I}{\pi} X_i$ ไปยัง X_c

<u>หมายเหตุ</u> 2.5.1 P_c ในนิยาม 2.5.4 **เป็นฟังก์ชันออนทู**

<u>นิยาม</u> 2.5.5 ให้ $S = \{P_i^{-1}(U_i) \ / \ U_i \in J_i$ สำหรับทุก $i \in I\}$ จะเรียกโทโพโลยีที่มี S เป็นสับเบสว่าโปรดักโทโพโลยี (product topology) บน $\underset{i\in I}{\pi} X_i$ และเขียนแทนด้วย $\underset{i\in I}{\pi} J_i$

ให้ U เป็นสมาชิกในเบสของโปรดักโทโพโลยีบน $\underset{i\in I}{\pi} X_i$ จะได้ว่า

$U = \bigcap \{P_i^{-1}(U_i) \ / \ i \in F\}$ โดยที่ F เป็นสับเซตจำกัดของ I

$= \{x \ / \ x_i \in U_i$ สำหรับทุก $i \in F\}$ โดยที่ F เป็นสับเซตจำกัดของ I และ U_i เป็นเซตเปิดใน X_i สำหรับทุก $i \in F$

<u>นิยาม</u> 2.5.6 ถ้า (X_i, J_i) สำหรับทุก $i \in I$ เป็นปริภูมิโทโพโลยีที่มีคุณสมบัติ P แล้วจะได้ปริภูมิผลคูณ $(\pi_{i\in I} X_i, \pi_{i\in I} J_i)$ มีคุณสมบัติ P ด้วย จะเรียกคุณสมบัติ P ว่าคุณสมบัติโปรดักทีฟ (productive property)

<u>ทฤษฎี</u> 2.5.4 ให้ (X_i, J_i) สำหรับทุก $i \in I$ เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ $(\pi_{i\in I} X_i, \pi_{i\in I} J_i)$ เป็นปริภูมิผลคูณ จะได้ว่า สำหรับทุก $i \in I$ (X_i, J_i) โฮมิโอมอร์ฟิคกับปริภูมิย่อยของ $(\pi_{i\in I} X_i, \pi_{i\in I} J_i)$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [4] หน้า 71

<u>ทฤษฎี</u> 2.5.5 ให้ $\{(X_i, J_i) / i \in I\}$ เป็นเซตของปริภูมิโทโพโลยี และ $\pi_{i\in I} J_i$ เป็นโปรดักโทโพโลยีบน $\pi_{i\in I} X_i$ สำหรับทุก $i \in I$ จะได้ว่า โปรเจคชัน P_c เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและฟังก์ชันเปิด

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียด [4] หน้า 76

2.6 <u>ปริภูมิโควเชียนท์</u> (Quotient spaces)

<u>นิยาม</u> 2.6.1 ความสัมพันธ์ r ในเซต X จะเรียกว่าเป็นความสัมพันธ์สมมูล ก็ต่อเมื่อ r มีคุณสมบัติดังนี้

1. $(a, a) \in r$ สำหรับทุก $a \in X$ และเรียกว่าคุณสมบัติสะท้อน

2. ถ้า $(a, b) \in r$ แล้ว $(b, a) \in r$ สำหรับทุก $a, b \in X$ และเรียกว่าคุณสมบัติสมมาตร

3. ถ้า $(a, b) \in r$ และ $(b, c) \in r$ แล้ว $(a, c) \in r$ สำหรับทุก $a, b, c, \in X$ และเรียกว่าคุณสมบัติถ่ายทอด

<u>นิยาม</u> 2.6.2 ให้ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลในเซต X สำหรับแต่ละ $a \in X$ ให้ $[a]$ แทนเซตที่ประกอบด้วยสมาชิก b ใน X ซึ่ง $(a, b) \in r$ นั่นคือ $[a] = \{b \in X / (a, b) \in r\}$

โดยที่ $[a] \subset X$

จะเรียก $[a]$ นี้ว่า ชั้นสมมูลของ a

<u>สัญลักษณ์</u> 2.6.1 ให้ $X_{/r}$ แทนเซตของชั้นสมมูลทั้งหมดของความสัมพันธ์สมมูล r

ดังนั้น $X_{/r} = \{ [a] / a \in X \}$

<u>ทฤษฎี</u> 2.6.1 ให้ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลในเซต X ดังนั้น

1. สำหรับทุก $a \in X$, $[a] \neq \emptyset$

2. ถ้า $b \in [a]$ แล้ว $[b] = [a]$

3. สำหรับทุก $a, b \in X$ จะได้ $[a] \cap [b] = \emptyset$ หรือ $[a] = [b]$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

4. สำหรับทุก $a, b \in X$ จะได้ $[a] = [b]$ ก็ต่อเมื่อ $(a, b) \in r$

5. ยูเนียนของสมาชิกใน $X_{/r}$ จะเท่ากับ X หรือ ใช้สัญลักษณ์ $X = \bigcup \{ [a] \,/\, a \in X \}$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [2] หน้า 9

<u>นิยาม</u> 2.6.3 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน X กำหนดฟังก์ชัน $P : X \longrightarrow X_{/r}$ โดย $P(x) = [x]$ แล้วจะเรียก P ว่า โปรเจคชันฟังก์ชัน (projection function) จาก X ไปบน $X_{/r}$

<u>นิยาม</u> 2.6.4 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน X จะเรียก $G \subset X_{/r}$ ว่าเป็นเซตเปิด ก็ต่อเมื่อ $P^{-1}(G)$ เป็นเซตเปิดใน (X, J) เมื่อ P เป็นโปรเจคชันฟังก์ชันตามนิยาม 2.6.3

<u>ทฤษฎี</u> 2.6.2 ถ้า $J_{/r}$ เป็นเซตของเซตเปิดทั้งหมดของ $X_{/r}$ แล้ว $J_{/r}$ เป็นโทโพโลยีสำหรับ $X_{/r}$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [4] หน้า 97 - 98

<u>นิยาม</u> 2.6.5 เรียก $J_{/r}$ ในทฤษฎี 2.6.2 ว่า โควเชียนท์โทโพโลยี และเรียก $(X_{/r}, J_{/r})$ ว่าปริภูมิโควเชียนท์ของ (X, J) โดยความสัมพันธ์สมมูล r

<u>ข้อสังเกต</u> 2.6.1 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน X แล้วจะได้โปรเจคชันฟังก์ชัน P ซึ่ง $P : X \longrightarrow X_{/r}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และเป็นฟังก์ชันออนทู

2.7 <u>สัจพจน์เซ็ปพาเรชัน</u> (Separation axioms)

<u>นิยาม</u> 2.7.1 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี จะเรียก (X, J) ว่าเป็นปริภูมิ T_0 ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $x, y \in X$ ซึ่ง $x \neq y$ จะมี $G \in J$ ซึ่ง $x \in G$ แต่ $y \notin G$ (หรือ $y \in G$ แต่ $x \notin G$)

<u>ตัวอย่าง</u> 2.7.1 ให้ $X = \{0, 1\}$ และโทโพโลยี สำหรับ X คือ

$J = \{\emptyset, \{0\}, X\}$

จะได้ว่า (X, J) เป็นปริภูมิ T_0

□

<u>นิยาม</u> 2.7.2 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี จะเรียก (X, J) ว่า เป็นปริภูมิ T_1 ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $x, y \in X$ ซึ่ง $x \neq y$ จะมี $U, V \in J$ ซึ่ง $x \in U, y \in V$ แต่ $x \notin V$ และ $y \notin U$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.7.2 ให้ $X = \{a, b\}$ และโทโพโลยี สำหรับ X คือ

$J = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$

จะได้ว่า (X, J) เป็นปริภูมิ T_1

□

<u>ข้อสังเกต</u> 2.7.1 จากนิยามของปริภูมิ T_1 และปริภูมิ T_0 จะได้ว่าทุก ๆ ปริภูมิT_1 เป็นปริภูมิ T_0

<u>ทฤษฎี</u> 2.7.1 ปริภูมิโทโพโลยี (X, J) จะเป็นปริภูมิ T_0 ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x \neq y$ แล้ว $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ สำหรับทุก $x, y \in X$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [13] หน้า 91

<u>ทฤษฎี</u> 2.7.2 ปริภูมิโทโพโลยี $(X, \mathcal{J})$ จะเป็นปริภูมิ T_1 ก็ต่อเมื่อ $\{x\}$ เป็นเซตปิด สำหรับทุก $x \in X$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [13] หน้า 94

<u>นิยาม</u> 2.7.3 ให้ $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิโทโพโลยี จะเรียก $(X, \mathcal{J})$ ว่าเป็นปริภูมิ T_2 ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $x, y \in X$ ซึ่ง $x \neq y$ จะมี $U, V \in \mathcal{J}$ ซึ่ง $x \in U, y \in V$ และ $U \cap V = \emptyset$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.7.3 ให้ $X = \{a, b\}$ และโทโพโลยี สำหรับ X คือ

$\mathcal{J} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$

จะได้ว่า $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิ T_2

□

<u>ข้อสังเกต</u> 2.7.2 จากนิยามปริภูมิ T_2 และปริภูมิ T_1 จะได้ว่าทุก ๆ ปริภูมิ T_2 เป็นปริภูมิ T_1

<u>นิยาม</u> 2.7.4 ให้ $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิโทโพโลยี จะเรียก $(X, \mathcal{J})$ ว่าเป็นปริภูมิเรกูลาร์ (regular space) ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $x \in X$ และแต่ละเซตปิด A ใน X ซึ่ง $x \notin A$ จะมี $U, V \in \mathcal{J}$ ซึ่ง $x \in U$, $A \subset V$ และ $U \cap V = \emptyset$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.7.4 ให้ $X = \{a,b,c\}$ และโทโพโลยี สำหรับ X คือ

$\mathcal{J} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}\}$

ดังนั้นเซตปิดใน X คือ $\emptyset$, X, $\{a\}$, $\{b,c\}$

จาก $a \in X$ แต่ $a \notin \{b,c\}$

$a \in \{a\} \in \mathcal{J}$, $\{b,c\} \subset \{b,c\} \in \mathcal{J}$ ซึ่ง $\{a\} \cap \{b,c\} = \emptyset$

สำหรับ b, c และ ϕ ก็แสดงทำนองเดียวกัน

ดังนั้นจากนิยาม 2.7.4 จะได้ว่า $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิเรกูลาร์

□

<u>ทฤษฎี</u> 2.7.3 ให้ $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิเรกูลาร์ ดังนั้นจะได้ว่า

$\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ หรือ $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \emptyset$

สำหรับทุก $x, y \in X$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [13] หน้า 98

<u>ทฤษฎี</u> 2.7.4 ให้ $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิโทโพโลยี ดังนั้น $(X, \mathcal{J})$ จะเป็น ปริภูมิเรกูลาร์ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $p \in X$ และแต่ละ $U \in \mathcal{J}$ ซึ่ง $p \in U$ จะมี $V \in \mathcal{J}$ ซึ่ง $p \in V \subset \overline{V} \subset U$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [11] หน้า 51

<u>ทฤษฎี</u> 2.7.5 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี ดังนั้น (X, J) จะเป็นปริภูมิเรกูลาร์ ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $x \in X$ และแต่ละเซตปิด A ใน (X, J) ซึ่ง $x \notin A$ จะมี $V \in J$ ซึ่ง $x \in V$ และ $\bar{V} \cap A = \emptyset$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [5] หน้า 218

<u>นิยาม</u> 2.7.5 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี จะเรียก (X, J) ว่าเป็นปริภูมินอร์มัล (normal space) ก็ต่อเมื่อ ถ้า H, K เป็นเซตปิดใน (X, J) ซึ่ง $H \cap K = \emptyset$ แล้วจะมี $U, V \in J$ ซึ่ง $H \subset U, K \subset V$ และ $U \cap V = \emptyset$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.7.5 ให้ $X = \{a,b,c\}$ และโทโพโลยี สำหรับ X คือ $\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

เซตปิดใน X คือ $\emptyset, X, \{b,c\}, \{a,c\}, \{c\}$

เซตปิดที่อินเตอร์เซคชันกับทุก ๆ เซตปิดใน X แล้วได้เซตว่าง มีเพียงเซตเดียวคือ $\emptyset$

X เป็นเซตเปิดที่คลุมทุก ๆ เซตปิดใน X

และ $\emptyset$ เป็นเซตเปิดที่คลุม $\emptyset$ ซึ่ง $X \cap \emptyset = \emptyset$

ดังนั้นจากนิยาม 2.7.5 จะได้ว่า (X, J) เป็นปริภูมินอร์มัล

□