บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานเฉพาะที่จำเป็น เพื่อนำไปใช้ในบทที่ 3 และบทที่ 4 โดยจะกล่าวถึงนิยาม ทฤษฎี และตัวอย่างพอสังเขป สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีในบทนี้จะไม่แสดงไว้ แต่ผู้สนใจสามารถศึกษาได้จากเอกสารอ้างอิงที่ระบุไว้ท้ายเล่ม

สำหรับความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเซต ฟังก์ชัน ความสัมพันธ์ และนิยามของคำศัพท์บางคำ เช่น เซตว่าง (empty set) , ยูเนียน (union) อินเตอร์เซคชัน (intersection), คอมพลีเมนต์ (complement), เซตจำกัด (finite set), เซตอนันต์ (infinite set) เป็นต้น
ผู้เขียนไม่ได้ให้รายละเอียดไว้ แต่ผู้สนใจสามารถค้นคว้าได้จากตำราคณิตศาสตร์ทั่วๆ ไป

สัญลักษณ์ที่สำคัญที่ใช้ในงานวิจัยนี้ได้แก่

สัญลักษณ์	ความหมาย
$\emptyset$	เซตว่าง (empty set)
R	เซตของจำนวนจริง
N	เซตของจำนวนธรรมชาติ
$f : A \longrightarrow B$	f เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต B
$\subset$	สับเซต
$\not\subset$	ไม่เป็นสับเซต
$\in$	เป็นสมาชิกของ
$\notin$	ไม่เป็นสมาชิกของ

<u>สัญลักษณ์</u>	<u>ความหมาย</u>
$>$	มากกว่า
$<$	น้อยกว่า
$\geq$	มากกว่า หรือเท่ากับ
$\leq$	น้อยกว่า หรือเท่ากับ
$\cap$	อินเตอร์เซคชัน (Intersection)
$\cup$	ยูเนียน (Union)
$=$	การเท่ากัน
$\neq$	ไม่เท่ากัน
$\forall$	สำหรับทุกๆ สมาชิก
$\exists$	สำหรับบางสมาชิก
inf	อินฟีมัม (Infemum)
sup	ซูพรีมัม (Supremum)
$\{x_n\}$	ลำดับ
$X - A$	เซต $\{x : x \in X$ และ $x \notin A\}$
(a, b)	เซต $\{x \in R : a < x < b\}$
$[a, b]$	เซต $\{x \in R : a \leq x \leq b\}$
$[a, \infty)$	เซต $\{x \in R : a \leq x < \infty\}$
$\max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$	จำนวนที่มากที่สุดระหว่าง $a_1, a_2, \ldots, a_n$
$\min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$	จำนวนที่น้อยที่สุดระหว่าง $a_1, a_2, \ldots, a_n$
λ	เซตดรรชนีใดๆ
$\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$	เซตของจุดในระนาบ xy ซึ่งก็คือจุด $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$
P_n	**ฟังก์ชันโพลิโนเมียลมีกำลัง $\leq n$ และมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง**

2.1 <u>จำนวนจริง</u> (the real numbers)

<u>นิยาม</u> 2.1.1 ให้ $\emptyset \neq A \subset R$

(1) ถ้ามี $a \in R$ ที่ทำให้ $a \geq x \quad \forall x \in A$ จะเรียก a ว่าเป็น<u>ขอบเขตบน</u> (upper bound) <u>ของ A</u>

(2) ถ้ามี $b \in R$ ที่ทำให้ $b \leq x \quad \forall x \in A$ จะเรียก b ว่า เป็น<u>ขอบเขตล่าง</u> (lower bound) <u>ของ A</u>

(3) จะเรียกเซต A ว่าเป็น<u>เซตที่มีขอบเขตบน</u> (upper bounded set) ก็ต่อเมื่อ A มีขอบเขตบน

(4) จะเรียกเซต A ว่าเป็น<u>เซตที่มีขอบเขตล่าง</u> (lower bounded set) ก็ต่อเมื่อ A มีขอบเขตล่าง

(5) จะเรียกเซต A ว่าเป็น<u>เซตที่มีขอบเขต</u> (bounded set) ก็ต่อเมื่อ A มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

<u>นิยาม</u> 2.1.2 ให้ $\emptyset \neq A \subset R$

(1) ถ้า A มีขอบเขตบน จะเรียก $m \in R$ ว่า <u>ขอบเขตบนค่าน้อยที่สุด</u> (least upper bound) <u>ของ A</u> เขียนแทนด้วย m = sup A ก็ต่อเมื่อ m เป็นขอบเขตบนของ A และ $m \leq c$ สำหรับทุกๆ c ที่เป็นขอบเขตบนของ A

(2) ถ้า A มีขอบเขตล่าง จะเรียก $k \in R$ ว่า<u>ขอบเขตล่างค่ามากที่สุด</u> (greatest lower bound) <u>ของ A</u> เขียนแทนด้วย k = inf A ก็ต่อเมื่อ k เป็นขอบเขตล่างของ A และ $s \leq k$ สำหรับทุกๆ s ที่เป็นขอบเขตล่างของ A

<u>สัจพจน์</u> ให้ $A \subset R$ โดยที่ $A \neq \emptyset$ และเป็นเซตที่มีขอบเขตบน แล้ว A จะมีขอบเขตบนค่าน้อยที่สุด

<u>ทฤษฎี</u> 2.1.1 ถ้า $A \subset R$ โดยที่ $A \neq \emptyset$ และเป็นเซตที่มีขอบเขตล่าง แล้ว A จะมีขอบเขตล่างค่ามากที่สุด

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [6] หน้า 25

2.2 <u>โทโพโลยีขั้นพื้นฐานของจำนวนจริง</u>

(basic topology of the real numbers)

<u>นิยาม</u> 2.2.1 ให้ทุกๆ จุด และทุกเซตข้างล่างเป็นสมาชิก และสับเซตของ R

(1) <u>เนเบอร์ฮูด</u> (neighnorhood) ของจุด x คือเซต $\{y \in R : |x - y| < r\}$ สำหรับแต่ละ $r > 0$ โดยใช้สัญลักษณ์ $N_r(x)$ แทนเนเบอร์ฮูดของจุด x และเรียก r ใน $N_r(x)$ ว่า<u>รัศมี</u> ของ $N_r(x)$

(2) เรียกจุด x ว่าเป็น<u>จุดลิมิต</u> (limit point) <u>ของเซต E</u> ถ้าในแต่ละเนเบอร์ฮูดของ x มีจุด y ซึ่ง $x \neq y$ และ $y \in E$

(3) E เป็น<u>เซตปิด</u> (closed set) ถ้าทุกๆ จุดลิมิตของ E อยู่ใน E

(4) G เป็นเซตเปิด (open set) ก็ต่อเมื่อ $R - G$ เป็นเซตปิด

ทฤษฎี 2.2.1

(1) ถ้า $\{G_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ เป็นคลาสของเซตเปิดของ R แล้ว $\bigcup_{\alpha\in\lambda} G_\alpha$ เป็นเซตเปิดของ R

(2) ถ้า $\{F_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ เป็นคลาสของเซตปิดของ R แล้ว $\bigcap_{\alpha\in\lambda} F_\alpha$ เป็นเซตปิดของ R

(3) ถ้า $G_1, G_2, \ldots, G_n$ เป็นเซตเปิด n เซต ของ R จะได้ว่า $\bigcap_{\alpha=1}^{n} G_\alpha$ เป็นเซตเปิดของ R

(4) ถ้า $F_1, F_2, \ldots, F_n$ เป็นเซตปิด n เซตของ R จะได้ว่า $\bigcup_{\alpha=1}^{n} F_\alpha$ เป็นเซตปิดของ R

พิสูจน์ ดูรายละเอียดจาก [3] หน้า 45

ข้อตกลง ให้ $\{A_\alpha : \alpha \in \emptyset\}$ เป็นคลาสของเซตใดๆ ของ R

$$\bigcup_{\alpha\in\emptyset} A_\alpha = \emptyset$$

$$\bigcap_{\alpha\in\emptyset} A_\alpha = R$$

นิยาม 2.2.2 ให้ $E \subset R$ และให้ E' เป็นเซตของจุดลิมิตทั้งหมดของ E ใน R

โคลเชอร์ (Closure) ของ E คือเซต $\bar{E} = E \cup E'$

<u>ทฤษฎี</u> 2.2.2 ให้ $\emptyset \neq E \subset R$ และให้ E มีขอบเขตบน
ให้ $y = \sup E$ ดังนั้น $y \in \bar{E}$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [3] หน้า 46 - 47

<u>นิยาม</u> 2.2.3 ให้ $\{G_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ เป็นคลาสของสับเซตของ R
เรียกคลาส $\{G_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ นี้ว่า <u>โคเวอร์เปิด</u> (open cover) ของสับเซต E ของ R ถ้า G_α เป็นเซตเปิด
และ $E \subset \bigcup_{\alpha\in\lambda} G_\alpha$

<u>นิยาม</u> 2.2.4 ให้ $K \subset R$ จะเรียก K ว่าเป็น<u>คอมแพคสับเซต</u>ของ R
ถ้า $\{G_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ เป็นโคเวอร์เปิดของ K แล้วจะมี

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ใน λ ซึ่งทำให้ $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$

<u>ข้อสังเกต</u> จะเห็นได้ว่า ทุกๆ เซตจำกัดของ R จะเป็นคอมแพคเซตเสมอ

<u>ทฤษฎี</u> 2.2.3 ให้ $E \subset R$ ดังนั้น ข้อความทั้งสามที่เกี่ยวกับ E
ข้างล่างนี้ จะสมมูลกัน

(1) E เป็นคอมแพคเซต

(2) E เป็นเซตปิด และเป็นเซตที่มีขอบเขต

(3) ทุกๆ สับเซตอนันต์ของ E จะมีจุดลิมิตใน E เสมอ

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [3] หน้า 55 - 56

2.3 ลำดับของจำนวนและการลู่เข้า

(numerical sequences and convergence of sequences)

นิยาม 2.3.1 จะกล่าวว่า f เป็นลำดับ (sequences) ในเซต $S \subseteq R$ ซึ่ง $S \neq \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ $f : N \longrightarrow S$

ซึ่ง $f(n) = x_n \in S$

สำหรับ $n \in N$ เรานิยมเขียนแทนลำดับ f ด้วยสัญลักษณ์ $\{x_n\}$ หรือ $(x_1, x_2, \ldots)$ หรือ (x_n) หรือ $x_1, x_2, x_3, \ldots$ เรียก x_n ของ f ว่าพจน์ที่ n ของลำดับ $\{x_n\}$ (the n^{th} term of the sequence $\{x_n\}$)

นิยาม 2.3.2 ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับใน R เรียกสมาชิก x ของ R ว่า เป็นลิมิต (limit) ของ $\{x_n\}$ ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_ε (ขึ้นอยู่กับ ε) ซึ่งทำให้

$|x - x_n| < \varepsilon$ สำหรับทุกๆ n ที่ $n \geq N_\varepsilon$

ในกรณีเช่นนี้ เราอาจกล่าวว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้า (converge) สู่ x หรือ กล่าวว่าลำดับ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่ลู่เข้า (convergent sequence) ถ้าลำดับใดไม่มีลิมิต เรียกลำดับนั้นว่า ลำดับที่ไดเวอร์จ (divergent sequence)

ถ้า $\{x_n : n \geq 1\}$ เป็นเซตที่มีขอบเขต จะเรียกลำดับ $\{x_n\}$ ว่าเป็น ลำดับที่มีขอบเขต (bounded sequence)

<u>ทฤษฎี</u> 2.3.1 ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับใน R จะได้ว่า

(1) $\{x_n\}$ จะลู่เข้าสู่ x ก็คือเมื่อ แต่ละเนเบอร์ฮูด $N_r(x)$ ของจุด x จะมีจำนวนเต็ม N (ขึ้นอยู่กับ $N_r(x)$) ซึ่ง $x_n \in N_r(x)$ สำหรับทุกๆ n ที่ $n \geq N$

(2) ถ้า x และ y ใน R ต่างก็เป็นลิมิตของ $\{x_n\}$ แล้ว $x = y$

(3) ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่ลู่เข้า แล้ว $\{x_n\}$ จะเป็นลำดับที่มีขอบเขต

(4) ถ้า $E \subseteq R$ และ x เป็นจุดลิมิตของ E แล้ว จะมีลำดับใน E ที่ลู่เข้าสู่ x

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [3] หน้า 78 - 79

<u>สัญลักษณ์</u> ถ้า " $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ x " หรือ " x คือ ลิมิตของ $\{x_n\}$ " แล้ว อาจเขียนแทนข้อความดังกล่าวด้วยสัญลักษณ์

$x_n \dashrightarrow x$ หรือ $\lim\limits_{n \dashrightarrow \infty} x_n = x$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.3.1

(1) ลำดับ $\{\frac{1}{n}\}$ ลู่เข้าสู่ 0

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\varepsilon > 0$ เราสามารถเลือก จำนวนเต็มบวก N_ε ซึ่งทำให้ $\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$

ดังนั้น ถ้า $n \geq N_\varepsilon$ แล้วจะได้ว่า

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

นั่นคือ $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$

(2) ให้ $a > 0$ และให้ $x_n = \frac{1}{1 + na}$ สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า $x_n \longrightarrow 0$ ซึ่งแสดงได้ดังนี้

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\varepsilon > 0$ เราเลือก จำนวนเต็มบวก N_ε ซึ่งทำให้ $\frac{1}{N_\varepsilon} < a\varepsilon$ ดังนั้น ถ้า $n \geq N_\varepsilon$ แล้วจะได้ว่า

$$\left|\frac{1}{1 + na} - 0\right| = \frac{1}{1 + na} < \frac{1}{na} \leq \frac{1}{N_\varepsilon a} < \varepsilon$$

นั่นคือ $x_n \longrightarrow 0$

<u>ทฤษฎี</u> 2.3.2 ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับใน R ซึ่ง $x_n \geq 0$ $(n=1,2,\ldots)$ และถ้า $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = L$ แล้ว $L \geq 0$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [1] หน้า 24

2.4 <u>ความต่อเนื่อง</u> (Continuity)

<u>นิยาม</u> 2.4.1 ให้ $E \subseteq R$ และ $f : E \longrightarrow R$ ซึ่ง x_0 เป็นจุดลิมิตของ E จะกล่าวว่า f <u>มีลิมิตเท่ากับ L ที่ x_0</u> ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$ สำหรับทุกๆ จุด $x \in E$ ที่ $0 < |x - x_0| < \delta$

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.1 จะมีลิมิตของฟังก์ชันที่จุด (คงที่)ใดๆ ได้อย่างมากหนึ่งค่าเท่านั้น

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [3] หน้า 153

<u>สัญลักษณ์</u> ถ้า "ฟังก์ชัน f มีลิมิตเท่ากับ L ที่ x_o" แล้วอาจเขียนแทนข้อความดังกล่าวด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = L$

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.2 ให้ $E \subseteq R$ และ $f : E \longrightarrow R$ ซึ่ง x_o เป็นจุดลิมิตของ E แล้ว f จะมีลิมิตที่ x_o ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกลำดับ $\{x_n\}$ ใน E ที่ลู่เข้าสู่ x_o และ $x_n \neq x_o$ สำหรับทุกๆ n แล้ว $\{f(x_n)\}$ จะลู่เข้าสู่ $f(x_o)$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [6] หน้า 73

<u>นิยาม</u> 2.4.2 ให้ $E \subseteq R$ และ $f : E \longrightarrow R$ ให้ a เป็นจุดในโดเมน E เรากล่าวว่า f <u>เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a</u> (f is continuous at a) ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ จะมี จำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ สำหรับทุกๆ $x \in E$ ที่ $|x - a| < \delta$

ถ้าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกๆ จุดในโดเมน E เราเรียก f ว่า <u>เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน E</u> (continuous function on E)

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.3 ให้ $E \subseteq R$ และ $f : E \dashrightarrow R$ ซึ่ง a เป็นจุดลิมิตของ E แล้วจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [3] หน้า 159

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.4 ให้ $E \subset R$ และ $f : E \dashrightarrow R$ ให้ a เป็นจุดในโดเมน E แล้วจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกลำดับ $\{x_n\}$ ใน E ซึ่งลู่เข้าสู่ a แล้ว ลำดับ $\{f(x_n)\}$ จะลู่เข้าสู่ $f(a)$ เสมอ

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [3] หน้า 160

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.5 ให้ฟังก์ชัน $f, g : E \dashrightarrow R$ และต่อเนื่องที่จุด x_o ใน E แล้ว

(1) $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ จะต่อเนื่องที่จุด x_o

(2) cf, $c \in R$ จะต่อเนื่องที่จุด x_o

(3) ถ้า $g(x_o) \neq 0$ แล้ว $\frac{f}{g}$ จะต่อเนื่องที่จุด x_o

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [3] หน้า 165

<u>นิยาม</u> 2.4.3 ฟังก์ชัน f ซึ่งมีเรนจ์อยู่ใน R จะเป็น<u>ฟังก์ชันที่มีขอบเขต</u> (bounded function) ถ้ามีจำนวนจริง M ซึ่งทำให้

$$|f(x)| \leq M \text{ สำหรับทุกๆ } x \text{ ในโดเมนของ } f$$

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.6 ถ้า $f : [a, b] \dashrightarrow R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [7] หน้า 93

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.7 ให้ f มีความต่อเนื่องบนคอมแพคสับเซต E ของ R ซึ่งมีเรนจ์อยู่ใน R ดังนั้นจะมีจุด $\underline{x}$ และ $\bar{x}$ ใน E ซึ่งทำให้ $f(\underline{x}) = \inf f(E)$,

$f(\bar{x})$ sup $f(E)$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [1] หน้า 91

<u>นิยาม</u> 2.4.4 ให้ $E \subset R$ และ $f : E \dashrightarrow R$ ฟังก์ชัน f <u>มีความต่อเนื่องแบบเสมอต้นเสมอปลาย</u> (f is uniformly continuous) บน E ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ สำหรับทุก x, y ใน E ที่ $|x - y| < \delta$

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.8 ให้ $E \subset R$ และ $f : E \dashrightarrow R$ ถ้า E เป็นคอมแพคเซต แล้ว f จะมีความต่อเนื่องแบบเสมอต้นเสมอปลาย บน E

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [3] หน้า 175

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.9 ให้ $f : [a,b] \to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ และ $y \in R$ ซึ่ง y อยู่ระหว่าง $f(a)$ และ $f(b)$ แล้วจะมี $c \in (a, b)$ ซึ่ง $f(c) = y$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [5] หน้า 106

<u>ทฤษฎี</u> 2.4.10 ให้ $f : R \to R$ มีความต่อเนื่องที่จุด a ใน R และ $f(a) > 0$ แล้วจะมี $h > 0$ ซึ่งทำให้ $f(x) > 0$ สำหรับ $a - h < x < a + h$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [1] หน้า 71 - 72

2.5 <u>อนุพันธ์ของฟังก์ชัน</u>

<u>นิยาม</u> 2.5.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีโดเมน E เป็นสับเซตของ R ให้ c เป็นจุดลิมิตของ E และ $c \in E$ เรียกจำนวนจริง L ว่าเป็น<u>อนุพันธ์ของ f</u> ที่ c ถ้า

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = L$$

เขียนแทนจำนวนจริง L ด้วย $f'(c)$

<u>หมายเหตุ</u>

(1) ถ้าลิมิต $f'(c)$ ในนิยาม 2.5.1 มีจริง เรากล่าวว่า f <u>มีอนุพันธ์ที่ c</u> (f is differentiable at c)

(2) จะเห็นว่าสำหรับแต่ละฟังก์ชัน f จะมีฟังก์ชัน f' ที่มีโดเมนเป็นเซตที่ประกอบไปด้วยจุด c ในนิยาม 2.5.1 ที่ทำให้ลิมิต (ในนิยามดังกล่าว) มีจริง และค่า $f'(c)$ ของฟังก์ชัน f' ที่จุด c ก็คือ อนุพันธ์ของ f ที่จุด c นั่นเอง เรียกฟังก์ชัน f' ว่า ฟังก์ชันอนุพันธ์ของ f (The derivative of f)

(3) ถ้าโดเมนของ f' ในข้อ (2) ข้างบน คือ เซต E เรากล่าวว่า f มีอนุพันธ์บน E (f is differentiable on E)

(4) ในกรณี E คือช่วง $[a, b]$ บางช่วง และ $c = a$ จะเห็นว่าในการหาอนุพันธ์ หรือลิมิตในนิยาม 2.5.1 นั้น x จะเข้าหา c ด้านขวา และในทางตรงกันข้าม ถ้า $c = b$ x จะเข้าหา c ด้านซ้าย เราจะเรียก L ในแต่ละกรณีตามลำดับว่า เป็นอนุพันธ์ด้านขวาของ f ที่ c (The right - hand derivative of f at c)

และ อนุพันธ์ด้านซ้ายของ f ที่ c (The left - hand derivative of f at c)

<u>ทฤษฎี</u> 2.5.1 ทฤษฎีบทค่ามัชฌิม (Mean Value Theorem)
ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และมีอนุพันธ์บน (a, b) ดังนั้นจะมีจุด c ใน (a, b) ซึ่ง $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [3] หน้า 206

<u>ทฤษฎี</u> 2.5.2 ทฤษฎีบทของโรลล์ (Rolle's Theorem)
ถ้า f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่ต่อเนื่องบน $[a, b]$ และมีอนุพันธ์บน (a, b) และ $f(a) = f(b)$ แล้วจะมี $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $f'(c) = 0$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [1] หน้า 108 - 109

<u>นิยาม</u> 2.5.2 <u>อนุพันธ์อันดับสูง</u> (Derivatives of Higher Order)
สมมุติว่า f มีฟังก์ชันอนุพันธ์ f' บนเซต E ถ้าฟังก์ชัน f' มีอนุพันธ์ที่จุด c ใน E เราเรียกอนุพันธ์ของ f' ที่ c ว่า <u>อนุพันธ์อันดับสอง</u> (The second derivatives) ของ f ที่ c และเรานิยม เขียนค่าอนุพันธ์นี้ว่า $f''(c)$ ในทำนองเดียวกัน เราสามารถให้นิยาม <u>อนุพันธ์อันดับสาม</u> (The third derivatives) $f'''(c)$ ของ f ที่ c, ... , และ<u>อนุพันธ์อันดับที่ n</u> (The n^{th} derivative or the derivative of order n) $f^{(n)}(c)$ ของ f ที่ c ตราบเท่าที่อนุพันธ์เหล่านี้มีจริง

ในทำนองเดียวกันกับฟังก์ชันอนุพันธ์ f' ของ f เรามีนิยามของฟังก์ชันอนุพันธ์อันดับที่สูงขึ้นของ f (ถ้าหากอนุพันธ์ดังกล่าวมีจริง) และนิยมใช้สัญลักษณ์ $f^o, f', f'', f^{(3)}, \ldots, f^{(n)}$ แทนฟังก์ชัน f (ซึ่งจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันอนุพันธ์อันดับศูนย์ของ f ก็ได้) ฟังก์ชันอนุพันธ์ f' (ซึ่งจะเรียกว่าเป็นฟังก์ชันอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งก็ได้) ฟังก์ชันอนุพันธ์อันดับสอง, ฟังก์ชันอนุพันธ์อันดับสาม,..., และฟังก์ชันอนุพันธ์อันดับที่ n ของ f ตามลำดับ

2.6 ฟังก์ชันโพลิโนเมียล

นิยาม 2.6.1 เรียกฟังก์ชันในรูป $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ ว่า ฟังก์ชันโพลิโนเมียลกำลัง n ของตัวแปร x ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนคงค่า $a_0, a_1, \dots, a_n$ โดยที่ $a_0 \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

นิยาม 2.6.2 ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียลกำลัง n เรียก จำนวนจริง m ที่ $f(m) = 0$ ว่า รากของฟังก์ชันโพลิโนเมียล f

ทฤษฎี 2.6.1 ถ้า $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ มีราก n ราก ที่แตกต่างกัน คือ $r_1, r_2, \dots, r_n$ แล้ว $f(x)$ สามารถเขียนได้เป็น

$$f(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดจาก [2] หน้า 17

ทฤษฎี 2.6.2 ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียลกำลัง n แล้ว f จะมีรากได้ไม่เกิน n รากที่แตกต่างกัน

พิสูจน์ ดูรายละเอียดจาก [2] หน้า 19

<u>ทฤษฎี</u> 2.6.3 <u>การประมาณค่าของฟังก์ชันด้วยฟังก์ชันโพลิโนเมียล</u>

(Polynomial Interpolation)

ถ้า กำหนด $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$ เป็นเซตของจุด ที่

$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ จะมีฟังก์ชันโพลิโนเมียล

p_{n-1} ซึ่งมีกำลังอย่างมาก $n - 1$ เพียงฟังก์ชันเดียว

เท่านั้น ที่ $p_{n-1}(x_i) = y_i$; $i = 1, 2, \dots, n$

และ p_{n-1} สามารถเขียนได้เป็น

$$p_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} \{y_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}\}$$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [4] หน้า 70 - 71

<u>ทฤษฎี</u> 2.6.4 กำหนดให้ $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็น n จุดที่ต่างกัน

ในช่วง $[a, b]$ ใดๆ และให้ฟังก์ชัน f มีค่าอนุพันธ์อันดับ

ที่ 1 ถึง $n - 1$ ซึ่งหาค่าได้ และมีความต่อเนื่องบน $[a,b]$

ส่วนอนุพันธ์อันดับที่ n ของ f หาค่าได้ บน (a, b)

แล้วจะมี ξ_x (ขึ้นอยู่กับ x) ใน (a, b) ซึ่งทำให้

$$f(x) - p_{n-1}(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!}$$

เมื่อ $$p_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} \{y_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}\}$$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [4] หน้า 76 - 77