บทที่ 3

การประมาณฟังก์ชันค่าจริงที่ไม่เป็นลบด้วยฟังก์ชันโพลิโนเมียลที่ไม่เป็นลบบน $[0, 1]$ ตอน I

ในบทนี้จะศึกษาการประมาณฟังก์ชันค่าจริงที่ไม่เป็นลบด้วยฟังก์ชันโพลิโนเมียลที่ไม่เป็นลบบน $[0, 1]$ จากบทความของ John Briggs และ Lee A. Rubel เรื่อง "Interpolation by Non - Negative Polynomials" จากวารสาร Journal of Approximation Theory ปีที่ 30 ฉบับที่ 3 เดือนพฤศจิกายน ปี 1980

<u>นิยาม</u> 3.1 ให้ $f : [0,1] \to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0, 1]$ และให้ p เป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียล ซึ่ง $\{x \in [0, 1]: f(x) = p(x)\}$ เป็นเซตจำกัด และไม่เป็นเซตว่าง ให้ $\triangle = f - p$ และ $t \in [0, 1]$

(ก) ถ้า $\triangle(t) = 0$ แล้วจะเรียก t ว่า<u>ค่าอินเตอร์เซคชัน</u> (intersection value) ของ (f, p)

(ข) ถ้า $\triangle(x) > 0$ (หรือ $\triangle(x) < 0$) $\forall x \in [t-h, t)$ และ $\triangle(x) < 0$ (หรือ $\triangle(x) > 0$) $\forall x \in (t, t + h]$ สำหรับบาง $h > 0$ โดยที่ $t \neq 0, t \neq 1$ แล้ว จะเรียก t ว่า ค่า<u>ครอสโอเวอร์</u> (crossover value) ของ (f, p)

(ค) ถ้า $\Delta(t) = 0$ และ $\Delta(x) \geq 0$ (หรือ $\Delta(x) \leq 0$) $\forall x \in [t - h, t + h]$ สำหรับบาง $h > 0$ โดยที่ $t \neq 0$, $t \neq 1$ แล้วจะเรียก t ว่า <u>ค่าคิส</u> (kiss value) ของ (f, p)

(ง) ถ้า $\Delta(t) = 0$ โดยที่ $t = 0$ หรือ $t = 1$ แล้ว จะเรียก t ว่า <u>ค่าเอนด์อินเตอร์เซคชัน</u> (end intersection value) ของ (f, p)

(จ) ถ้า t เป็นค่าครอสโอเวอร์ หรือค่าเอนด์อินเตอร์-เซคชัน ของ (f, p) แล้ว จะเรียก t ว่า <u>ค่ากู๊ดอินเตอร์เซคชัน</u> (good intersection value) ของ (f, p)

<u>ทฤษฎีบทประกอบ</u> 3.1 กำหนดให้ f และ p เช่นเดียวกับนิยาม 3.1 ถ้า t เป็นค่าอินเตอร์เซคชัน ของ (f, p) แล้ว t จะเป็น (1) ค่าครอสโอเวอร์ หรือ
(2) ค่าคิส หรือ
(3) ค่าเอนด์อินเตอร์เซคชัน
อย่างใดอย่างหนึ่ง

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก t เป็นค่าอินเตอร์เซคชัน ของ (f, p)
ดังนั้น $\Delta(t) = f(t) - p(t) = 0$
ถ้า $t = 0$ หรือ $t = 1$ แล้ว t เป็นค่าเอนด์อินเตอร์เซคชัน

ถ้า $t \in (0, 1)$

สมมุติว่า t ไม่เป็นค่าครอสโอเวอร์ของ (f, p)

ดังนั้น $\Delta(x) \geq 0$ (หรือ $\Delta(x) \leq 0$)

$$\forall x \in [t - h, t + h] \quad \exists h > 0$$

ดังนั้น t เป็นค่าคิสของ (f, p)

$\square$

<u>ทฤษฎีบทประกอบ</u> 3.2 กำหนดให้ f และ p เช่นเดียวกับนิยาม 3.1 ถ้า t เป็นค่าครอสโอเวอร์ของ (f, p) และให้ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ และสำหรับทุกๆ ฟังก์ชันโพลิโนเมียล q ซึ่ง

$$|p(x) - q(x)| < \delta \quad \forall x \in [0, 1]$$

แล้ว (f, q) มีค่าครอสโอเวอร์อย่างน้อย 1 จุด ในช่วง $[t - \varepsilon, t + \varepsilon]$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก t เป็นค่าครอสโอเวอร์ของ (f, p) ดังนั้นมี $h_1 > 0$ ซึ่งทำให้

$$\Delta(x) > 0 \quad \forall x \in [t - h_1, t) \quad \text{และ}$$
$$\Delta(x) < 0 \quad \forall x \quad (t, t + h_1]$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{หรือ} \ \Delta(x) < 0 \quad \forall x \quad [t - h_1, t) & \text{และ} \\ \Delta(x) > 0 \quad \forall x \quad (t, t + h_1] & \end{array} \right\}$$

เลือก $h > 0$ ซึ่ง $h < \min(h_1, \varepsilon)$

ให้ $r_1 = \dfrac{f(t - h) - p(t - h)}{2}$

และ $r_2 = \dfrac{p(t + h) - f(t + h)}{2}$

เลือก $\delta > 0$ ที่ $\delta < \min(r_1, r_2)$

ดังนั้น $f(t-h) > p(t-h) + 2\delta$ และ

$$p(t+h) > f(t+h) + 2\delta$$

ให้ q เป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียล ซึ่ง $|p(x) - q(x)| < \delta \quad \forall x \in [0,1]$

พิจารณา $\quad p(x) - q(x) < \delta \qquad \forall x \in [0,1]$

$$f(t+h) + 2\delta < p(t+h) < q(t+h) + \delta$$

$$\Longrightarrow f(t+h) + \delta < q(t+h)$$

$$\Longrightarrow f(t+h) - q(t+h) < -\delta < 0$$

พิจารณา $\quad p(x) - q(x) > -\delta \qquad \forall x \in [0,1]$

$$f(t-h) - 2\delta > p(t-h) > q(t-h) - \delta$$

$$\Longrightarrow f(t-h) - \delta > q(t-h)$$

$$\Longrightarrow f(t-h) - q(t-h) > \delta > 0$$

จะแสดงว่า (f, q) จะมีค่าครอสโอเวอร์อย่างน้อย 1 จุด ใน $[t-h, t+h]$

สมมุติว่ามีจุด $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ไม่เป็นค่าครอสโอเวอร์ของ (f, q) ใน $[t-h, t+h]$

ดังนั้น $f(x) - q(x) > 0$ (หรือ $f(x) - q(x) < 0$)

$$\forall x \in [t-h, t+h] - \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$f(t+h) - q(t+h) > 0$ (หรือ $f(t-h) - q(t-h) < 0$)

ซึ่งขัดแย้ง ดังนั้นจะมี x_i เป็นค่าครอสโอเวอร์ของ (f, q) ใน $[t-h, t+h]$ สำหรับบาง $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

เนื่องจาก $[t - h, t + h] \subset [t - \varepsilon, t + \varepsilon]$
ดังนั้น (f, q) มีค่าครอสโอเวอร์อย่างน้อย 1 จุดในช่วง
$[t - \varepsilon, t + \varepsilon]$

$\square$

<u>นิยาม</u> 3.2 ให้ f และ q เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่ต่อเนื่องบน $[0, 1]$
ซึ่ง $f(0) = g(0) = 0$ และ $g(x) \leq f(x)$ $\forall x \in [0,1]$
เรียกกราฟ f และ g <u>สัมผัสกัน</u>ที่จุด $x = 0$ ถ้า

$$\lim_{x \to 0^+} \inf \frac{f(x) - g(x)}{x} = 0$$

ถ้า $f(1) = g(1) = 0$ และ $g(x) \leq f(x)$ $\forall x \in [0,1]$
เรียกกราฟ f และ g <u>สัมผัสกัน</u>ที่จุด $x = 1$ ถ้า

$$\lim_{x \to 1^-} \inf \frac{f(x) - g(x)}{x} = 0$$

<u>หมายเหตุ</u>

$$\lim_{x \to a^+} \inf f(x) = \sup_{h>0} \inf_{a<x<a+h} f(x)$$

$$\lim_{x \to a^-} \inf f(x) = \sup_{h>0} \inf_{a-h<x<a} f(x)$$

<u>ตัวอย่าง</u> 3.1 จะแสดงว่า กราฟ f และ g สัมผัสกันที่ $x = 0$

3.1.1 ให้ $f(x) = x^2$; $g(x) = 0$ $\forall x \in [0, 1]$

จะเห็นว่า $f(0) = g(0) = 0$ และ $g(x) \leq f(x)$
$\forall x \in [0, 1]$

พิจารณา $\lim_{x\to o^+} \inf \frac{f(x) - g(x)}{x} = \lim_{x\to o^+} \inf \frac{x^2 - 0}{x}$

$= \lim_{x\to o^+} \inf x$

$= \sup_{h>o} \inf_{o<x<h} x = 0$

ดังนั้นกราฟ f และ g สัมผัสกันที่ $x = 0$

$\square$

3.1.2 ให้ $f(x) = x^2$; $g(x) = x^3$

จะเห็นว่า $f(0) = g(0) = 0$ และ $g(x) \leq f(x)$

$\forall x \in [0, 1]$

พิจารณา $\lim_{x\to o^+} \inf \frac{f(x) - g(x)}{x} = \lim_{x\to o^+} \inf \frac{x^2 - x^3}{x}$

$= \lim_{x\to o^+} \inf (x - x^2)$

$= \sup_{h>o} \inf_{o<x<h} (x - x^2) = 0$

ดังนั้นกราฟ f และ g สัมผัสกันที่ $x = 0$

$\square$

<u>ตัวอย่าง</u> 3.2 จะแสดงว่า กราฟ f และ g สัมผัสกันที่ $x = 1$

3.2.1 ให้ $f(x) = 1 - x^2$; $g(x) = 1 - x \quad \forall x \in [0, 1]$

จะเห็นว่า $f(1) = g(1) = 0$ และ

$g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [0, 1]$

พิจารณา

$$\lim_{x \to 1^-} \inf \frac{f(x) - g(x)}{x} = \lim_{x \to 1^-} \inf \frac{(1-x^2)-(1-x)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \inf \frac{-x^2 + x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \inf (1 - x)$$

$$= \sup_{h>0} \inf_{1-h<x<1} (1 - x) = 0$$

ดังนั้นกราฟ f และ g สัมผัสกันที่ $x = 1$ □

3.2.2 ให้ $f(x) = 1 - x^3$; $g(x) = 1 - x^2 \quad \forall x \in [0, 1]$

จะเห็นว่า $f(1) = g(1) = 0$ และ

$g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [0, 1]$

พิจารณา $$\lim_{x \to 1^-} \inf \frac{f(x) - g(x)}{x} = \lim_{x \to 1^-} \inf \frac{(1-x^3)-(1-x^2)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \inf (x - x^2)$$

$$= \sup_{h>0} \inf_{1-h<x<1} (x - x^2)$$

$$= 0$$

ดังนั้นกราฟ f และ g สัมผัสกันที่ $x = 1$ □

ทฤษฎี 3.1 ให้ $f : [0,1] \longrightarrow [0, \infty)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0,1]$ สำหรับ $n = 0, 1, 2, \ldots$ จะมีจุด $n + 1$ จุด คือ $0 \leq x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq 1$ และมีฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_n ที่มีกำลังอย่างมาก n และเป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบบน $[0, 1]$ ซึ่ง $p_n(x_k) = f(x_k)$ สำหรับ $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

พิสูจน์ ถ้า $\{x \in [0, 1] : f(x) = 0\}$ เป็นเซตอนันต์ แล้ว ให้ $p_n(x) \equiv 0 \quad \forall n$

ถ้า $\{x \in [0, 1] : f(x) = 0\}$ เป็นเซตจำกัด แล้ว จะสร้าง p_n โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งจะต้องให้มีเงื่อนไขดังนี้

(1) $p_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

(2) $p_n(x) > 0 \quad \forall x \in (0, 1)$

(3) p_n มีกำลังอย่างมาก n

(4) (f, p_n) มีค่ากู๊ดอินเตอร์เซตชัน $\geq n + 1$ จุด ในช่วง $[0, 1]$

สำหรับ $n = 0$

ให้ $p_0(x) = \frac{1}{2}\left\{\max_{y \in [0,1]} f(y) + \min_{y \in [0,1]} f(y)\right\}$

สำหรับ $n = 1$

ให้ $p_1(x) = \begin{cases} (1-x)f(0) + xf(1) & \text{ถ้า } f(0) \neq 0 \text{ หรือ } f(1) \neq 0 \\ \frac{1}{2} \max\limits_{y \in [0,1]} f(y) & \text{ถ้า } f(0) = 0 \text{ และ } f(1) = 0 \end{cases}$

จะเห็นว่า $p_o(x)$ และ $p_1(x)$ สอดคล้องกับเงื่อนไข (1) - (4)

สมมุติว่าสร้างฟังก์ชันโพลิโนเมียล $p_o(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข (1) - (4) ได้แล้ว

ถ้า (f, p_n) มีค่ากูดอินเตอร์เซคชัน $\geq n + 2$ จุด

ดังนั้นให้ $p_{n+1} = p_n$

แต่ถ้า (f, p_n) มีค่ากูดอินเตอร์เซคชัน $= n + 1$ จุด

ซึ่งสมมุติให้เป็น $0 \leq x_o < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq 1$

ดังนั้น $f(x) - p_n(x) \geq 0$ และ $f(x) - p_n(x) \leq 0$ สลับกัน

ในช่วงเปิดต่อเนื่องกันของ (x_j, x_{j+1}) ; $j = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$

และช่วงเปิด $(0, x_o)$ และ $(x_n, 1)$

ให้ $r_{n+1}(x) = (x - x_o)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$

เลือกฟังก์ชันโพลิโนเมียล $s_{n+1} = \pm r_{n+1}$ เพื่อที่จะทำให้

$$\left[f(x) - p_n(x) \right] s_{n+1}(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

ให้ $\varepsilon \geq 0$

กำหนดให้ $q_{n+1}(x, \varepsilon) = p_n(x) + \varepsilon \, s_{n+1}(x)$

ให้ $E = \{\varepsilon \geq 0 : \left[f(x) - q_{n+1}(x,\varepsilon) \right] s_{n+1}(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [0,1] \}$

จะเห็นว่า $E \neq \emptyset$ เพราะว่า มี $0 \in E$

ให้ $\alpha = \sup E$

ให้ $q_{n+1}(x) = p_n(x) + \alpha S_{n+1}(x)$

จะเห็นได้ว่า q_{n+1} มีกำลัง $\leq n + 1$

จะแสดงว่า $q_{n+1}(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

ให้ $x \in [0, 1]$

ถ้า $S_{n+1}(x) \geq 0$ แล้ว

$$q_{n+1}(x) = p_n(x) + \alpha S_{n+1}(x) \geq p_n(x) \geq 0$$

ถ้า $S_{n+1}(x) < 0$ แล้ว

จะมีลำดับ $\{\varepsilon_m\}$ ใน E ที่ $\varepsilon_m \dashrightarrow \alpha$

พิจารณา

$$\begin{aligned} -\left[p_n(x) + \varepsilon_m S_{n+1}(x)\right] &= \left[f(x) - (p_n(x) + \varepsilon_m S_{n+1}(x))\right] - f(x) \\ &\leq f(x) - (p_n(x) + \varepsilon_m S_{n+1}(x)) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $p_n(x) + \varepsilon_m S_{n+1}(x) \geq 0$

ในขณะที่ $\varepsilon_m \dashrightarrow \alpha \qquad p_n(x) + \alpha S_{n+1}(x) \geq 0$

นั่นคือ $q_{n+1}(x) \geq 0$

จะแสดงว่า ถ้า x_j เป็นค่ากูดอินเตอร์เซคชันของ (f, p_n) แล้ว

x_j เป็นค่ากูดอินเตอร์เซคชันของ (f, q_{n+1}) สำหรับบาง $0 \leq j \leq n + 1$

- ถ้า x_j เป็นค่าเอนด์อินเตอร์เซคชันของ (f, p_n)

นั่นคือ $x_j = 0$ หรือ $x_j = 1$

และ $S_{n+1}(x_j) = 0$

ดังนั้น $q_{n+1}(x_j) = p_n(x_j) = f(x_j)$

จะได้ว่า $f(x_j) - q_{n+1}(x_j) = 0$

ดังนั้น x_j เป็นค่าเอนด์อินเตอร์เซคชันของ (f, q_{n+1})

- ถ้า x_j เป็นค่าครอสโอเวอร์ของ (f, p_n)

จาก $q_{n+1}(x) = p_n(x) + \alpha S_{n+1}(x)$

ถ้า $\alpha = 0$ แล้ว $q_{n+1}(x) = p_n(x)$ จริง

แต่ถ้า $\alpha > 0$

จะมีลำดับ $\{\varepsilon_m\}$ ใน E ที่ $\varepsilon_m \dashrightarrow \alpha$ ซึ่ง

$$f(x) - (p_n(x) + \varepsilon_m S_{n+1}(x)) \leq 0 \quad , x_{j-1} < x < x_j$$

และ $f(x) - (p_n(x) + \varepsilon_m S_{n+1}(x)) \geq 0 \quad , x_j < x < x_{j+1}$

$$\begin{cases} \text{หรือ} \quad f(x) - (p_n(x) + \varepsilon_m S_{n+1}(x)) \geq 0 \quad , x_{j-1} < x < x_j \\ \text{และ} \quad f(x) - (p_n(x) + \varepsilon_m S_{n+1}(x)) \leq 0 \quad , x_j < x < x_{j+1} \end{cases}$$

(ถ้า $j = 0$ ให้ $x_{-1} = 0$, ถ้า $j = n$ ให้ $x_{n+1} = 1$)

ในขณะที่ $\varepsilon_m \dashrightarrow \alpha$ จะได้

$$f(x) - (p_n(x) + \alpha S_{n+1}(x)) \leq 0 \quad , x_{j-1} < x < x_j$$

และ $f(x) - (p_n(x) + \alpha S_{n+1}(x)) \geq 0 \quad , x_j < x < x_{j+1}$

นั่นคือ $f(x) - q_{n+1}(x) \leq 0 \quad , x_{j-1} < x < x_j$

$$f(x) - q_{n+1}(x) \geq 0 \quad , x_j < x < x_{j+1}$$

เลือก $y_{j-1} \in (x_{j-1}, x_j)$ ซึ่ง $f(x) - q_{n+1}(x) < 0 \quad \forall x \in (y_{j-1}, x_j)$

เลือก $y_{j+1} \in (x_j, x_{j+1})$ ซึ่ง $f(x) - q_{n+1}(x) > 0 \quad \forall x \in (x_j, y_{j+1})$

ดังนั้น x_j เป็นค่าครอสโอเวอร์ของ (f, q_{n+1})

จะสร้างฟังก์ชัน p_{n+1} ซึ่งจะแยกเป็นกรณีดังต่อไปนี้

<u>กรณี</u> A : สำหรับบาง $t \in (0, 1), q_{n+1}(t) = 0$

<u>กรณี</u> B : $q_{n+1}(x) \neq 0 \quad \forall x \in (0, 1)$ และ (f, q_{n+1}) มีค่ากูดอินเตอร์เซคชันที่ไม่เป็นค่ากูดอินเตอร์เซคชันของ (f, p_n)

<u>กรณี</u> C : $q_{n+1}(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ และทุกๆ ค่ากูดอินเตอร์เซคชันของ (f, q_{n+1}) คือ $x_0, x_1, \ldots, x_n$

<u>กรณี</u> D : $q_{n+1}(x) \neq 0 \quad \forall x \in (0, 1)$ แต่ $q_{n+1}(0) = 0$,
$q'_{n+1}(0) \neq 0$ และ
$q_{n+1}(x) > f(x) \quad \forall x \in (0, h) \quad \exists h > 0$

<u>กรณี</u> D' : $q_{n+1}(x) \neq 0 \quad \forall x \in (0, 1)$ แต่ $q_{n+1}(1) = 0$,
$q'_{n+1}(1) \neq 0$ และ
$q_{n+1}(x) > f(x) \quad \forall x \in (1 - h, 1) \ \exists h > 0$

<u>กรณี</u> E : เหมือนกรณี D แต่ $q'_{n+1}(0) = 0$

<u>กรณี</u> E' : เหมือนกรณี D' แต่ $q'_{n+1}(1) = 0$

<u>กรณี</u> F : เหมือนกรณี D แต่ $q_{n+1}(x) < f(x) \quad \forall x \in (0, h)$

<u>กรณี</u> F' : เหมือนกรณี D' แต่ $q_{n+1}(x) < f(x) \quad \forall x \in (1-h, 1)$

กรณี A, B หรือ C จะเป็นวิธีการสร้าง p_{n+1}
แต่กรณี D, D', E, E' และ F, F' จะต้องใช้กรณี C เพื่อสร้าง
p_{n+1} หรืออาจจะต้องใช้กรณีใดกรณีหนึ่งของ D, D', E, E' และ F, F'
แล้วต่อไปก็ใช้ กรณี C เพื่อสร้าง p_{n+1}

<u>กรณี</u> A : $q_{n+1}(t) = 0$ สำหรับบาง $t \in (0, 1)$

จาก $q_{n+1}(x) = p_n(x) + \alpha S_{n+1}(x)$

$$p_n(t) + \alpha S_{n+1}(t) = q_{n+1}(t) = 0$$

$$\alpha S_{n+1}(t) = - p_n(t) < 0$$

เนื่องจาก $p_n(t) > 0$

ดังนั้น $\alpha > 0$ และ $S_{n+1}(t) < 0$

จะแสดงว่า $f(t) = 0$:

มีลำดับ $\{\varepsilon_m\}$ ใน E ซึ่ง $\varepsilon_m \dashrightarrow \alpha$ ที่ทำให้

$$f(t) - [\, p_n(t) + \varepsilon_m S_{n+1}(t) \,] \leq 0$$

ในขณะที่ $\varepsilon_m \dashrightarrow \alpha$ จะได้

$$f(t) - [\, p_n(t) + \alpha S_{n+1}(t) \,] \leq 0$$

$$f(t) - q_{n+1}(t) \leq 0$$

$$f(t) \leq q_{n+1}(t) = 0$$

แต่ $f(t) \geq 0$

ดังนั้น $f(t) = 0$

จะเห็นว่า $t \notin \{x_o, x_1, \ldots, x_n\}$

เพราะว่า ถ้า $t \in \{x_o, x_1, \ldots, x_n\}$ ดังนั้น $S_{n+1}(t) = 0$

ซึ่งขัดแย้ง

นั่นคือ $t \in (0, 1) - \{x_o, x_1, \ldots, x_n\}$ หรือ

$x_k < t < x_{k+1}$ เมื่อ x_k, x_{k+1} เป็นจุดอินเตอร์เซคชัน

ของ (f, q_{n+1}) หรือ $x_k = 0$ หรือ $x_{k+1} = 1$

เนื่องจาก $p_n(x) - f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = t$

และ $p_n(t) - f(t) > 0$ ดังนั้นจะมี $l > 0$ ซึ่งทำให้

$$p_n(x) - f(x) > 0 \qquad \forall x \in (t - l, t + l)$$

นั่นคือ $f(x) - p_n(x) < 0 \qquad \forall x \in (t - l, t + l)$

ดังนั้น $S_{n+1}(x) < 0 \qquad \forall x \in (t - l, t + l)$

จะแสดงว่า $q_{n+1}(x) \geq f(x) \qquad \forall x \in (t - l, t + l)$

มีลำดับ $\{\varepsilon_m\}$ ใน E ที่ $\varepsilon_m \longrightarrow \alpha$

$$f(x) - \left[p_n(x) + \varepsilon_m S_{n+1}(x) \right] \leq 0 \qquad \forall x \in (t - l, t + l)$$

ในขณะที่ $\varepsilon_m \longrightarrow \alpha$ จะได้

$$f(x) - q_{n+1}(x) \leq 0 \qquad \forall x \in (t - l, t + l)$$

เนื่องจาก $f(t) = q_{n+1}(t) = 0$

$$q_{n+1}(x) \geq f(x) \qquad \text{เมื่อ} \quad 0 < |x - t| < l$$

ให้ $A = \{x \in (t - l, t) \cup (t, t + l) : q_{n+1}(x) = f(x)\}$

ถ้า A เป็นเซตอนันต์ แล้วให้ $p_{n+1} = q_{n+1}$

แต่ถ้า A เป็นเซตจำกัด

เลือก $l_o > 0$ ซึ่งทำให้ $q_{n+1}(x) > f(x)$ เมื่อ $0 < |x - t| < l_o$

ให้ $t' \in (t - l_o, t)$ และ $t'' \in (t, t + l_o)$

ให้ $r_1 = \dfrac{q_{n+1}(t') - f(t')}{2}$ และ $r_2 = \dfrac{q_{n+1}(t'') - f(t'')}{2}$

ให้ $\varepsilon > 0$ ที่ $\varepsilon < \min(r_1, r_2)$

ดังนั้น $q_{n+1}(t') > f(t') + 2\varepsilon$

$q_{n+1}(t'') > f(t'') + 2\varepsilon$

ให้ $p^*_{n+1}(x) = q_{n+1}(\frac{x}{1+\delta})$

โดยเลือก $\delta > 0$ ดังนี้

สำหรับแต่ละ x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ ที่เป็นคาครอสโอเวอร์ของ (f, q_{n+1})

โดยทฤษฎีบทประกอบ 3.2 จะมี $\delta_i > 0$ สำหรับทุกๆ

ฟังก์ชันโพลิโนเมียล q ซึ่ง $|q_{n+1}(x) - q(x)| < \delta_i \quad \forall x \in [0, 1]$

แล้ว (f, q) มีคาครอสโอเวอร์ใกล้จุด x_i

ให้ $\beta = \min(\varepsilon, \delta_o, \delta_1, \ldots, \delta_n)$

เนื่องจาก q_{n+1} เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเสมอกันเสมอปลายบน $[0, 1]$

ดังนั้นจะมี $\delta^* > 0$ ซึ่ง $\left|q_{n+1}(x) - q_{n+1}(\frac{x}{1+\delta^*})\right| < \beta$

$\forall x \in [0, 1]$

สมมุติว่า มี $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ที่ $y_i \in (t, t'')$

และ $f(y_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$

เลือก $\lambda > 0$ ที่ $\lambda < \min(|t-y_1|, |t-y_2|, \ldots, |t-y_m|, |t-t''|)$

ดังนั้น $f(x) > 0 \quad \forall x \in (t, t+\lambda)$

เลือก $\delta < \min(\delta^*, \frac{\lambda}{t})$

ดังนั้น $f(t+\delta t) > 0$

จะได้ว่า $\left| q_{n+1}(x) - q_{n+1}\left(\frac{x}{1+\delta}\right) \right| < \beta < \varepsilon \quad \forall x \in [0, 1]$

$$q_{n+1}(x) - p^*_{n+1}(x) < \varepsilon \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$f(t') + 2\varepsilon < q_{n+1}(t') < p^*_{n+1}(t') + \varepsilon$$

$$f(t') + \varepsilon < p^*_{n+1}(t')$$

$$f(t') - p^*_{n+1}(t') < -\varepsilon < 0$$

พิจารณา $p^*_{n+1}(t+\delta t) = q_{n+1}\left(\frac{(1+\delta)t}{(1+\delta)}\right) = q_{n+1}(t) = 0 < f(t+\delta t)$

ดังนั้น $f(t+\delta t) - p^*_{n+1}(t+\delta t) > 0$

ดังนั้น (f, p^*_{n+1}) มีค่าครอสโอเวอร์ อย่างน้อย 1 จุดใน $[t', t+\delta t]$

ในทำนองเดียวกัน (f, p^*_{n+1}) มีค่าครอสโอเวอร์ อย่างน้อย 1 จุดใน $[t+\delta t, t'']$

ดังนั้นจะได้ว่า (f, p^*_{n+1}) มีค่าครอสโอเวอร์ ≥ 2 จุดใน $[t', t'']$

ถ้า $x_0 = 0$ เป็นค่าเอนด์อินเตอร์เซคชัน ของ (f, q_{n+1})

นั่นคือ $f(0) = q_{n+1}(0)$

แต่ $p^*_{n+1}(0) = q_{n+1}(0)$

ดังนั้น $x_o = 0$ เป็นค่าเอนด์อินเตอร์เซคชัน ของ (f, p^{*}_{n+1})

ถ้า $x_n = 1$ เป็นค่าเอนด์อินเตอร์เซคชัน ของ (f, q_{n+1}) แล้ว

$x_n = 1$ ไม่จำเป็นต้องเป็นค่าเอนด์อินเตอร์เซคชัน ของ (f, p^{*}_{n+1})

พิจารณา

x_o	x_n	จำนวนกฎคอินเตอร์เซคชันของ (f, p^{*}_{n+1})
ครอสโอเวอร์	ครอสโอเวอร์	$\geq (n + 1) + 2 = n + 3$
เอนด์อินเตอร์เซคชัน	ครอสโอเวอร์	$\geq (n + 1) + 2 = n + 3$
ครอสโอเวอร์	เอนด์อินเตอร์เซคชัน	$\geq n + 2$
เอนด์อินเตอร์เซคชัน	เอนด์อินเตอร์เซคชัน	$\geq (n - 1) + 1 + 2 = n + 2$

ดังนั้น (f, p^{*}_{n+1}) มีค่ากฎคอินเตอร์เซคชัน $\geq n + 2$ จุด

ให้ $p_{n+1}(x) = p^{*}_{n+1}(x) + \lambda x$

โดยทฤษฎีประกอบ 3.2 เลือก $\lambda > 0$ ที่เล็กเพียงพอที่ทำให้ (f, p_{n+1}) มีค่าครอสโอเวอร์ อย่างน้อยเท่ากับจำนวนค่าครอสโอเวอร์ ของ (f, p^{*}_{n+1})

เนื่องจาก $p^{*}_{n+1}(x) = q_{n+1}(\frac{x}{1 + \delta}) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

และ $\lambda x > 0 \quad \forall x \in (0, 1)$

ดังนั้น $p_{n+1}(x) > 0 \quad \forall x \in (0, 1)$

$p_{n+1}(0) = p^{*}_{n+1}(0) = q_{n+1}(0) \geq 0$

$p_{n+1}(1) = p^{*}_{n+1}(1) + \lambda = q_{n+1}(\frac{1}{1 + \delta}) + \lambda > 0$

จะเห็นว่ากำลังของ $p_{n+1} \leq n + 1$

ดังนั้น p_{n+1} สอดคล้องกับเงื่อนไข (1) - (4)

<u>กรณี</u> B : $q_{n+1}(x) \neq 0 \quad \forall x \in (0, 1)$

และ (f, q_{n+1}) มีค่ากูดอินเตอร์เซคชัน ที่ไม่เป็นค่า

กูดอินเตอร์เซคชัน ของ (f, p_n)

เนื่องจาก (f, p_n) มีค่ากูดอินเตอร์เซคชัน = $n + 1$ จุด

และทุกค่ากูดอินเตอร์เซคชัน ของ (f, p_n) เป็นค่า

กูดอินเตอร์เซคชัน ของ (f, q_{n+1})

แต่ (f, q_{n+1}) มีค่ากูดอินเตอร์เซคชันที่ไม่เป็นค่ากูด

อินเตอร์เซคชัน ของ (f, p_n)

นั่นคือ (f, q_{n+1}) มีค่ากูดอินเตอร์เซคชัน $\geq n+2$ จุด

ให้ $p_{n+1} = q_{n+1}$

ดังนั้น p_{n+1} สอดคล้องกับเงื่อนไข (1) - (4)

<u>กรณี</u> C : $q_{n+1}(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

และ ทุกๆ ค่ากูดอินเตอร์เซคชันของ (f, q_{n+1}) คือ

จุด $x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n$

ให้ $p^*_{n+1}(x) = q_{n+1}(x) + \delta S_{n+1}(x)$

โดยเลือก $\delta > 0$ เพื่อทำให้ (f, p^*_{n+1}) มีค่าครอสโอเวอร์

ใกล้แต่ละค่าครอสโอเวอร์ ของ (f, q_{n+1})

(โดยทฤษฎีบทประกอบ 3.2)

และกำกัด (restrict) δ ให้เล็กเพียงพอเพื่อที่จะทำให้

$q_{n+1}(x) + \delta S_{n+1}(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

เนื่องจาก

$$q_{n+1}(x) + \delta\, S_{n+1}(x) = p_n(x) + (\alpha + \delta) S_{n+1}(x)$$

โดยที่ $\alpha + \delta > \alpha$

และเนื่องจาก

$$\alpha = \sup\{\varepsilon \geq 0 : [f(x) - q_{n+1}(x, \varepsilon)]\, S_{n+1}(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]\}$$

จะได้ว่า (f, p^{*}_{n+1}) มีค่าอินเตอร์เซกชัน x' ซึ่ง $x' \notin \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

ถ้า x' เป็นค่าคู่อินเตอร์เซกชัน แล้ว ให้ $p_{n+1} = p^{*}_{n+1}$ แต่ถ้า x' เป็นค่าคี่ แล้ว จะเปลี่ยน δ เล็กน้อย ซึ่งทำให้เกิดค่าครอสโอเวอร์ 2 จุดใกล้ x'

<u>หมายเหตุ</u> กรณี D - F' จะครอบคลุมถึงการสัมผัสของกราฟ f และ q_{n+1} ที่ $x = 0$ หรือ $x = 1$ เราจะกระทำโดยการเปลี่ยนแปลงแก้ไขความชันของ q_{n+1} ซึ่งอาจจะทำให้สูญเสียค่าเอนด์อินเตอร์เซกชันได้ แต่จะได้ค่าครอสโอเวอร์จุดใหม่เกิดขึ้น และฟังก์ชันที่ได้ต่อไปก็จะเข้าสู่กรณี A หรือกรณี B หรือกรณี C

<u>กรณี</u> D : $q_{n+1}(x) \neq 0 \quad \forall x \in (0, 1)$

แต่ $q_{n+1}(0) = 0 \;,\quad q'_{n+1}(0) \neq 0$

และ $q_{n+1}(x) > f(x) \quad \forall x \in (0, h)$

สำหรับบาง $h > 0$

ให้ $q^{*}_{n+1}(x) = q_{n+1}(\frac{x}{1+\delta})$

โดยเลือก $\delta > 0$ ให้เล็กเพียงพอ เพื่อที่จะทำให้ (f, q^{*}_{n+1}) มีค่าครอสโอเวอร์ ใกล้แต่ละค่าครอสโอเวอร์ของ (f, q_{n+1})

ถ้า $x = 1$ เป็นค่าอินเตอร์เซคชันของ (f, q_{n+1}) แล้ว

$x = 1$ ไม่จำเป็นต้องเป็นค่าอินเตอร์เซคชันของ (f, q^{*}_{n+1})

แต่ (f, q^{*}_{n+1}) มีค่าครอสโอเวอร์ x' ซึ่ง $0 = x_o < x' < x_1$

ต่อไปเข้าสู่กรณี F

<u>กรณี</u> D': เหมือนกรณี D โดยการแทนที่ $x = 0$ ด้วย $x = 1$

ต่อไปเข้าสู่กรณี F'

<u>กรณี</u> E': $q_{n+1}(x) \neq 0 \quad \forall x \in (0, 1)$ แต่ $q_{n+1}(1) = 0$

$q'_{n+1}(1) = 0$ และ $q_{n+1}(x) > f(x) \quad \forall x \in (1-h, 1) \; \exists h > 0$

ให้ $q^{*}_{n+1}(x) = q_{n+1}(x) + \delta(1 - x)^2$

โดยเลือก $\delta > 0$ เพื่อที่ทำให้ (f, q^{*}_{n+1}) มีค่าครอสโอเวอร์ ใกล้แต่ละค่าครอสโอเวอร์ ของ (f, q_{n+1}) (โดยทฤษฎีบทประกอบ 3.2)

ต่อไปให้ $p^{*}_{n+1}(x) = q^{*}_{n+1}(x + \varepsilon x)$

โดยเลือก $\varepsilon > 0$ เพื่อทำให้ (f, p^{*}_{n+1}) มีค่าครอสโอเวอร์ ใกล้แต่ละค่าครอสโอเวอร์ ของ (f, q^{*}_{n+1})

และกำกัด ε เพื่อทำให้ $f(\frac{1}{1+\varepsilon}) > 0$

จะได้ว่า (f, p^*_{n+1}) มีค่าครอสโอเวอร์ 2 จุด ใน (x_{n-1}, x_n)

เมื่อ $x_n = 1$ แต่ $x = 0$, $x = 1$ ไม่เป็น

ค่าอินเตอร์เซคชันของ (f, p^*_{n+1})

แต่อย่างไรก็ตาม (f, p^*_{n+1}) ยังคงมีค่ากู๊ดอินเตอร์เซคชัน

อย่างน้อย $n + 1$ จุด

ต่อไปใช้ กรณี C เพื่อสร้าง p_{n+1}

<u>กรณี</u> E : เหมือนกรณี E' โดยการแทนที่ $x = 1$ ด้วย $x = 0$

ต่อไปใช้กรณี C เพื่อสร้าง p_{n+1}

<u>กรณี</u> F : $q_{n+1}(x) \neq 0 \quad \forall x \in (0, 1)$ แต่ $q_{n+1}(0) = 0$

$q'_{n+1}(0) \neq 0$ และ $q_{n+1}(x) < f(x) \quad \forall x \in (0, h)$

$\exists h > 0$

ให้ $q^*_{n+1}(x) = q_{n+1}(x) + \delta(1 - x)$

โดยเลือก $\delta > 0$ เพื่อทำให้ (f, q^*_{n+1}) มีค่าครอสโอเวอร์

ใกล้แต่ละค่าครอสโอเวอร์ ของ (f, q_{n+1})

ถ้า $x = 0$ เป็นค่าเอนด์อินเตอร์เซคชัน ของ (f, q_{n+1})

นั่นคือ $f(0) = q_{n+1}(0)$

จาก $q^*_{n+1}(0) = q_{n+1}(0) + \delta = f(0) + \delta$

จะได้ $q^*_{n+1}(0) \neq f(0)$

ดังนั้น $x = 0$ ไม่เป็นค่าเอนด์อินเตอร์เซคชัน ของ (f, q^*_{n+1})

แต่จะเกิดค่าครอสโอเวอร์ใกล้จุด $x = 0$

ดังนั้น (f, q^*_{n+1}) มีค่ากู๊ดอินเตอร์เซคชัน อย่างน้อย $n + 1$ จุด

ต่อไปนี้ใช้กรณี c **เพื่อสร้าง** P_{n+1}

<u>กรณี</u> F' : เหมือนกรณี F โดยการแทนที่ $x = 0$ ด้วย $x = 1$

ต่อไปนี้ใช้กรณี c **เพื่อสร้าง** P_{n+1}

□