บทที่ 4

คุณสมบัติของปริภูมิเอสเซนเชียล T_1
และความสัมพันธ์ระหว่างปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 กับปริภูมิเรกูลาร์

ในบทนี้จะศึกษาคุณสมบัติเพิ่มเติมของปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 และศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 กับปริภูมิเรกูลาร์ โดยเริ่มจากทฤษฎีและตัวอย่างตามหัวข้อต่อไปนี้

4.1 <u>คุณสมบัติของปริภูมิเอสเซนเชียล</u> T_1

ในหัวข้อนี้จะแสดงถึงคุณสมบัติของปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 ซึ่งมีดังนี้ เอสเซนเชียล T_1 มีคุณสมบัติเป็นโทโพโลจิคัลอินแวเรียนท์ มีคุณสมบัติเป็นเฮริดิทารี และมีคุณสมบัติโปรดักทีฟ นอกจากนี้ยังแสดงคุณสมบัติเพิ่มเติมอื่น ๆ อีก โดยเริ่มจากทฤษฎี และตัวอย่างดังต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง</u> 4.1.1 $(X, \mathcal{J}_X)$, $(Y, \mathcal{J}_Y)$ เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ $(X, \mathcal{J}_X)$ เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 ให้ $f : (X, \mathcal{J}_X) \dashrightarrow (Y, \mathcal{J}_Y)$ โดยที่ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แต่ $(f(X), \mathcal{J}_{f(X)})$ ไม่เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

ให้ $X = \{1,2,3\}$, $\mathcal{J}_X = \mathcal{J}_D$

$Y = \{1,2,3,4\}$, $J_Y = \{\emptyset, Y, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\},$

$\{1,2,3\}\}$

$f : (X, J_D) \dashrightarrow (Y, J_Y)$ โดยที่ $f(x) = x$ สำหรับ $x \in X$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

จะได้ $f(X) = \{1,2,3\}$

$J_{f(X)} = \{\emptyset , f(X), \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$

เซตปิดใน $f(X)$ คือ $\emptyset$, $f(X)$, $\{2,3\}$, $\{3\}$, $\{2\}$

ซึ่ง $\overline{\{1\}} = f(X)$, $\overline{\{2\}} = \{2\}$, $\overline{\{3\}} = \{3\}$

$2 \in \overline{\{1\}}$ แต่ $1 \notin \overline{\{2\}}$

ดังนั้นจากนิยาม 3.1.1 จะได้ว่า $(f(X), J_{f(X)})$ ไม่เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 □

ดังนั้นจากตัวอย่าง 4.1.1 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องไม่ได้ทำให้ $(f(X), J_{f(X)})$ เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 แต่ถ้า f เป็นโฮมิโอมอร์ฟิซึม จะได้ว่า $f(X)$ เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 ดังแสดงในทฤษฎี 4.1.1

<u>ทฤษฎี</u> 4.1.1 เอสเซนเชียล T_1 เป็นโทโพโลจิคัลอินแวเรียนท์

<u>พิสูจน์</u> ให้ (X, J_X) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

และ (Y, J_Y) โฮมีโอมอร์ฟิคกับ (X, J_X)

จะแสดงว่า (Y, J_Y) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

จาก (X, J_X) โฮมีโอมอร์ฟิคกับ (Y, J_Y)

ดังนั้นมีฟังก์ชัน 1-1, ออนทู, f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

และ f^{-1} เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง คือ f เป็นโฮมีโอมอร์ฟิซึม

จากทฤษฎี 2.4.2 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเปิด

ให้ $U \in J_Y$ และ $y \in U$ จะแสดงว่า $\overline{\{y\}} \subset U$

จาก f เป็นฟังก์ชันออนทู ดังนั้นมี $x \in X$ โดยที่ $f(x) = y$

ดังนั้นได้ว่า $f(x) \in U$

จากนิยาม 2.1.7 จะได้ $f^{-1}(f(x)) \in f^{-1}(U)$

แต่ $\{x\} \subset f^{-1}(f(\{x\}))$ ดังนั้น $x \in f^{-1}(U)$

จากทฤษฎี 2.4.1 และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ดังนั้น $f^{-1}(U) \in J_X$

นั่นคือ $x \in f^{-1}(U) \in J_X$

แต่ (X, J_X) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

ดังนั้นจากทฤษฎี 3.2.1 ข้อ 3 จะได้ว่า $\overline{\{x\}} \subset f^{-1}(U)$

จากนิยาม 2.1.7 จะได้ $f\overline{\{x\}} \subset f(f^{-1}(U))$

แต่ $f(f^{-1}(U) \subset U$ ดังนั้น $f\overline{\{x\}} \subset U$

จาก f เป็นโฮมิโอมอร์ฟิซึม และจากทฤษฎี 2.4.2 จะได้ว่า

$\overline{f(x)} = f(\overline{\{x\}})$ สำหรับทุก $x \in X$

ดังนั้น $\overline{f(x)} \subset U$

จาก $f(x) = y$ ดังนั้น $\overline{f(x)} = \overline{\{y\}}$

นั่นคือ $\overline{\{y\}} \subset U$

จากทฤษฎี 3.2.1 ข้อ 3 จะได้ (Y, J_Y) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

โดยนิยาม 2.4.4 จะได้ว่า เอสเซนเชียล T_1 เป็นโทโพโลจิคัลอินแวเรียนท์

□

<u>ทฤษฎี</u> 4.1.2 ถ้า (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 แล้วทุกปริภูมิย่อย ของ (X, J) จะเป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 ด้วย

<u>พิสูจน์</u> ให้ $A \neq \emptyset$ และ $A \subset X$

ให้ $p, q \in A$ ซึ่ง $p \in \overline{\{q\}}$ (ใน A) จะแสดงว่า

$q \in \overline{\{p\}}$ (ใน A)

จากทฤษฎี 2.3.9 จะได้ว่า $\overline{\{q\}}$ (ใน A) = $A \cap \overline{\{q\}}$ (ใน X)

ดังนั้น $p \in A \cap \overline{\{q\}}$ (ใน X)

นั่นคือ $p \in A$ และ $p \in \overline{\{q\}}$ (ใน X)

จาก (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 และ $p \in \overline{\{q\}}$ (ใน X)

ดังนั้น $q \in \overline{\{p\}}$ (ใน X)

แต่ $q \in A$ ดังนั้น $q \in A$ และ $q \in \overline{\{p\}}$ (ใน X)

จะได้ว่า $q \in A \cap \overline{\{p\}}$ (ใน X)

จากทฤษฎี 2.3.9 จะได้ว่า $\overline{\{p\}}$ (ใน A) = $A \cap \overline{\{p\}}$ (ใน X)

ดังนั้น $q \in \overline{\{p\}}$ (ใน A)

จากนิยาม 3.1.1 จะได้ว่า (A, J_A) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

ดังนั้นจากนิยาม 2.3.14 แสดงว่า เอสเซนเชียล T_1 มีคุณสมบัติเป็นเฮริดิทารี

□

<u>ตัวอย่าง</u> 4.1.2 ปริภูมิที่ไม่เป็นเอสเซนเชียล T_1 แต่ปริภูมิย่อยเป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

ให้ $X = \{a,b,c\}$ และ $J = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

เป็นโทโพโลยีสำหรับ X

เซตปิดใน X คือ $X, \emptyset, \{b,c\}, \{a,c\}, \{c\}$

ซึ่ง $\overline{\{b\}} = \{b,c\}$, $\overline{\{c\}} = \{c\}$, $c \in \overline{\{b\}}$ แต่ $b \notin \overline{\{c\}}$

ดังนั้นจากนิยาม 3.1.1 จะได้ว่า (X, J) ไม่เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

ให้ $A = \{a,b\}$, $J_A = \{A, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$

ซึ่ง (A, J_A) เป็นปริภูมิย่อยของ (X, J)

โดยที่ J_A เป็นดีสครีตโทโพโลยี

ดังนั้น (A, J_A) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

□

<u>ทฤษฎี</u> 4.1.3 ให้ (X_i, J_i) สำหรับทุก $i \in I$ เป็นปริภูมิโทโพโลยี

(X_i, J_i) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 สำหรับทุก $i \in I$

ก็ต่อเมื่อ ปริภูมิผลคูณ $(\underset{i \in I}{\pi} X_i , \underset{i \in I}{\pi} J_i)$ เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

<u>พิสูจน์</u> ให้ (X_i, J_i) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 สำหรับทุก $i \in I$

จะแสดงว่า $(\underset{i \in I}{\pi} X_i , \underset{i \in I}{\pi} J_i)$ เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

ให้ $x \in U \in \underset{i \in I}{\pi} J_i$ ดังนั้นจากนิยาม 2.5.5 และนิยาม 2.3.8

จะได้ $U = \bigcup \left[\bigcap_{j=1}^{n} P_{i_j}^{-1} (U_{i_j})\right]$ โดยที่ $U_{i_j} \in J_{i_j}$

จะได้ว่า $x \in \bigcup \left[\bigcap_{j=1}^{n} P_{i_j}^{-1} (U_{i_j})\right]$

ดังนั้น $x \in \bigcap_{j=1}^{n} P_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$ สำหรับบางค่า $i \in I$

นั่นคือ $x \in P_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$ สำหรับทุก $j = 1, 2, \ldots, n$

จาก P_{i_j} เป็นฟังก์ชัน ดังนั้น $P_{i_j}(x) \in P_{i_j}(P_{i_j}^{-1}(U_{i_j}))$

แต่ $P_{i_j}(P_{i_j}^{-1}(U_{i_j})) \subset U_{i_j}$

ดังนั้นจะได้ว่า $P_{i_j}(x) \in U_{i_j}$ สำหรับทุก $j = 1, 2, \ldots, n$

เนื่องจาก (X_i, J_i) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

จากทฤษฎี 3.2.1 ข้อ 3 จะได้ว่า $\overline{\{P_{i_j}(x)\}} \subset U_{i_j}$

จาก P_{i_j} เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และจากทฤษฎี 2.4.1 จะได้ว่า

$P_{i_j}(\overline{\{x\}}) \subset \overline{\{P_{i_j}(x)\}}$ ดังนั้นจะได้ว่า $P_{i_j}(\overline{\{x\}}) \subset U_{i_j}$

จาก P_{i_j} เป็นฟังก์ชัน จะได้ $P_{i_j}^{-1}(P_{i_j}(\overline{\{x\}})) \subset P_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$

และ $\overline{\{x\}} \subset P_{i_j}^{-1}(P_{i_j}(\overline{\{x\}}))$

ดังนั้น $\overline{\{x\}} \subset P_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$

สำหรับทุก $j = 1, 2, \ldots, n$

ดังนั้น $\overline{\{x\}} \subset \bigcap_{j=1}^{n} P_{i_j}^{-1}(U_{i_j}) \subset U$

จะได้ว่า $\overline{\{x\}} \subset U$

จากทฤษฎี 3.2.1 จะได้ว่า $(\pi_{i\in I} X_i, \pi_{i\in I} J_i)$ เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

ต่อไปให้ $(\pi_{i\in I} X_i, \pi_{i\in I} J_i)$ เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

จะแสดงว่า (X_i, J_i) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 สำหรับทุก $i \in I$

จากทฤษฎี 2.5.4 จะได้ว่า (X_i, J_i) โฮมิโอมอร์ฟิค กับปริภูมิย่อยของ $(\pi_{i\in I} X_i, \pi_{i\in I} J_i)$ สำหรับทุก $i \in I$

จากทฤษฎี 4.1.2 และ $(\pi_{i\in I} X_i, \pi_{i\in I} J_i)$ เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

จะได้ว่า (X_i, J_i) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 สำหรับทุก $i \in I$

□.

<u>ทฤษฎี</u> 4.1.4 ให้ $X \neq \emptyset$, r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน X

ถ้าให้ $P : X \dashrightarrow X/_r$ ตามนิยาม 2.6.3 โดยที่ P เป็นฟังก์ชันปิด และ (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 แล้ว $(X/_r, J/_r)$ จะเป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

<u>พิสูจน์</u> ให้ $U \in J_{/r}$ และ $[x] \in U$

จะแสดงว่า $\overline{\{[x]\}} \subset U$

จากนิยาม 2.6.4 และ $U \in J_{/r}$ จะได้ว่า $P^{-1}(U) \in J$

แต่ (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

ดังนั้นจากทฤษฎี 3.2.1 ข้อ 3 จะได้ว่าแต่ละ $y \in P^{-1}(U)$,

$\overline{\{y\}} \subset P^{-1}(U)$

จากนิยาม 2.6.3 $P(x) = [x]$

ดังนั้น $P(x) \in U$

จะได้ว่า $P^{-1}(P(x)) \in P^{-1}(U)$

จากนิยาม 2.1.7 $\{x\} \subset P^{-1}(P(\{x\}))$

ดังนั้น $x \in P^{-1}(U)$ จะได้ว่า $\overline{\{x\}} \subset P^{-1}(U)$

เพราะฉะนั้น $P(\overline{\{x\}}) \subsetneq P(P^{-1}(U))$

จากข้อสังเกต 2.6.1 P เป็นฟังก์ชันออนทู และต่อเนื่อง

จากนิยาม 2.1.7 จะได้ว่า $P(P^{-1}(U)) = U$

ดังนั้น $P(\overline{\{x\}}) \subset U$

ต่อไปจะแสดงว่า $P(\overline{\{x\}}) = \overline{\{[x]\}}$

จาก P เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จะได้

$P(\overline{\{x\}}) \subset \overline{\{P(x)\}} = \overline{\{[x]\}}$

จะแสดงว่า $\overline{\{[x]\}} \subset P(\overline{\{x\}})$

จาก $x \in \overline{\{x\}}$ ดังนั้น $P(x) \in P(\overline{\{x\}})$

แต่ P เป็นฟังก์ชันปิด ดังนั้นจากนิยาม 2.4.2 จะได้ว่า $P(\overline{\{x\}})$

เป็นเซตปิด

แต่ $\overline{\{P(x)\}}$ เป็นเซตปิดที่เล็กที่สุดที่คลุม $P(x)$

ดังนั้น $P(x) \in \overline{\{P(x)\}} \subset P(\overline{\{x\}})$

จะได้ว่า $\overline{\{[x]\}} \subset P(\overline{\{x\}})$

เพราะฉะนั้น $P(\overline{\{x\}}) = \overline{\{[x]\}}$

จะได้ว่า $\overline{\{[x]\}} \subset U$

จากทฤษฎี 3.2.1 ข้อ 3 จะได้ว่า

$(X_{/r}, J_{/r})$ เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

□

<u>ตัวอย่าง</u> 4.1.3 (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1, $(X_{/r}, J_{/r})$

ไม่เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 และ P ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

ให้ $X = R$, $J = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X \,/\, 1 \notin A$ หรือ A^c จำกัด $\}$

เป็นโทโพโลยีบน X

ให้ A เป็นเซตของจำนวนตรรกยะ , B เป็นเซตของจำนวนอตรรกยะ

$r = [A \times A] \cup [B \times B]$ ดังนั้น $X_{/r} = \{A, B\}$

จากนิยามของ J จะได้ว่า A เป็นเซตปิด , B เป็นเซตเปิด

และจาก $P^{-1}(\{A\}) = A$, $P^{-1}(\{B\}) = B$

ดังนั้น $\{A\} \notin J_{/r}$, $\{B\} \in J_{/r}$

แสดงว่า $J_{/r} = \{\{B\}, X_{/r}, \emptyset\}$

เซตปิดของ $X_{/r}$ คือ $\{A\}$, $X_{/r}$, $\emptyset$

จะได้ว่า $(X_{/r}, J_{/r})$ ไม่เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

เพราะ $A \in \overline{\{B\}}$ แต่ $B \notin \overline{\{A\}}$

P ไม่เป็นฟังก์ชันปิด เพราะจาก $((\{\sqrt{2}\})^c)^c = \{\sqrt{2}\}$

ซึ่งจำกัด ทำให้ได้ว่า $\{\sqrt{2}\}^c$ เป็นเซตเปิดใน X

ดังนั้น $\{\sqrt{2}\}$ ก็เป็นเซตปิดใน X

และจาก $P(\{\sqrt{2}\}) = \{[\sqrt{2}]\} = \{B\}$

แต่ $\{[\sqrt{2}]\}$ ไม่เป็นเซตปิดใน $X_{/r}$

□

ทฤษฎี 4.1.5 ให้ $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิโทโพโลยี ดังนั้น $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 ก็ต่อเมื่อ $\overline{\{x\}} = \bigcap_{U \in n(x)} U$ สำหรับทุก $x \in X$

พิสูจน์ ให้ $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 และ $x \in X$

จะแสดงว่า $\overline{\{x\}} = \bigcap_{U \in n(x)} U$

ให้ $y \in \overline{\{x\}}$ จากนิยาม 3.1.1 จะได้ $x \in \overline{\{y\}}$

จากทฤษฎี 2.3.5 จะได้ว่า สำหรับทุก $U \in n(x)$, $U \cap \{y\} \neq \emptyset$

นั่นคือ $y \in U$ สำหรับทุก $U \in n(x)$

จะได้ $y \in \bigcap_{U \in n(x)} U$

ดังนั้น $\overline{\{x\}} \subset \bigcap_{U \in n(x)} U$ ---------------------------(1)

ให้ $y \in \bigcap_{U \in n(x)} U$

ดังนั้น $y \in U$ สำหรับทุก $U \in n(x)$

จะได้ว่า $U \cap \{y\} \neq \emptyset$ จากทฤษฎี 2.3.5 จะได้ $x \in \overline{\{y\}}$

แต่ $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 ดังนั้น $y \in \overline{\{x\}}$

จะได้ว่า $\bigcap_{U \in n(x)} U \subset \overline{\{x\}}$ ----------------(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $\overline{\{x\}} = \bigcap_{U \in n(x)} U$ สำหรับทุก $x \in X$

ต่อไปให้ $\overline{\{x\}} = \bigcap_{U \in n(x)} U$ สำหรับทุก $x \in X$ จะแสดงว่า (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

ให้ $y \in \overline{\{x\}}$ ดังนั้น $y \in \bigcap_{U \in n(x)} U$

จะได้ว่า $y \in U$ สำหรับทุก $U \in n(x)$

ดังนั้น $U \cap \{y\} \neq \emptyset$ จากทฤษฎี 2.3.5 จะได้ $x \in \overline{\{y\}}$

จากนิยาม 3.1.1 จะได้ว่า (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

$\square$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.1.4 ปริภูมิที่สอดคล้องกับทฤษฎี 4.1.5

ให้ $X = \{a,b,c\}$, $J = \{\{b\}, \{a,c\}, X, \emptyset\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

เซตปิดสำหรับ X คือ $\{a,c\}, \{b\}, X, \emptyset$

$\overline{\{a\}} = \{a,c\}$, เนเบอร์ฮูดของ $a = \{a,c\}$, X

ดังนั้น $\bigcap_{U \in n(a)} U = \{a,c\} \cap X = \{a,c\}$

จะได้ว่า $\overline{\{a\}} = \bigcap_{U \in n(a)} U$

ทำนองเดียวกันจะได้ว่า $\overline{\{b\}} = \bigcap_{V \in n(b)} V$

และ $\overline{\{c\}} = \bigcap_{W \in n(c)} W$

ดังนั้น $\overline{\{x\}} = \bigcap_{U \in n(x)} U$ สำหรับทุก $x \in X$

จากทฤษฎี 4.1.5

จะได้ว่า (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

$\square$

<u>ทฤษฎี</u> 4.1.6 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี ดังนั้น (X, J) จะเป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $x, y \in X$ ซึ่ง $x \neq y$ ถ้า $x \in \{y\}'$ แล้ว $y \in \{x\}'$

<u>พิสูจน์</u> ให้ (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

และให้ $x, y \in X$ ซึ่ง $x \neq y$ และ $x \in \{y\}'$

จากนิยาม 2.3.11 จะได้ว่า $x \in \overline{\{y\}}$

จาก (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 จะได้ว่า $y \in \overline{\{x\}}$

จากนิยาม 2.3.11 จะได้ว่า $y \in \{x\} \cup \{x\}'$

แต่ $y \notin \{x\}$ ดังนั้น $y \in \{x\}'$

ต่อไปให้ $x, y \in X$ ซึ่ง $x \neq y$ และ $x \in \overline{\{y\}}$

จะแสดงว่า $y \in \overline{\{x\}}$

จาก $x \in \overline{\{y\}}$ ดังนั้นจากนิยาม 2.3.11 จะได้ว่า

$x \in \{y\} \cup \{y\}'$

แต่ $x \notin \{y\}$ ดังนั้น $x \in \{y\}'$ แล้วจะได้ $y \in \{x\}'$

จากนิยาม 2.3.11 จะได้ $y \in \overline{\{x\}}$

จากนิยาม 3.1.1 จะได้ว่า (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

$\square$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.1.5 ปริภูมิที่สอดคล้องกับทฤษฎี 4.1.6

ให้ $X = \{a,b,c\}$, $J = \{\{b\}, \{a,c\}, X, \emptyset\}$

เป็นโทโพโลยีบน X

จะได้ เนเบอร์ฮูดของ a คือ $\{a,c\}$, X

เนเบอร์ฮูดของ b คือ $\{b\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b\}$, X

เนเบอร์ฮูดของ c คือ $\{a,c\}$, X

ดังนั้น a ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a\}$ เพราะ

$\{a,c\} \cap (\{a\} - \{a\}) = \emptyset$

b ไม่เป็นจุดลิมิตของ $\{a\}$ เพราะ

$\{b\} \cap (\{a\} - \{b\}) = \emptyset$

c เป็นจุดลิมิตของ $\{a\}$ เพราะ

$\{a,c\} \cap (\{a\} - \{c\}) \neq \emptyset$ และ

$X \cap (\{a\} - \{c\}) \neq \emptyset$

ดังนั้นจะได้ $\{a\}' = \{c\}$

ทำนองเดียวกันได้ $\{b\}' = \emptyset$

$\{c\}' = \{a\}$

จะได้ $a \in \{c\}'$ และ $c \in \{a\}'$, $b \notin \{a\}'$

และ $a \notin \{b\}'$, $c \notin \{b\}'$ และ $b \notin \{c\}'$

จากทฤษฎี 4.1.6 จะได้ (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

□

ทฤษฎี 4.1.7 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี ดังนั้น (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $x, y \in X$ ซึ่ง $x \neq y$ ถ้า $x \in \mathrm{Bdr}\,\{y\}$ แล้ว $y \in \mathrm{Bdr}\,\{x\}$

พิสูจน์ ให้ (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 และให้ $x \in \mathrm{Bdr}\,\{y\}$

จากทฤษฎี 2.3.7 จะได้ว่า $x \in \overline{\{y\}}$

จาก (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 ดังนั้นจากนิยาม 3.1.1 จะได้ว่า $y \in \overline{\{x\}}$

จากทฤษฎี 2.3.7 จะได้ $y \in \{x\} \cup \mathrm{Bdr}\,\{x\}$

แต่ $y \notin \{x\}$ ดังนั้น $y \in \mathrm{Bdr}\,\{x\}$

ต่อไปให้ $x, y \in X$ ซึ่ง $x \neq y$ และ $x \in \overline{\{y\}}$

ดังนั้นจากทฤษฎี 2.3.7 จะได้ $x \in \{y\} \cup Bdr\ \{y\}$

แต่ $x \notin \{y\}$ จะได้ว่า $x \in Bdr\ \{y\}$

ดังนั้น $y \in Bdr\ \{x\}$ จากทฤษฎี 2.3.7 จะได้ $y \in \overline{\{x\}}$

จากนิยาม 3.1.1 จะได้ว่า (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

□

<u>ตัวอย่าง</u> 4.1.6 ปริภูมิที่สอดคล้องกับทฤษฎี 4.1.7

ให้ $X = \{a,b,c\}$, $J = \{\{a\}, \{b,c\}, X, \emptyset\}$

เป็นโทโพโลยีบน X

จะได้เนเบอร์ฮูดของ a คือ $\{a\}, X, \{a,b\}, \{a,c\}$

เนเบอร์ฮูดของ b คือ $\{b,c\}, X$

เนเบอร์ฮูดของ c คือ $\{b,c\}, X$

ดังนั้น $a \notin Bdr\ \{b\}$ เพราะ $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$

$b \in Bdr\ \{b\}$ เพราะ $\{b,c\} \cap \{b\} \neq \emptyset$ และ

$\{b,c\} \cap (X - \{b\}) \neq \emptyset$,

$X \cap \{b\} \neq \emptyset$ และ

$X \cap (X - \{b\}) \neq \emptyset$

$c \in Bdr\ \{b\}$ เพราะ $\{b,c\} \cap \{b\} \neq \emptyset$ และ

$\{b,c\} \cap (X - \{b\}) \neq \emptyset$,

$X \cap \{b\} \neq \emptyset$ และ

$X \cap (X - \{b\}) \neq \emptyset$

ดังนั้นจะได้ $Bdr\ \{b\} = \{b,c\}$

ทำนองเดียวกันได้ว่า $Bdr\ \{a\} = \emptyset$ และ $Bdr\ \{c\} = \{b,c\}$

จะได้ $b \in Bdr\ \{c\}$ และ $c \in Bdr\ \{b\}$,

$a \notin Bdr\ \{b\}$ และ $b \notin Bdr\ \{a\}$

$a \notin Bdr\ \{c\}$ และ $c \notin Bdr\ \{a\}$

จากทฤษฎี 4.1.7 จะได้ $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

□

4.2 ความสัมพันธ์ระหว่างปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 กับปริภูมิเรกูลาร์

ในบทที่ 3 ได้แสดงไว้ว่าทุกปริภูมิเรกูลาร์จะเป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 และยังได้แสดงตัวอย่างของปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 ที่ไม่เป็นปริภูมิเรกูลาร์ ดังนั้น ในหัวข้อนี้จะแสดงว่า ต้องเพิ่มเงื่อนไขอะไรบ้างที่ทำให้ปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 เป็นปริภูมิเรกูลาร์ โดยเริ่มจากทฤษฎี ตัวอย่างและนิยามดังต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี</u> 4.2.1 ให้ X เป็นเซตจำกัด ดังนั้น (X, J) จะเป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 ก็ต่อเมื่อทุกเซตเปิดใน X จะเป็นเซตปิด

<u>พิสูจน์</u> ให้ (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 และให้ $A \in J$

จะแสดงว่า A เป็นเซตปิด

จากทฤษฎี 3.2.1 ข้อ 4 จะได้ว่า $A = \bigcup_{x \in A} \overline{\{x\}}$

จากทฤษฎี 2.3.6 ข้อ 6 และ X เป็นเซตจำกัด

จะได้ว่า $A = \overline{\bigcup_{x \in A} \{x\}}$

แต่ $\bigcup_{x \in A} \{x\} = A$ ดังนั้น $A = \bar{A}$

จากทฤษฎี 2.3.6 ข้อ 3 จะได้ว่า A เป็นเซตปิด

ต่อไปให้ $A \in J$ ซึ่ง A เป็นเซตปิดใน X

จะแสดงว่า (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

จาก $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ ดังนั้นจะได้ว่า $\bar{A} = \overline{\bigcup_{x \in A} \{x\}}$

แต่ A เป็นเซตปิด ดังนั้น $A = \bar{A}$

จะได้ว่า $A = \overline{\bigcup_{x \in A} \{x\}}$

แต่ $\overline{\bigcup_{x \in A} \{x\}} = \bigcup_{x \in A} \overline{\{x\}}$

ดังนั้นจะได้ว่า $A = \bigcup_{x \in A} \overline{\{x\}}$

จากทฤษฎี 3.2.1 ข้อ 4 จะได้ว่า (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

□

ทฤษฎี 4.2.2 ให้ X เป็นเซตจำกัด ดังนั้น (X, J) จะเป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 ก็ต่อเมื่อ (X, J) เป็นปริภูมิเรกูลาร์

พิสูจน์ ให้ (X, J) เป็นปริภูมิเรกูลาร์

จากทฤษฎี 3.4.2 จะได้ว่า (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

ต่อไปให้ (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

ให้ $x \in X$ และ F เป็นเซตปิดใน X ที่ $x \notin F$

จาก F เป็นเซตปิด ดังนั้น $F = \overline{F}$ จะได้ว่า $x \notin \overline{F}$

ดังนั้นจากทฤษฎี 2.3.5 จะมี $U \in J$ ที่ $x \in U$ ซึ่ง $U \cap F = \emptyset$

จากทฤษฎี 4.2.1 จะได้ว่า $U = \overline{U}$

ดังนั้นได้ว่า $\overline{U} \cap F = \emptyset$

จากทฤษฎี 2.7.5 จะได้ว่า (X, J) เป็นปริภูมิเรกูลาร์

□

บทแทรก 4.2.1 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี ดังนั้นถ้า (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 และทุกเซตเปิดเป็นเซตปิดแล้ว (X, J) จะเป็นปริภูมิเรกูลาร์

<u>พิสูจน์</u> ให้ (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 และทุก $U \in J$ ซึ่ง U เป็นเซตปิดด้วย

ใช้แนวการพิสูจน์ทำนองเดียวกันกับทฤษฎี 4.2.2 จะได้ว่า

(X, J) เป็นปริภูมิเรกูลาร์ □

บทกลับของบทแทรก 4.2.1 ไม่จริงเสมอไปดังจะเห็นได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง</u> 4.2.1 ปริภูมิที่เป็นเรกูลาร์ และเป็นเอสเซนเชียล T_1 แต่มีเซตเปิดที่ไม่เป็นเซตปิด

ให้ $X = R$, $J = \{\emptyset\} \cup \{A \subset R \mid 1 \notin A$ หรือ A^c เป็นเซตจำกัด $\}$

เป็นโทโพโลยี สำหรับ X

จะแสดงว่า (X, J) เป็นปริภูมิเรกูลาร์

ให้ F เป็นเซตปิดใน X และ $y \in X$ ที่ $y \notin F$

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า $y = 1$ แล้วจากนิยามของ J ได้ว่า F เป็นเซตเปิด เพราะ $1 \notin F$ และจากกำหนด F เป็นเซตปิด ดังนั้น F^c เป็นเซตเปิด ซึ่ง $F \subset F$, $y \in F^c$ และ $F \cap F^c = \emptyset$

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า $y \neq 1$ ดังนั้นจากนิยามของ J ได้ว่า $\{y\}$ เป็นเซตเปิด แต่ $(\{y\}^c)^c = \{y\}$ ซึ่งเป็นเซตจำกัด

ดังนั้นจากนิยามของ J ได้ว่า $\{y\}^c$ เป็นเซตเปิดที่ $F \subseteq \{y\}^c$

และ $\{y\} \cap \{y\}^c = \emptyset$

จาก 2 กรณี และจากนิยาม 2.7.4 ได้ว่า (X, J) เป็นปริภูมิเรกูลาร์

ต่อไปจะแสดงว่า (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

ให้ $y, z \in X$ โดยที่ $y \neq z$

<u>กรณีที่ 1</u> สมมุติ $y = 1$ ดังนั้น $z \neq 1$

จากนิยามของ J ได้ว่า $\{z\}$ เป็นเซตเปิด

แต่ $(\{z\}^c)^c = \{z\}$ เป็นเซตจำกัด

ดังนั้นจากนิยามของ J ได้ว่า $\{z\}^c$ เป็นเซตเปิดที่ $y \in \{z\}^c$

และ $\{z\} \cap \{z\}^c = \emptyset$

<u>กรณีที่ 2</u> สมมุติ $y \neq 1$ ดังนั้น $\{y\}$ เป็นเซตเปิด

และ $(\{y\}^c)^c = \{y\}$ ซึ่งเป็นเซตจำกัด

ดังนั้น $\{y\}^c$ เป็นเซตเปิดที่ $z \in \{y\}^c$

และ $\{y\} \cap \{y\}^c = \emptyset$

ดังนั้นจากทั้ง 2 กรณี และนิยาม 2.7.3 จะได้ว่า (X, J) เป็นปริภูมิ T_2

จากข้อสังเกต 2.7.2 ได้ว่า (X, J) เป็นปริภูมิ T_1

จากทฤษฎี 3.4.1 ได้ว่า (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

ต่อไปจะแสดงว่า มีเซตเปิดที่ไม่เป็นเซตปิด

ให้ A เป็นเซตของจำนวนอตรรกยะ

จากนิยามของ J จะได้ว่า A เป็นเซตเปิด เพราะ $1 \notin A$

จาก A^c คือ จำนวนตรรกยะ และนิยามของ J จะได้ว่า A^c ไม่เป็นเซตเปิด ดังนั้น A ก็ไม่เป็นเซตปิด

$\square$

<u>นิยาม</u> 4.2.1 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิโทโพโลยี จะเรียก (X, J) ว่า เป็นแซติวเรต (Saturated) ก็ต่อเมื่อ อินเตอร์เซคชันแบบใด ๆ ของเซตเปิดเป็นเซตเปิด

<u>ตัวอย่าง</u> 4.2.2 ให้ $X \neq \emptyset$ ซึ่ง $x_o \in X$ และ

$$J = \{G \subset X \,/\, x_o \in G\} \cup \{\emptyset\}$$

จะได้ว่า (X, J) เป็นแซติวเรต เพราะ

ถ้า $G_\alpha = \emptyset$ สำหรับบาง $\alpha \in \lambda$ ซึ่ง $G_\alpha \in J$

จะได้ $\bigcap_{\alpha \in \lambda} G_\alpha = \emptyset$ ซึ่งเป็นเซตเปิด

ถ้า $G_\alpha \neq \emptyset$ สำหรับทุก $\alpha \in \lambda$

จากนิยามของ $\mathcal{J}$ จะได้ว่า

$x_o \in G_\alpha$ สำหรับทุก $G_\alpha \in \mathcal{J}$

ดังนั้น $x_o \in \bigcap_{\alpha \in \lambda} G_\alpha$

จะได้ว่า $\bigcap_{\alpha \in \lambda} G_\alpha$ เป็นเซตเปิด

□

<u>ทฤษฎี</u> 4.2.3 ให้ $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 ซึ่งเป็นแซติวเรต จะได้ว่า $\overline{\{x\}}$ เป็นเซตเปิด สำหรับทุก $x \in X$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 ซึ่งเป็นแซติวเรต

จะแสดงว่า $\overline{\{x\}}$ เป็นเซตเปิดสำหรับทุก $x \in X$

ให้ $x \in X$, จากทฤษฎี 3.2.1 ข้อ 5 จะได้ว่า $\overline{\{x\}} = \bigcap_{\alpha \in \lambda} U_\alpha$

โดย $U_\alpha \in \mathcal{J}$ แต่ $(X, \mathcal{J})$ เป็นแซติวเรต

ดังนั้นจากนิยาม 4.2.1 จะได้ว่า $\bigcap_{\alpha \in \lambda} U_\alpha$ เป็นเซตเปิด

โดย $U_\alpha \in \mathcal{J}$

ดังนั้น $\overline{\{x\}}$ เป็นเซตเปิด สำหรับทุก $x \in X$

□

<u>ทฤษฎี</u> 4.2.4 ให้ $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิโทโพโลยี ถ้า $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 และแซติวเรต แล้ว $(X, \mathcal{J})$ จะเป็นปริภูมิเรกูลาร์

<u>พิสูจน์</u> ให้ (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 และเป็นแซติวเรต

จะแสดงว่า (X, J) เป็นปริภูมิเรกูลาร์

ให้ $x \in X$ และ F เป็นเซตปิดใน X ซึ่ง $x \notin F$

จาก F เป็นเซตปิด ดังนั้น $F = \overline{F}$

จะได้ว่า $x \notin \overline{F}$

จากทฤษฎี 2.3.5 จะมี $U \in J$ ซึ่ง $x \in U$ และ $U \cap F = \emptyset$

แต่ (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1

จากทฤษฎี 3.2.1 ข้อ 4 จะได้ $U = \bigcup\limits_{y \in U} \overline{\{y\}}$

ดังนั้น $\left[\bigcup\limits_{y \in U} \overline{\{y\}}\right] \cap F = \emptyset$

จากนิยาม 2.1.2 คุณสมบัติของเซตข้อ 2.3

จะได้ $\left[\bigcup\limits_{y \in U} \overline{\{y\}}\right] \cap F = \bigcup\limits_{y \in U} \left[\overline{\{y\}} \cap F\right]$

ดังนั้น $\bigcup\limits_{y \in U} \left[\overline{\{y\}} \cap F\right] = \emptyset$

จะได้ $\overline{\{y\}} \cap F = \emptyset$ สำหรับทุก $y \in U$

ดังนั้น $\overline{\{x\}} \cap F = \emptyset$

แต่ (X, J) เป็นปริภูมิเอสเซนเชียล T_1 และเป็นแซติวเรต

ดังนั้นจากทฤษฎี 4.2.3 จะได้ $\overline{\{x\}}$ เป็นเซตเปิด

แต่จากทฤษฎี 2.3.6 ได้ว่า $\overline{\overline{\{x\}}} = \overline{\{x\}}$

ดังนั้น $\overline{\overline{\{x\}}} \cap F = \overline{\{x\}} \cap F = \emptyset$

จากทฤษฎี 2.7.5 จะได้ว่า (X, J) เป็นปริภูมิเรกูลาร์

$\square$