บทที่ 3

ปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

ในบทนี้จะเป็นการศึกษาบทความของ Dick Wick Hall, Sheila K. Murphy และ Eugene P. Rozycki ซึ่งตีพิมพ์ในวารสาร The Journal of the Australian Mathematical Society ปี 1971 ในหัวข้อ " On Spaces Which are Essentially T_1"

โดยจะแบ่งศึกษาเป็นหัวข้อดังนี้

3.1 นิยามของปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 และตัวอย่าง

3.2 คุณสมบัติของปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

3.3 การเป็นเอสเซนเชียล T_1 ของปริภูมิซูโดเมตไทรเซเบิลและปริภูมิซูโดเซมิเมตริก

3.4 ความสัมพันธ์ระหว่างปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 กับปริภูมิ T_0 , T_1 เรกูลาร์ และปริภูมินอร์มัล

3.1 <u>นิยามของปริภูมิเอสเซนเชียล</u> T_1 <u>และตัวอย่าง</u>

<u>นิยาม</u> 3.1.1 ให้ $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิโทโพโลยี จะเรียก $(X, \mathcal{J})$ ว่าเป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 (essentially T_1 space) ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x, y \in X$ และ $x \in \overline{\{y\}}$ แล้ว $y \in \overline{\{x\}}$

<u>ตัวอย่าง</u> 3.1.1 ให้ $X = \{a, b, c\}$ และโทโพโลยี สำหรับ X คือ

$\{\{a\}, \{b,c\}, X, \emptyset\}$

ซึ่ง $\overline{\{a\}} = \{a\}$, $\overline{\{b\}} = \{b,c\}$, $\overline{\{c\}} = \{b,c\}$

และ $a \notin \overline{\{b\}}$, $b \notin \overline{\{a\}}$

$a \notin \overline{\{c\}}$, $c \notin \overline{\{a\}}$

$b \in \overline{\{c\}}$, $c \in \overline{\{b\}}$

จะได้ว่า (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

□

<u>ตัวอย่าง</u> 3.1.2 ให้ $X = \{a,b,c\}$ และโทโพโลยี สำหรับ X คือ

$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \emptyset, X\}$

ซึ่ง $\overline{\{a\}} = \{a\}$, $\overline{\{b\}} = \{b\}$, $\overline{\{c\}} = \{c\}$

โดยที่ $a \notin \overline{\{b\}}$, $b \notin \overline{\{a\}}$

$a \notin \overline{\{c\}}$, $c \notin \overline{\{a\}}$

$b \notin \overline{\{c\}}$, $c \notin \overline{\{b\}}$

จะได้ว่า (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

□

<u>หมายเหตุ</u> 3.1.1 (X, J_D) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

<u>ตัวอย่าง</u> 3.1.3 ให้ $X = \{a,b,c,d\}$ และโทโพโลยี สำหรับ X คือ $\{X, \emptyset\}$

ซึ่ง $\overline{\{a\}} = X$, $\overline{\{b\}} = X$, $\overline{\{c\}} = X$, $\overline{\{d\}} = X$

โดยที่ $a \in \overline{\{b\}}$, $b \in \overline{\{a\}}$

$a \in \overline{\{c\}}$, $c \in \overline{\{a\}}$

$b \in \overline{\{c\}}$, $c \in \overline{\{b\}}$

$a \in \overline{\{d\}}$, $d \in \overline{\{a\}}$

$b \in \overline{\{d\}}$, $d \in \overline{\{b\}}$

$c \in \overline{\{d\}}$, $d \in \overline{\{c\}}$

จะได้ว่า $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

$\square$

<u>ตัวอย่าง</u> 3.1.4 ให้ $X \neq \emptyset$ และ $\mathcal{J} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X \,/\, A^c$ เป็นเซตจำกัด $\}$

เป็นโทโพโลยี สำหรับ X

จะได้ว่า $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 เพราะ

ถ้า $x, y \in X$ จะได้ว่า $\{x\}$ และ $\{y\}$ เป็นเซตจำกัด

แต่ $(\{x\}^c)^c = \{x\}$ และ $(\{y\}^c)^c = \{y\}$

จากนิยามของ $\mathcal{J}$ จะได้ว่า $\{x\}^c$ และ $\{y\}^c$ เป็นเซตเปิดของ X

ดังนั้น $\{x\}$ และ $\{y\}$ เป็นเซตปิดของ X

จากทฤษฎี 2.3.6 ข้อ 3 จะได้ $\{x\} = \overline{\{x\}}$ และ $\{y\} = \overline{\{y\}}$

ดังนั้นถ้า $x = y$ จะได้ $x \in \overline{\{y\}}$ และ $y \in \overline{\{x\}}$

ถ้า $x \neq y$ จะได้ $x \notin \overline{\{y\}}$ และ $y \notin \overline{\{x\}}$

นั่นคือถ้า $x, y \in X$ และ $x \in \overline{\{y\}}$ แล้ว $y \in \overline{\{x\}}$

ซึ่งสอดคล้องกับนิยาม 3.1.1

□

3.2 <u>คุณสมบัติของปริภูมิเอสเซนเชียล</u> T_1

<u>ทฤษฎี</u> 3.2.1 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี จะได้ว่าประพจน์ต่อไปนี้สมมูลกัน

1. (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1
2. สำหรับ $x, y \in X$ จะได้ว่า $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ หรือ $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \emptyset$
3. ทุก ๆ เซตเปิดจะบรรจุโคลเซอร์ของแต่ละจุดในเซตเปิดนั้น
4. ทุก ๆ เซตเปิดจะอยู่ในรูปการยูเนียน (union) ของบางเซตปิดของ (X, J)
5. ทุก ๆ เซตปิด จะอยู่ในรูปของการอินเตอร์เซคชัน (intersection) ของบางเซตเปิดของ (X, J)

<u>พิสูจน์</u> $(1) \Longrightarrow (2)$

ให้ $x, y \in X$ และ $z \in \overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}}$ ดังนั้น $\{z\} \subset \overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}}$

จะได้ว่า $\{z\} \subset \overline{\{x\}}$ และ $\{z\} \subset \overline{\{y\}}$

จากทฤษฎี 2.3.6 จะได้ $\overline{\{z\}} \subset \overline{\overline{\{x\}}}$ และ $\overline{\{z\}} \subset \overline{\overline{\{y\}}}$

แต่ $\overline{\overline{\{x\}}} = \overline{\{x\}}$ และ $\overline{\overline{\{y\}}} = \overline{\{y\}}$ ดังนั้น $\overline{\{z\}} \subset \overline{\{x\}}$

และ $\overline{\{z\}} \subset \overline{\{y\}}$

จะได้ $\overline{\{z\}} \subset \overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}}$ ---------------------------(1)

จาก $z \in \overline{\{x\}}$ และเงื่อนไขข้อ 1 จะได้ $x \in \overline{\{z\}}$

ดังนั้น $\{x\} \subset \overline{\{z\}}$

จากทฤษฎี 2.3.6 จะได้ $\overline{\{x\}} \subset \overline{\{z\}}$

ในทำนองเดียวกัน จาก $z \in \overline{\{y\}}$ จะได้ $\overline{\{y\}} \subset \overline{\{z\}}$

ดังนั้น $\overline{\{x\}} \cup \overline{\{y\}} \subset \overline{\{z\}}$ ---------------------------(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $\overline{\{x\}} \cup \overline{\{y\}} \subset \overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}}$

แต่ $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} \subset \overline{\{x\}} \cup \overline{\{y\}}$

จะได้ $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \overline{\{x\}} \cup \overline{\{y\}}$

จากนิยาม 2.1.2 คุณสมบัติของเซตมีว่า ถ้า $A \cup B = A \cap B$ แล้ว $A = B$

ดังนั้น $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$

$(2) \Longrightarrow (3)$

ให้ U เป็นเซตเปิด และ $x \in U$

ให้ $y \in \overline{\{x\}}$ จากเงื่อนไขข้อ 2 จะได้ $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$

ดังนั้น ได้ว่า $x \in \overline{\{y\}}$

จากทฤษฎี 2.3.5 จะได้ว่า $V \cap \{y\} \neq \emptyset$

สำหรับทุกเนเบอร์ฮูด V ของ x ใน X

จาก U เป็นเนเบอร์ฮูดของ x ดังนั้น $U \cap \{y\} \neq \emptyset$

จะได้ว่า $y \in U$ ดังนั้น $\overline{\{x\}} \subset U$

(3) $\Longrightarrow$ (4)

ให้ U เป็นเซตเปิด โดยที่ $\emptyset \neq U \subset X$

ให้ $x \in U$ จากเงื่อนไขข้อ 3 จะได้ $\overline{\{x\}} \subset U$

ดังนั้นจะได้ $U = \bigcup\limits_{x \in U} \overline{\{x\}}$ โดยที่ $\overline{\{x\}}$ เป็นเซตปิด

(4) $\Longrightarrow$ (5)

ให้ K เป็นเซตปิด ดังนั้น K^c จะเป็นเซตเปิด

จากเงื่อนไขข้อ 4 $K^c = \bigcup\limits_{\alpha \in \lambda} F_\alpha$

F_α เป็นเซตปิด

จาก $K = (K^c)^c$ ดังนั้น $K = \left(\begin{array}{l}\bigcup\limits_{\alpha \in \lambda} F_\alpha \\ F_\alpha \text{ เป็นเซตปิด}\end{array}\right)^c$

จากนิยาม 2.1.2 คุณสมบัติของเซตข้อ 2.2 จะได้

$$K = \bigcap_{\alpha \in \lambda} F_\alpha^c$$

F_α เป็นเซตปิด

$(5) \Longrightarrow (1)$

ให้ $x, y \in X$ และ $x \in \overline{\{y\}}$ จะแสดงว่า $y \in \overline{\{x\}}$

จาก $x \in \overline{\{y\}}$ และจากทฤษฎี 2.3.5 จะได้ $V \cap \{y\} \neq \emptyset$

สำหรับทุกเนเบอร์ฮูด V ของ x ใน X ----------------(1)

สมมุติให้ $y \notin \overline{\{x\}}$ จากเงื่อนไขข้อ 5 จะได้ว่า

$x \in \overline{\{x\}} = \bigcap_{\alpha \in \lambda} U_\alpha$ ซึ่ง U_α เป็นเซตเปิดใน X

แต่ $y \notin \overline{\{x\}}$ ดังนั้น $y \notin U_\alpha$ สำหรับบาง $\alpha \in \lambda$

แต่จาก (1) $y \in V$ สำหรับทุกเนเบอร์ฮูด V ของ x

ซึ่ง U_α เป็นเนเบอร์ฮูดของ x สำหรับทุก $\alpha \in \lambda$

ดังนั้นเกิดข้อขัดแย้ง

จะได้ว่า $y \in \overline{\{x\}}$

จากนิยาม 3.1.1 จะได้ว่า $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 $\square$

3.3 การเป็นเอสเซนเชียล T_1 ของปริภูมิซูโดเมตไทรเซเบิล และปริภูมิซูโดเซมิเมตริก

ในหัวข้อนี้จะแสดงว่าทุกปริภูมิซูโดเมตไทรเซเบิล จะเป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 และปริภูมิซูโดเซมิเมตริกจะเป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 โดยเริ่มจากนิยาม และทฤษฎี ดังต่อไปนี้

<u>นิยาม</u> 3.3.1 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี จะเรียกฟังก์ชัน

$d : X \times X \longrightarrow R^+ \cup \{0\}$ ว่าเป็นซูโดเซมิเมตริก (pseudosemi-metric) บนเซต X ก็ต่อเมื่อ d มีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $J_d = J$

2. $d(x, x) = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

3. $d(x, y) = d(y, x)$ สำหรับ $x, y \in X$

และถ้าเพิ่มเงื่อนไขว่า ถ้า $d(x, y) = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับ $x, y \in X$ แล้วจะเรียกฟังก์ชัน d ว่า เซมิเมตริก (semi-metric)

<u>นิยาม</u> 3.3.2 จะเรียกปริภูมิโทโพโลยี X พร้อมด้วยซูโดเซมิเมตริก d ว่าเป็นปริภูมิซูโดเซมิเมตริก (pseudosemi-metric space) และแทนด้วยสัญลักษณ์ (X, d)

<u>นิยาม</u> 3.3.3 จะเรียกปริภูมิโทโพโลยี X พร้อมด้วยเซมิเมตริก d ว่าเป็น ปริภูมิเซมิเมตริก (semi-metric space) และแทนด้วยสัญลักษณ์ (X, d)

<u>ทฤษฎี</u> 3.3.1 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิซูโดเมตริก สำหรับแต่ละ $A \subset X$ ซึ่ง A ไม่เป็นเซตว่าง จะได้ว่า $x \in \bar{A}$ ก็ต่อเมื่อ $d(x, A) = 0$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $x \in \bar{A}$

ดังนั้นจากทฤษฎี 2.3.5 จะได้ว่า $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

สำหรับทุก $\varepsilon > 0$

นั่นคือ จะมี $y_\varepsilon \in A$ ซึ่ง $d(x, y_\varepsilon) < \varepsilon$ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$

จะได้ว่า $\inf\{d(x, y_\varepsilon) / y_\varepsilon \in A\} = 0$

ดังนั้นจากนิยาม 2.2.7 จะได้ว่า $d(x, A) = 0$

ต่อไปให้ $d(x, A) = 0$

ดังนั้น สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $y_\varepsilon \in A$ ซึ่ง

$\inf\{d(x, y_\varepsilon) / y_\varepsilon \in A\} = 0$

ดังนั้น $d(x, y_\varepsilon) < \varepsilon$ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$

จะได้ว่า $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$

จากทฤษฎี 2.3.5 จะได้ว่า $x \in \bar{A}$ □

หมายเหตุ 3.3.1 ทำนองเดียวกันสามารถพิสูจน์ได้ว่า ถ้า $(X, \mathcal{J})$ เป็น ปริภูมิซูโคเซมิเมตริก สำหรับแต่ละ $A \subset X$ ซึ่ง A ไม่เป็นเซตว่าง แล้วจะได้ว่า $x \in \bar{A}$ ก็ต่อเมื่อ $d(x, A) = 0$

ข้อสังเกต 3.3.1 จากนิยาม 2.2.1 และนิยาม 3.3.1 จะได้ว่า ทุกปริภูมิซูโคเมตริก จะเป็นปริภูมิซูโคเซมิเมตริก

ข้อสังเกต 3.3.2 จากนิยาม 3.3.1 จะได้ว่า ทุกปริภูมิเซมิเมตริก จะเป็นปริภูมิซูโคเซมิเมตริก

ตัวอย่าง 3.3.1 ให้ $X \neq \emptyset$ และนิยามฟังก์ชัน $d : X \times X \dashrightarrow R$ ดังนี้

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x = y \\ 1 & \text{เมื่อ } x \neq y \end{cases} \quad \text{สำหรับทุก } x, y \in X$$

จะแสดงว่า (X, d) เป็นปริภูมิซูโคเซมิเมตริก และปริภูมิเซมิเมตริก สำหรับทุก $x, y, z \in X$ จะได้ว่า

1. $d(x, y) = 0$ หรือ $d(x, y) = 1$ ดังนั้น $d(x, y) \geq 0$

2. ถ้า $x = y$ จะได้ว่า $d(x, y) = 0 = d(y, x)$

   ถ้า $x \neq y$ จะได้ว่า $y \neq x$ ดังนั้น $d(x, y) = 1 = d(y, x)$

   เพราะฉะนั้น $d(x, y) = d(y, x)$

3. พิจารณากรณีต่าง ๆ ดังนี้

3.1 ถ้า $x \neq z$, $y \neq z$ และ $x \neq y$

จะได้ $d(x, z) = 1 < 1 + 1 = d(x, y) + d(y, z)$

3.2 ถ้า $x \neq z$, $y \neq z$ และ $x = y$

จะได้ $d(x, z) = 1 = 0 + 1 = d(x, y) + d(y, z)$

3.3 ถ้า $x \neq z$, $y = z$ และ $x \neq y$

จะได้ $d(x, z) = 1 = 1 + 0 = d(x, y) + d(y, z)$

3.4 ถ้า $x = z$, $y \neq z$ และ $x \neq y$

จะได้ $d(x, z) = 0 < 1 + 1 = d(x, y) + d(y, z)$

3.5 ถ้า $x = z$, $y = z$ และ $x = y$

จะได้ $d(x, z) = 0 = 0 + 0 = d(x, y) + d(y, z)$

ดังนั้นสำหรับทุก $x, y, z \in X$ จะได้ว่า

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ เพราะฉะนั้น จากนิยาม 2.2.1
จะได้ว่า (X, d) เป็นปริภูมิซูโดเมตริก จากข้อสังเกต 3.3.1
จะได้ว่า (X, d) เป็นปริภูมิซูโดเซมิเมตริก

4. จากนิยามของฟังก์ชัน d มีว่า $d(x, y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

ดังนั้นจากนิยาม 3.3.1 จะได้ว่า (X, d) เป็นปริภูมิเซมิเมตริกด้วย

□

<u>ตัวอย่าง</u> 3.3.2 ปริภูมิซูโดเซมิเมตริก

ให้ $X = \{a, b, c\}$, $J = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}\}$

เป็นโทโพโลยี สำหรับ X

และนิยามฟังก์ชัน $d : X \times X \longrightarrow R^+ \cup \{0\}$ ดังนี้

$d(a, a) = 0$

$d(b, b) = 0$

$d(c, c) = 0$

$d(a, b) = d(b, a) = 2$

$d(b, c) = d(c, b) = 0$

$d(c, a) = d(a, c) = 2$

จะแสดงว่า (X, d) เป็นปริภูมิซูโดเซมิเมตริก

1. ให้ $\varepsilon_a = \varepsilon_b = \varepsilon_c = 1$

ดังนั้น $B(a, \varepsilon_a) = \{y \in X / d(y, a) < 1\}$

$= \{a\}$

$B(b, \varepsilon_b) = \{y \in X / d(y, b) < 1\}$

$= \{b, c\}$

$B(c, \varepsilon_c) = \{y \in X / d(y, c) < 1\}$

$= \{b, c\}$

จะได้ว่า $\{a\} \in J_d$ เพราะ $a \in \{a\}$ มี $\varepsilon_a = 1$

ซึ่ง $B(a, \varepsilon_a) = \{a\} \subset \{a\}$

$\{b,c\} \in J_d$ เพราะ $b \in \{b,c\}$ มี $\varepsilon_b = 1$

ซึ่ง $B(b, \varepsilon_b) = \{b,c\} \subset \{b,c\}$

$c \in \{b,c\}$ มี $\varepsilon_c = 1$

ซึ่ง $B(c, \varepsilon_c) = \{b,c\} \subset \{b,c\}$

จะเห็นได้ชัดว่า $X, \emptyset \in J_d$

แต่ $\{b\} \notin J_d$ เพราะ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$

จะได้ $B(b, \varepsilon) = \{b,c\} \not\subset \{b\}$ เมื่อ $\varepsilon \leq 2$

$B(b, \varepsilon) = X \not\subset \{b\}$ เมื่อ $\varepsilon > 2$

ทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\{c\} \notin J_d$

$\{a,b\} \notin J_d$ เพราะมี $b \in \{a,b\}$ ซึ่ง สำหรับทุก $\varepsilon > 0$

จะได้ $B(b, \varepsilon) = \{b,c\} \not\subset \{a,b\}$ เมื่อ $\varepsilon \leq 2$

$B(b, \varepsilon) = X \not\subset \{a,b\}$ เมื่อ $\varepsilon > 0$

ทำนองเดียวกันจะได้ว่า $\{a,c\} \notin J_d$

ดังนั้น $J_d = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b,c\}\} = J$

2. จากนิยาม d จะได้ $d(x, x) = 0$ สำหรับทุก $x \in X$

3. จากนิยาม d จะได้ $d(x, y) = d(y, x)$ **สำหรับ** $x, y \in X$

จากข้อ 1 - 3 และนิยาม 3.3.1 จะได้ว่า (X, d) เป็นปริภูมิซูโดเซมิเมตริก

□

<u>ทฤษฎี</u> 3.3.2 ทุกปริภูมิซูโดเมตไทรเซเบิลเป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

<u>พิสูจน์</u> ให้ $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิซูโดเมตไทรเซเบิล

ดังนั้นจะมีซูโดเมตริก d สำหรับ X ที่ทำให้ $\mathcal{J}_d = \mathcal{J}$

ให้ $x, y \in X$ และ $x \in \overline{\{y\}}$

จากทฤษฎี 3.3.1 จะได้ $d(x, \{y\}) = 0$

นั่นคือ $d(x, y) = 0$

แต่ $d(x, y) = d(y, x)$

ดังนั้น $d(y, x) = 0$

นั่นคือ $d(y, \{x\}) = 0$

จากทฤษฎี 3.3.1 จะได้ว่า $y \in \overline{\{x\}}$

ดังนั้นจากนิยาม 3.1.1 จะได้ว่า $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

□

<u>ข้อสังเกต</u> 3.3.3 (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกก็ต่อเมื่อ (X, d) เป็นปริภูมิซูโดเมตริกและปริภูมิ T_0

พิสูจน์ ให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก

จากข้อสังเกต 2.2.1 จะได้ (X, d) เป็นปริภูมิซูโดเมตริก

จะแสดงว่า (X, J_d) เป็นปริภูมิ T_o

ให้ $x, y \in X$ โดยที่ $x \neq y$

ดังนั้น $d(x, y) > 0$

ให้ $\varepsilon = d(x, y)$

ดังนั้นจะมี $U, V \in J_d$ ซึ่ง $U = B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ และ $V = B(y, \frac{\varepsilon}{2})$

ซึ่ง $x \in U, y \in V$

ต่อไปจะแสดงว่า $U \cap V = \emptyset$

สมมุติว่า $U \cap V \neq \emptyset$

ดังนั้นจะมี $z \in U \cap V$

จะได้ว่า $z \in U$ และ $z \in V$

ดังนั้น $d(x, z) < \frac{\varepsilon}{2}$ และ $d(y, z) < \frac{\varepsilon}{2}$

จาก $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

จะได้ $\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

นั่นคือ $\varepsilon < \varepsilon$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

จะได้ว่า $U \cap V = \emptyset$

จากนิยาม 2.7.3 จะได้ (X, J_d) เป็นปริภูมิ T_2

จากข้อสังเกต 2.7.1 และ 2.7.2 จะได้ (X, J_d) เป็นปริภูมิ T_o

ต่อไปให้ (X, d) เป็นปริภูมิซูโดเมตริก และ (X, J_d) เป็นปริภูมิ T_o

จะแสดงว่า (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก

ให้ $x, y \in X$ ซึ่ง $d(x, y) = 0$

จะได้ว่า $x \in \overline{\{y\}}$ และ $y \in \overline{\{x\}}$

ดังนั้น $\{x\} \subset \overline{\{y\}}$ และ $\{y\} \subset \overline{\{x\}}$

จากทฤษฎี 2.3.6 จะได้ $\overline{\{x\}} \subset \overline{\overline{\{y\}}}$ และ $\overline{\{y\}} \subset \overline{\overline{\{x\}}}$

แต่ $\overline{\overline{\{y\}}} = \overline{\{y\}}$ และ $\overline{\overline{\{x\}}} = \overline{\{x\}}$

ดังนั้น $\overline{\{x\}} \subset \overline{\{y\}}$ และ $\overline{\{y\}} \subset \overline{\{x\}}$

จะได้ว่า $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$

จาก (X, J_d) เป็นปริภูมิ T_o และจากทฤษฎี 2.7.1

จะได้ว่า ถ้า $x \neq y$ แล้ว $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ สำหรับทุก $x, y \in X$

แต่ $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$

ดังนั้น $x = y$

จะได้ว่า (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก

□

<u>ทฤษฎี</u> 3.3.3 ทุกปริภูมิซูโดเซมิเมตริก จะเป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

<u>พิสูจน์</u> ให้ (X, d) เป็นปริภูมิซูโดเซมิเมตริก

ให้ $x, y \in X$ และ $x \in \overline{\{y\}}$

ดังนั้นจากหมายเหตุ 3.3.1 จะได้ $d(x, \{y\}) = 0$

นั่นคือ $d(x, y) = 0$ แต่ $d(x, y) = d(y, x)$

ดังนั้น $d(y, x) = 0$ จะได้ $d(y, \{x\}) = 0$

จากหมายเหตุ 3.3.1 จะได้ $y \in \overline{\{x\}}$

ดังนั้นจากนิยาม 3.1.1 จะได้ $(X, \mathcal{J}_d)$ เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

□

ข้อสังเกต 3.3.4 (X, d) เป็นปริภูมิเซมิเมตริก ก็ต่อเมื่อ (X, d) เป็นปริภูมิซูโดเซมิเมตริก และปริภูมิ T_o

พิสูจน์ ให้ (X, d) เป็นปริภูมิเซมิเมตริก

จากข้อสังเกต 3.3.2 จะได้ว่า (X, d) เป็นปริภูมิซูโดเซมิเมตริก

จะแสดงว่า $(X, \mathcal{J}_d)$ เป็นปริภูมิ T_o

ให้ $x, y \in X$ ซึ่ง $x \neq y$ จาก (X, d) เป็นปริภูมิเซมิเมตริก

ดังนั้นจะได้ $d(x, y) \neq 0$

นั่นคือ $d(x, \{y\}) \neq 0$

จากหมายเหตุ 3.3.1 และข้อสังเกต 3.3.2 จะได้ $x \notin \overline{\{y\}}$

แต่ $x \in \overline{\{x\}}$ ดังนั้น $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$

จากทฤษฎี 2.7.1 จะได้ $(X, \mathcal{J}_d)$ เป็นปริภูมิ T_o

ต่อไปให้ (X, d) เป็นปริภูมิซูโดเซมิเมตริก และปริภูมิ T_o

จะแสดงว่า (X, d) เป็นปริภูมิเซมิเมตริก

ให้ $x, y \in X$ และ $d(x, y) = 0$ ดังนั้น $x \in \overline{\{y\}}$

และ $y \in \overline{\{x\}}$

จากทฤษฎี 3.3.3 จะได้ว่า (X, J_d) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

จากทฤษฎี 3.2.1 เงื่อนไขข้อ 2 จะได้ว่า $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$

แต่ (X, J) เป็นปริภูมิ T_o

ดังนั้นจากทฤษฎี 2.7.1 จะได้ $x = y$

เพราะฉะนั้นจากนิยาม 3.3.1 จะได้ (X, d) เป็นปริภูมิเซมิเมตริก

□

3.4 ความสัมพันธ์ระหว่างปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 กับปริภูมิ T_o, T_1 เรกูลาร์และนอร์มัล

จากการศึกษาในหัวข้อนี้ จะได้ว่าปริภูมิ T_1 จะเป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 ทุกปริภูมิเรกูลาร์จะเป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 และยังมีตัวอย่างของปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 ที่ไม่เป็นปริภูมิ T_o มีตัวอย่างของปริภูมิ T_o ที่ไม่เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 ตัวอย่างปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 ที่ไม่เป็นปริภูมิเรกูลาร์ และไม่เป็นปริภูมินอร์มัล และตัวอย่างของปริภูมินอร์มัลที่ไม่เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

__ทฤษฎี__ 3.4.1 ปริภูมิโทโพโลยี (X, J) จะเป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 และปริภูมิ T_o ก็ต่อเมื่อ (X, J) เป็นปริภูมิ T_1

__พิสูจน์__ ให้ (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 และปริภูมิ T_o

และให้ $x, y \in X$ โดยที่ $x \neq y$

จะแสดงว่า (X, J) เป็นปริภูมิ T_1

เนื่องจาก (X, J) เป็นปริภูมิ T_o

ดังนั้นจะมี $G \in J$ ซึ่ง $x \in G$ แต่ $y \notin G$

ดังนั้น $y \in G^c$ ซึ่ง G^c เป็นเซตปิด

เนื่องจาก $\overline{\{y\}}$ เป็นเซตปิดที่เล็กที่สุดที่บรรจุ y ดังนั้น

$y \in \overline{\{y\}} \subset G^c$

จาก $x \in G$ ดังนั้น $x \notin G^c$

จะได้ว่า $x \notin \overline{\{y\}}$

แต่ (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 ดังนั้นจากนิยาม 3.1.1

จะได้ $y \notin \overline{\{x\}}$

นั่นคือ $x \in (\overline{\{y\}})^c$ และ $y \in (\overline{\{x\}})^c$

จาก $x \in \overline{\{x\}}$ และ $y \in \overline{\{y\}}$ ดังนั้น $x \notin (\overline{\{x\}})^c$

และ $y \notin (\overline{\{y\}})^c$

จาก $\overline{\{y\}}, \overline{\{x\}}$ เป็นเซตปิด ดังนั้น $(\overline{\{y\}})^c$ และ $(\overline{\{x\}})^c$

เป็นเซตเปิด ดังนั้นจากนิยาม 2.7.2

จะได้ว่า (X, J) เป็นปริภูมิ T_1

ต่อไปให้ (X, J) เป็นปริภูมิ T_1 จะแสดงว่า (X, J)

เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 และปริภูมิ T_o

จาก (X, J) เป็นปริภูมิ T_1

ดังนั้นจากข้อสังเกต 2.7.1 จะได้ว่า (X, J) เป็นปริภูมิ T_o

และจากทฤษฎี 2.7.2 จะได้ว่า $\{y\} = \overline{\{y\}}$ สำหรับทุก $y \in X$

ให้ $x, y \in X$ และ $x \in \overline{\{y\}}$ แล้วจะได้ว่า $x \in \{y\}$

ดังนั้นจะได้ $x = y$ นั่นคือ $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$

แต่ $y \in \overline{\{y\}}$ ดังนั้น $y \in \overline{\{x\}}$

ดังนั้นจากนิยาม 3.1.1 จะได้ (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

□

<u>ข้อสังเกต</u> 3.4.1 ทุก ๆ ปริภูมิซูโดเมตริก (X, d) ที่ไม่เป็นปริภูมิเมตริก จะเป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 แต่ไม่เป็นปริภูมิ T_0

<u>พิสูจน์</u> ให้ (X, d) เป็นปริภูมิซูโดเมตริก ที่ไม่เป็นปริภูมิเมตริก

จะแสดงว่า (X, J_d) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 แต่ไม่เป็นปริภูมิ T_0

จาก (X, d) เป็นปริภูมิซูโดเมตริก

ดังนั้นจะได้ว่า J_d เป็นโทโพโลยีสำหรับ X

จากทฤษฎี 3.3.2 จะได้ว่า (X, J_d) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

ต่อไปจะแสดงว่า (X, J) ไม่เป็นปริภูมิ T_0

จาก (X, d) ไม่เป็นปริภูมิเมตริก

ดังนั้นเลือก $x, y \in X$ ซึ่ง $x \neq y$ และ $d(x, y) = 0$

จะได้ $x \in \overline{\{y\}}$ และ $y \in \overline{\{x\}}$

ให้ $G \in J$ ซึ่ง $y \in G$ จะแสดงว่าทุก G ที่ $y \in G$

แล้ว $x \in G$

จาก $y \in \overline{\{x\}}$ และจากทฤษฎี 2.3.5 ได้ว่า แต่ละ $U \in n(y)$,

$U \cap \{x\} \neq \emptyset$

ดังนั้น $G \cap \{x\} \neq \emptyset$ จะได้ว่า $x \in G$

เพราะฉะนั้นจากนิยาม 2.7.1 จะได้ว่า (X, J) ไม่เป็นปริภูมิ T_o

□

<u>ตัวอย่าง</u> 3.4.1 ปริภูมิที่เป็นเอสเซนเชียล T_1 แต่ไม่เป็นปริภูมิ T_o

ให้ $X = \{a, b, c\}$ และ $J = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a,c\}\}$

เป็นโทโพโลยีบน X จะได้ (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

แต่ (X, J) ไม่เป็นปริภูมิ T_o

เพราะว่า $\overline{\{b\}} = \{b\}$, $\overline{\{a\}} = \{a,c\}$

$\overline{\{c\}} = \{a,c\}$

ซึ่ง $a \notin \overline{\{b\}}$ และ $b \notin \overline{\{a\}}$

$a \in \overline{\{c\}}$, $c \in \overline{\{a\}}$

$b \notin \overline{\{c\}}$, $c \notin \overline{\{b\}}$

ดังนั้นโดยนิยาม 3.1.1 จะได้ (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

และจาก $a, c \in X$ ซึ่ง $a \neq c$ ไม่มีเซตเปิดใน J ซึ่ง $a \in U$

แต่ $c \notin U$ หรือ $c \in U$ แต่ $a \notin U$

ดังนั้นโดยนิยาม 2.7.1 จะได้ว่า (X, J) ไม่เป็นปริภูมิ T_o

□

<u>ตัวอย่าง</u> 3.4.2 ปริภูมิที่เป็น T_o แต่ไม่เป็นเอสเซนเชียล T_1

ให้ $X = \{0, 1\}$ และ $J = \{\emptyset, X, \{0\}\}$

เป็นโทโพโลยีบน X

เพราะว่า $0, 1 \in X$ มี $\{0\} \in J$ ซึ่ง $0 \in \{0\}$

แต่ $1 \notin \{0\}$

ดังนั้นโดยนิยาม 2.7.1 จะได้ (X, J) เป็นปริภูมิ T_o

และเพราะว่า $\overline{\{0\}} = X$, $\overline{\{1\}} = \{1\}$

ซึ่ง $1 \in \overline{\{0\}}$ แต่ $0 \notin \overline{\{1\}}$

ดังนั้นจากนิยาม 3.1.1 จะได้ว่า (X, J) ไม่เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

$\square$

<u>ตัวอย่าง</u> 3.4.3 ปริภูมิที่เป็นเอสเซนเชียล T_1 แต่ไม่เป็นปริภูมิเรกูลาร์ และไม่เป็นปริภูมินอร์มัล

ให้ $X = R$ และ $S = \{Q\} \cup \{(a,b) / a, b \in R, a < b\}$

จากทฤษฎี 2.3.4 จะได้ว่า มี J เป็นโทโพโลยีบน X เพียงโทโพโลยีเดียวที่มี S เป็นสับเบส ซึ่งสมาชิกใน J ได้มาจากการอินเตอร์เซคชันแบบจำกัดของสมาชิกใน S แล้วเอามายูเนียนกันแบบใด ๆ

ต่อไปจะแสดงว่า (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

ให้ $x \in R$ และให้ $a \in \bigcup_{\substack{y \in R \\ y > x}} (x, y)$ ดังนั้น $a \in (x, y)$

สำหรับ y บางตัว ซึ่ง $x < y$

แต่ $(x, y) \subset (x, \infty)$ สำหรับทุก $y \in R$

ดังนั้น $a \in (x, \infty)$

จะได้ว่า $\bigcup\limits_{\substack{y \in R \\ y > x}} (x, y) \subseteq (x, \infty)$ ------------------(1)

ต่อไปให้ $a \in (x, \infty)$ ดังนั้น $a \in R$ และ $x < a$

จะได้ว่า $a \in (x, a + \varepsilon)$ และ $x < a + \varepsilon$ สำหรับบาง $\varepsilon > 0$

ดังนั้น $a \in (x, y)$ โดยที่ $x < y$

ได้ว่า $a \in \bigcup\limits_{\substack{y \in R \\ y > x}} (x, y)$

ดังนั้น $(x, \infty) \subset \bigcup\limits_{\substack{y \in R \\ y > x}} (x, y)$ --------------------(2)

จาก (1) และ (2) ได้ $\bigcup\limits_{\substack{y \in R \\ y > x}} (x, y) = (x, \infty)$

ทำนองเดียวกันพิสูจน์ได้ว่า $\bigcup\limits_{\substack{y \in R \\ y < x}} (y, x) = (-\infty, x)$

จาก (x, y) และ $(y, x) \in J$ ดังนั้น $\bigcup\limits_{\substack{y \in R \\ y > x}} (x, y)$

และ $\bigcup\limits_{\substack{y \in R \\ y < x}} (y, x) \in J$

จะได้ (x, ∞) และ $(-\infty, x) \in J$

ดังนั้น $(x, \infty) \cup (-\infty, x) \in J$ ด้วย

จะได้ $((-\infty, x) \cup (x, \infty))^c = \{x\}$ เป็นเซตปิด

ดังนั้นจากทฤษฎี 2.3.6 สำหรับ $x, y \in X$ ได้ว่า $\overline{\{x\}} = \{x\}$

และ $\overline{\{y\}} = \{y\}$

ถ้า $x = y$ จะได้ $\overline{\{x\}} = \{x\} = \{y\} = \overline{\{y\}}$

ดังนั้น $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$

ถ้า $x \neq y$ จะได้ $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \{x\} \cap \{y\} = \emptyset$

ดังนั้นจากทฤษฎี 3.2.1 จะได้ (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

ต่อไปจะแสดงว่า (X, J) ไม่เป็นปริภูมิเรกูลาร์ และไม่เป็นปริภูมินอร์มัล จาก Q^c เป็นเซตปิด และ $2 \notin Q^c$

ให้ $G, H \in J$ ซึ่ง $Q^c \subset G$ และ $2 \in H$

ดังนั้น $G \cap H \neq \emptyset$ เพราะเซตเปิดที่คลุม Q^c คือ X เพียงเซตเดียว นั่นคือ จากนิยาม 2.7.4 จะได้ว่า (X, J) ไม่เป็นปริภูมิเรกูลาร์

จากที่พิสูจน์มาได้ว่า $\{2\}$ เป็นเซตปิด

และ Q^c ก็เป็นเซตปิด ซึ่ง $2 \notin Q^c$

ดังนั้น $\{2\} \cap Q^c = \emptyset$

ให้ $G, H \in J$ ซึ่ง $Q^c \subset G$ และ $\{2\} \subset H$

ดังนั้น $G \cap H \neq \emptyset$ เพราะเซตเปิดที่คลุม Q^c คือ X เพียงเซตเดียว

นั่นคือ จากนิยาม 2.7.5 จะได้ว่า (X, J) ไม่เป็นปริภูมินอร์มัล

□

<u>ตัวอย่าง</u> 3.4.4 ปริภูมิที่เป็นนอร์มัล แต่ไม่เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

ให้ $X = \{1, 2, 3\}$ และ $J = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

เป็นโทโพโลยีบน X

เซตปิดใน X คือ $\emptyset, X, \{2,3\}, \{1,3\}, \{3\}$

เซตปิดที่อินเตอร์เซคชันกับทุก ๆ เซตปิดใน X แล้วได้

เซตว่าง มีเพียงเซตเดียวคือ $\emptyset$

X เป็นเซตเปิดที่คลุมทุก ๆ เซตปิดใน X

และ $\emptyset$ เป็นเซตเปิดที่คลุม $\emptyset$

ซึ่ง $X \cap \emptyset = \emptyset$

ดังนั้นจากนิยาม 2.7.5 จะได้ว่า (X, J) เป็นปริภูมินอร์มัล

ต่อไปจะแสดงว่า (X, J) ไม่เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

จาก $\overline{\{2\}} = \{2,3\}$ และ $\overline{\{3\}} = \{3\}$

ซึ่ง $3 \in \overline{\{2\}}$ แต่ $2 \notin \overline{\{3\}}$

ดังนั้นจากนิยาม 3.1.1 จะได้ว่า (X, J) ไม่เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

□

<u>ทฤษฎี</u> 3.4.2 ทุกปริภูมิเรกูลาร์ จะเป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

<u>พิสูจน์</u> ให้ $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิเรกูลาร์

จากทฤษฎี 2.7.3 จะได้ว่า $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$

หรือ $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \emptyset$ สำหรับทุก $x, y \in X$

จากทฤษฎี 3.2.1 ข้อ 2 จะได้ว่า

$(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

□