บทที่ 4

การประมาณฟังก์ชันค่าจริงที่ไม่เป็นลบด้วยฟังก์ชันโพลิโนเมียลที่ไม่เป็นลบบน $[0, 1]$ ตอน II และความคลาดเคลื่อนของการประมาณฟังก์ชัน

จากการศึกษาบทความของ John Briggs และ Lee A. Rubel เรื่อง "Interpolation by Non - Negative Polynomials" นั้น กล่าวคือ ถ้ากำหนดฟังก์ชันค่าจริง f ที่ไม่เป็นลบ และต่อเนื่องบน $[0, 1]$ สำหรับ $n = 0,1,2,...$ แล้วจะมีจุด $n + 1$ จุด และมีฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_n ที่ไม่เป็นลบบน $[0, 1]$ ผ่านจุด $n + 1$ จุดนี้ จะเห็นว่าจุด $n+1$ จุด ไม่ได้กำหนดมาให้ก่อน ซึ่งไม่ค่อยมีประโยชน์นัก ในทางประยุกต์ ในบทนี้จึงปรับปรุงให้ดีขึ้น กล่าวคือจะหาฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_n ที่ไม่เป็นลบบน $[0, 1]$ ซึ่งมีกำลังอย่างมาก n ประมาณฟังก์ชันค่าจริง f ที่ไม่เป็นลบ และต่อเนื่องบน $[0, 1]$ โดยที่ฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_n ผ่านจุด n จุด บนฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้

จากนั้นจะหาความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการประมาณฟังก์ชัน ดังรายละเอียดต่อไปนี้

4.1 การประมาณฟังก์ชันค่าจริงที่ไม่เป็นลบด้วยฟังก์ชันโพลิโนเมียลที่ไม่เป็นลบบน $[0, 1]$ ตอน II

ทฤษฎีบทประกอบ 4.1.1 ให้ $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$ เป็นเซตของจุด ที่

$0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq 1$ และ $y_i \in R$

$(i = 1, 2, \dots, n)$ และให้ฟังก์ชันโพลิโนเมียล

p_{n-1} ซึ่ง $p_{n-1}(x_i) = y_i \quad (i=1,2,\dots,n)$

ถ้าฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_n ที่

$p_n(x_i) = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

แล้วจะมีจำนวนจริง c ที่

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + c(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

สำหรับทุกๆ $x \in [0, 1]$

พิสูจน์

เนื่องจาก $p_n(x_i) = y_i = p_{n-1}(x_i)$; $i = 1, 2, \dots, n$

นั่นคือ $p_n(x) = p_{n-1}(x)$ ที่ $x = x_1, x_2, \dots, x_n$

จะได้ว่า $p_n(x) - p_{n-1}(x) = 0$ ที่ $x = x_1, x_2, \dots, x_n$

ดังนั้นจะมี $c \in R$ ซึ่งทำให้

$$p_n(x) - p_{n-1}(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \quad \forall x \in [0,1]$$

ดังนั้น

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + c(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

$$\forall x \in [0, 1]$$

□

ทฤษฎี 4.1.1 สำหรับ $n = 1, 2$

ให้ $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$ เป็นเซตของจุดที่แตกต่างกัน ซึ่ง

$0 \leq x_i \leq 1$ และ $y_i > 0$; $i = 1, \ldots, n$

แล้ว จะมีฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_n ซึ่ง

(1) $p_n(x_i) = y_i$ สำหรับ $i = 1, \ldots, n$

(2) $p_n(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่า $x \in [0, 1]$

<u>พิสูจน์</u> สำหรับ $n = 1$

ให้ $p_1(x) = y_1$

จะเห็นได้ชัดว่า $p_1(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

สำหรับ $n = 2$

ให้ฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_1 ผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2)

ดังนั้น

$$p_1(x) = \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} y_2$$

$$= y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

ถ้า $p_1(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ แล้วให้ $p_2 = p_1$

แต่ถ้า $p_1(x) < 0 \quad \exists x \in [0, 1]$

ดังนั้นจะมีจุด $c \in (0, 1)$ เพียง 1 จุด ซึ่งทำให้

$p_1(c) = 0$

[เนื่องจาก $p_1(x)$ มีกำลัง 1 จะมีรากได้อย่างมาก 1 ราก]

เนื่องจาก p_1 เป็นเส้นตรงที่ตัดแกน x ที่จุด $c \in (0, 1)$

ดังนั้น $p_1(x) < 0 \quad \forall x \in [0, c)$ และ

$p_1(x) > 0 \quad \forall x \in (c, 1]$

หรือ $p_1(x) > 0 \quad \forall x \in [0, c)$ และ

$p_1(x) < 0 \quad \forall x \in (c, 1]$

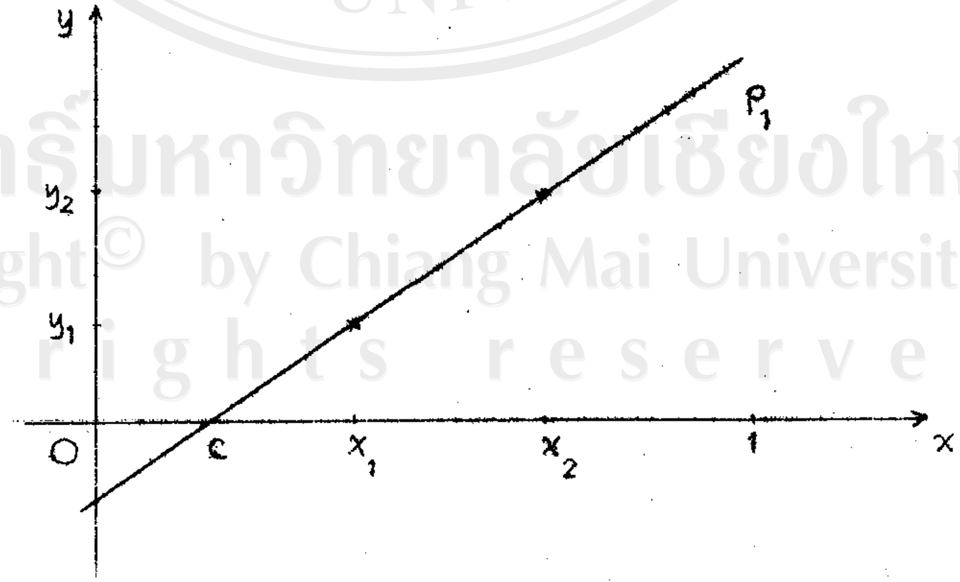
เนื่องจาก $p_1(x) > 0 \quad \forall x \in (x_1, x_2)$

ดังนั้น $c \in (0, x_1)$ หรือ $c \in (x_2, 1)$

<u>กรณีที่</u> 1 ถ้า $c \in (0, x_1)$

ดังนั้น $p_1(x) < 0 \quad \forall x \in [0, c)$

และ $p_1(x) > 0 \quad \forall x \in (c, 1]$



ให้ $S(x) = (x - x_1)(x - x_2)$

ดังนั้น $S(x) > 0 \quad , x \in [0, x_1)$

$S(x) < 0 \quad , x \in (x_1, x_2)$

$S(x) > 0 \quad , x \in (x_2, 1]$

ให้ $E = \{x \in [0, 1] : p_1(x) \leq 0\}$

ดังนั้น $E = [0, c] \subset [0, x_1)$

เนื่องจาก $\frac{-p_1}{S}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง บน E

ดังนั้นจะมีจุด $x_o \in E$ ซึ่งทำให้ $\frac{-p_1(x_o)}{S(x_o)} = \sup_{x \in E} \{\frac{-p_1(x)}{S(x)}\}$

เนื่องจาก $\frac{-p_1(x)}{S(x)} > 0 \quad \forall x \in [0, c)$

ดังนั้น $\sup_{x \in E} \{\frac{-p_1(x)}{S(x)}\} > 0$

ให้ $\varepsilon_o = \sup_{x \in E} \{\frac{-p_1(x)}{S(x)}\}$

และให้ $p_2(x) = p_1(x) + \varepsilon_o S(x)$

เนื่องจาก $S(x_i) = 0 \quad ; i = 1, 2$

ดังนั้น $p_2(x_i) = p_1(x_i) = y_i \quad ; \quad i = 1, 2$

จะแสดงว่า $p_2(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

$[0, 1] = [0, c] \cup (c, 1]$

1) ถ้า $x \in [0, c]$

ดังนั้น $p_1(x) \leq 0 \implies -p_1(x) \geq 0$

และ $S(x) > 0$

เนื่องจาก $\dfrac{-p_1(x)}{S(x)} \leq \sup\limits_{x \in E} \{\dfrac{-p_1(x)}{S(x)}\} = \varepsilon$

จะได้ว่า $p_1(x) + \varepsilon_o S(x) \geq 0$

นั่นคือ $p_2(x) \geq 0$

2) ถ้า $x \in (c, 1]$ ดังนั้น $p_1(x) > 0$

2.1) ถ้า $S(x) \geq 0$

ดังนั้น $p_1(x) + \varepsilon_o S(x) \geq p_1(x) > 0$

2.2) ถ้า $S(x) < 0$ ดังนั้น $x \in (x_1, x_2)$

ต่อไปจะแสดงว่า $p_2(x) \geq 0 \quad \forall x \in (x_1, x_2)$

สมมุติว่า $p_2(x_3) < 0 \quad \exists x_3 \in (x_1, x_2)$

เนื่องจาก $p_2(x_1) = y_1 > 0$ และ $p_2(x_2) = y_2 > 0$

ดังนั้น จะมี $v_1 \in (x_1, x_3)$ และ $v_2 \in (x_3, x_2)$

ซึ่งทำให้ $p_2(v_1) = 0$ และ $p_2(v_2) = 0$

จาก $\dfrac{-p(x_o)}{S(x_o)} = \varepsilon_o$

ดังนั้น $p_1(x_o) + \varepsilon_o S(x_o) = 0$

นั่นคือ $p_2(x_o) = 0$

จะเห็นว่า $p_2(x)$ มีรากอย่างน้อย 3 ราก ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะว่า $p_2(x)$ มีกำลัง 2 ซึ่งจะต้องมีรากไม่เกิน 2 ราก

ดังนั้น $p_2(x) \geq 0 \qquad \forall x \in (x_1, x_2)$

จาก (1) และ (2) สรุปได้ว่า $p_2(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

กรณีที่ 2 ถ้า $c \in (x_2, 1)$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง 4.1.1 กำหนด จุด (0.3, 0.1), (0.4, 0.5) และ (0.7, 0.2) ดังนั้น จะแสดงว่าไม่มีฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_3 ที่มีค่าไม่เป็นลบ บน [0, 1] ที่ผ่านจุด 3 จุด นี้

ให้ฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_2 ผ่านจุด (0.3, 0.1), (0.4, 0.5) และ (0.7, 0.2) ดังนั้น

$$p_2(x) = \frac{(x-0.4)(x-0.7)(0.1)}{(0.3-0.4)(0.3-0.7)} + \frac{(x-0.3)(x-0.7)(0.5)}{(0.4-0.3)(0.4-0.7)} + \frac{(x-0.3)(x-0.4)(0.2)}{(0.7-0.3)(0.7-0.4)}$$

$$= -12.5x^2 + 12.75x - 2.6$$

$$= -12.5(x-0.28)(x-0.74)$$

จะได้ว่า $p_2(x) < 0 \quad , x \in [0, 0.28)$

$p_2(x) > 0 \quad , x \in (0.28, 0.74)$

$p_2(x) < 0 \quad , x \in (0.74, 1]$

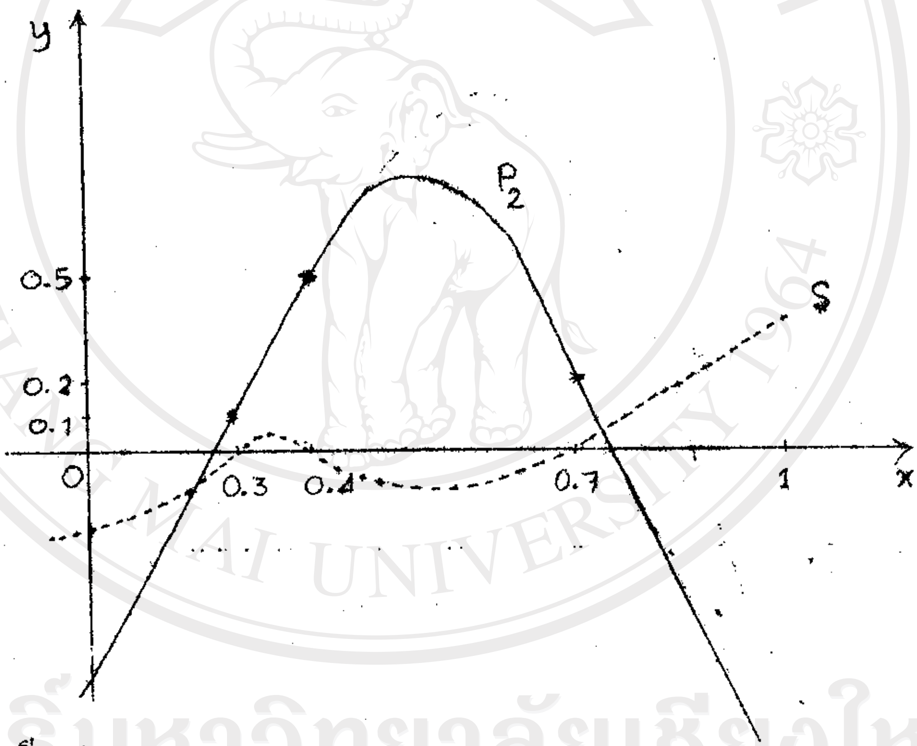
ให้ $S(x) = (x - 0.3)(x - 0.4)(x - 0.7)$

ดังนั้น $S(x) < 0 \quad , x \in (0, 0.3)$

$S(x) > 0 \quad , x \in (0.3, 0.4)$

$S(x) < 0 \quad , x \in (0.4, 0.7)$

$S(x) > 0 \quad , x \in (0.7, 1)$



จากทฤษฎีบทประกอบ 4.1.1

ให้ p_3 เป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียลหนึ่งที่ผ่านจุด (0.3, 0.1), (0.4, 0.5) และ (0.7, 0.2)

ดังนั้น $p_3(x) = p_2(x) + \varepsilon_o S(x) \quad \exists \varepsilon_o \in R$

ถ้า $\varepsilon_o = 0 \qquad p_3(x) = p_2(x)$

$$p_3(0) = p_2(0) < 0$$

ถ้า $\varepsilon_o > 0$

เนื่องจาก $S(0.28) < 0$ และ $p_2(0.28) = 0$

ดังนั้น $p_3(0.28) = p_2(0.28) + \varepsilon_o S(0.28) = \varepsilon_o S(0.28) < 0$

ถ้า $\varepsilon_o < 0$

เนื่องจาก $S(0.74) > 0$ และ $p_2(0.74) = 0$

ดังนั้น $p_3(0.74) = p_2(0.74) + \varepsilon_o S(0.74) = \varepsilon_o S(0.74) < 0$

จะได้ว่า $p_3(x) < 0 \quad \exists x \in [0, 1]$

นั่นคือไม่มี p_3 ที่มีค่าไม่เป็นลบบน $[0, 1]$ ที่ผ่านจุด 3 จุดนี้

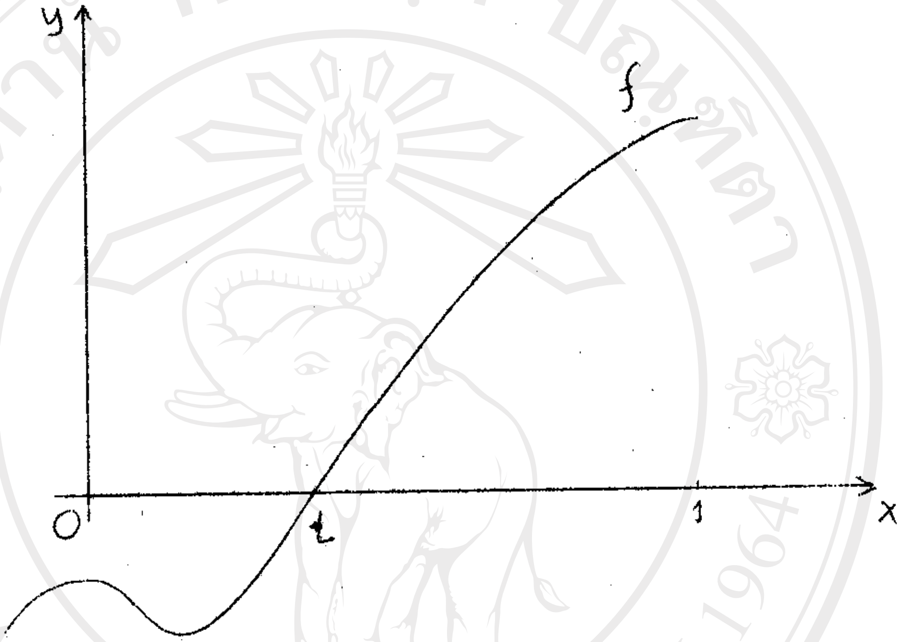
$\square$

<u>นิยาม</u> 4.1.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง บน $[0, 1]$ และ
ให้ $t \in (0, 1)$

จะเรียก t ว่า <u>จุดตัดแกน</u> ของกราฟ f ถ้า

(1) $f(t) = 0$ และ

(2) $f(x) < 0$ (หรือ > 0) $\forall x \in [t - \varepsilon, t)$
และ $f(x) > 0$ (หรือ < 0) $\forall x \in (t, t + \varepsilon]$
สำหรับบาง $\varepsilon > 0$



จุด t เป็นจุดตัดแกนของกราฟ f

<u>นิยาม</u> 4.1.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง บน $[0, 1]$

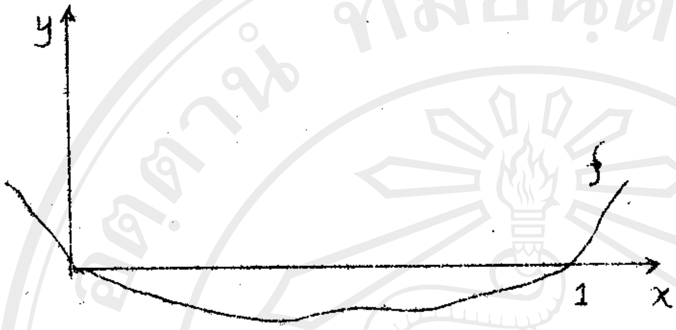
และให้ $(a, b) \subset [0, 1]$

จะเรียกช่วง (a, b) ว่า <u>ช่วงใต้ศูนย์</u>ของกราฟ f ถ้า

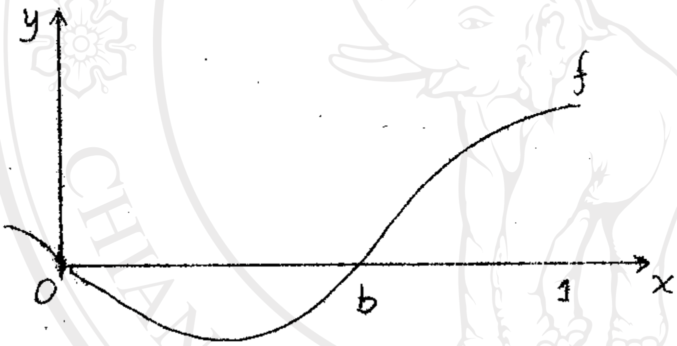
(1) $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$,

(2) $a = 0$ หรือ a เป็นจุดตัดแกนของกราฟ f

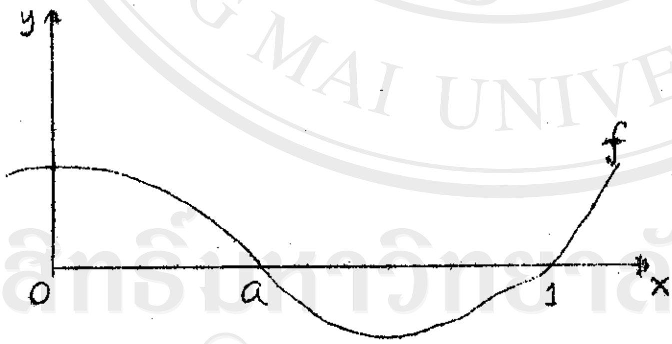
และ (3) $b = 1$ หรือ b เป็นจุดตัดแกนของกราฟ f



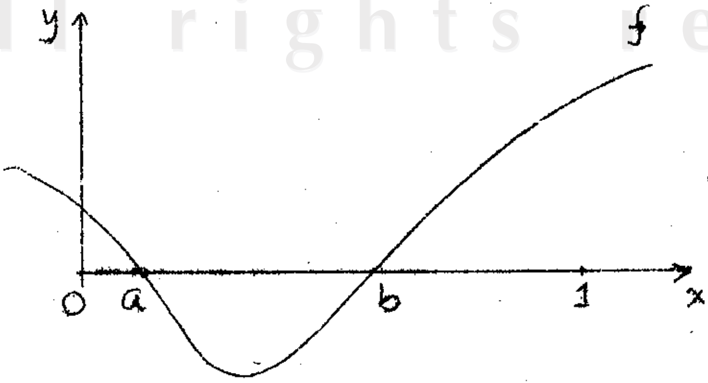
ช่วงใต้ศูนย์คือ (0, 1)



ช่วงใต้ศูนย์คือ (0, b)



ช่วงใต้ศูนย์คือ (a, 1)



ช่วงใต้ศูนย์คือ (a, b)

ทฤษฎี 4.1.2 ถ้ากำหนด $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$ โดยที่ $n \geq 2$

เป็นเซตของจุดที่ $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq 1$

และ $y_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ ให้ฟังก์ชัน

โพลิโนเมียล p_{n-1} ผ่านจุด n จุดนี้ และ p_{n-1}

มีช่วงใต้ศูนย์ กำหนดให้

$$S_1(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

และ $S_2 = -S_1$

ให้ $S^* = S_1$ หรือ S_2 ถ้า S^* มีคุณสมบัติต่อไปนี้

(i) $S^* > 0$ บนช่วงใต้ศูนย์ของกราฟ p_{n-1}

(ii) $S^*(x) > 0 \qquad \forall x \in [0, 1]$

ที่ $p_{n-1}(x) = 0$

จะได้ว่ามีฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_n ที่ไม่เป็นลบ บน $[0, 1]$

และ $p_n(x_i) = y_i (i = 1, 2, \dots, n)$

ก็ต่อเมื่อ

$$\sup \left\{\frac{-p_{n-1}(x)}{S^*(x)} : x \in [0,1] \text{ ที่ } p_{n-1}(x) \leq 0\right\}$$

$$\leq \inf \left\{\frac{p_{n-1}(x)}{-S^*(x)} : x \in [0, 1] \text{ ที่ } S^*(x) < 0\right\}$$

พิสูจน์ (===>) สมมุติว่ามีฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_n ที่ไม่เป็นลบ

บน $[0, 1]$ และ $p_n(x_i) = y_i \quad (i=1,2,\ldots,n)$

ดังนั้น $p_n(x) = p_{n-1}(x) + \varepsilon_o S^*(x) \ \exists \varepsilon_o > 0$

$$p_{n-1}(x) + \varepsilon_o S^*(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

จะแสดงว่า $\sup \{ \frac{-p_{n-1}(x)}{S^*(x)} : x \in [0,1]$ ที่ $p_{n-1}(x) \leq 0\}$

มีใน R

ให้ $E = \{x \in [0, 1] : p_{n-1}(x) \leq 0\}$

จะเห็นว่า $E \neq \emptyset$ เพราะว่า p_{n-1} มีช่วงใต้ศูนย์

เนื่องจาก $E = p_{n-1}^{-1}(-\infty, 0] \cap [0,1]$ เป็นเซตปิด

และ $E \subset [0, 1]$

ดังนั้น E เป็นคอมแพคเซต

เนื่องจาก $S^*(x) > 0 \quad \forall x \in E$

และ $-\frac{p_{n-1}}{S^*}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง บน E

ดังนั้น มี $x_o \in E$ ซึ่งทำให้

$$-\frac{p_{n-1}(x_o)}{S^*(x_o)} = \sup \{ \frac{-p_{n-1}(x)}{S^*(x)} : x \in E\}$$

จะแสดงว่า

$$\inf \{ \frac{p_{n-1}(x)}{-S^*(x)} : x \in [0,1] \text{ ที่ } S^*(x) < 0\}$$

มีใน R

เนื่องจาก $S^* < 0$ และ $S^* > 0$ สลับกันในช่วงเปิดต่อเนื่องกันของ (x_i, x_{i+1}) $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ และ รวมถึง $(0, x_1)$ ถ้า $x_1 \neq 0$ และ $(x_n, 1)$ ถ้า $x_n \neq 1$

ดังนั้น $\{x \in [0, 1] : S^*(x) < 0\} \neq \emptyset$

ให้ $F = \{x \in [0, 1] : S^*(x) < 0\}$

จะได้ว่า $p_{n-1}(x) > 0 \qquad \forall x \in F$

[เนื่องจากให้ $x \in F$ สมมุติว่า $p_{n-1}(x) \leq 0$

$\Longrightarrow x \in E$

$\Longrightarrow S^*(x) > 0$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะว่า ถ้า $x \in F$ แล้ว $S^*(x) < 0$

ดังนั้น $p_{n-1}(x) > 0$]

$$\text{ดังนั้น } \left\{ \frac{p_{n-1}(x)}{-S^*(x)} : x \in F \right\} \neq \emptyset$$

ให้ $a = \inf \{p_{n-1}(x) : x \in [0, 1]$ ที่ $S^*(x) \leq 0\}$

เนื่องจาก $\{p_{n-1}(x) : x \in F\} \subset \{p_{n-1}(x) : x \in [0,1]$ ที่ $S^*(x) \leq 0\}$

ดังนั้น $p_{n-1}(x) \geq a \qquad \forall x \in F \qquad \ldots(1)$

ให้ $b = \sup \{-S^*(x) : x \in [0,1]$ ที่ $S^*(x) \leq 0\}$

เนื่องจาก

$\{-S^*(x) : x \in F\} \subset \{-S^*(x) : x \in [0,1]$ ที่ $S^*(x) \leq 0\}$

ดังนั้น $0 < -S^*(x) \leq b \qquad \forall x \in F$

$$\frac{1}{-S^*(x)} \geq \frac{1}{b} \qquad \forall x \in F \quad ....(2)$$

โดย (1) และ (2) จะได้ว่า $\dfrac{p_{n-1}(x)}{-S^*(x)} \geq \dfrac{a}{b} \qquad \forall x \in F$

ดังนั้น $\left\{ \dfrac{p_{n-1}(x)}{-S^*(x)} : x \in F \right\}$ มีขอบเขตล่าง

จะได้ว่า $\inf \left\{ \dfrac{p_{n-1}(x)}{-S^*(x)} : x \in F \right\}$ มีใน R

จะแสดงว่า $\sup \left\{ \dfrac{-p_{n-1}(x)}{S^*(x)} : x \in E \right\} \leq \inf \left\{ \dfrac{p_{n-1}(x)}{-S^*(x)} : x \in F \right\}$

สมมุติว่า $\sup\limits_{x \in E} \left\{ \dfrac{-p_{n-1}(x)}{S^*(x)} \right\} > \inf\limits_{x \in F} \left\{ \dfrac{p_{n-1}(x)}{-S^*(x)} \right\}$

จาก $\dfrac{-p_{n-1}(x_o)}{S^*(x_o)} = \sup\limits_{x \in E} \left\{ \dfrac{-p_{n-1}(x)}{S^*(x)} \right\}$

และ $p_{n-1}(x_o) + \varepsilon_o S^*(x_o) \geq 0$

ดังนั้น $\varepsilon_o \geq \dfrac{-p_{n-1}(x_o)}{S^*(x_o)} = \sup\limits_{x \in E} \left\{ \dfrac{-p_{n-1}(x)}{S^*(x)} \right\}$

จะได้ว่า $\varepsilon_o > \inf\limits_{x \in F} \left\{ \dfrac{p_{n-1}(x)}{-S^*(x)} \right\}$

ดังนั้นจะมี $t \in F$ ซึ่ง $\inf_{x\in F} \{ \frac{p_{n-1}(x)}{- S^*(x)} \} \leq \frac{p_{n-1}(t)}{- S^*(t)} < \varepsilon_o$

$$\Longrightarrow p_{n-1}(t) + \varepsilon_o S^*(t) < 0$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะว่า $p_{n-1}(x) + \varepsilon_o S^*(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$

ดังนั้น $\sup_{x\in E} \{ \frac{-p_{n-1}(x)}{S^*(x)} \} \leq \inf_{x\in F} \{ \frac{p_{n-1}(x)}{- S^*(x)} \}$

($\Longleftarrow$) สมมุติให้ $\sup_{x\in E} \{ \frac{-p_{n-1}(x)}{S^*(x)} \} \leq \inf_{x\in F} \{ \frac{p_{n-1}(x)}{- S^*(x)} \}$

เนื่องจาก $\frac{- p_{n-1}(x)}{S^*(x)} \geq 0 \qquad \forall x \in E$

ดังนั้น $\sup_{x\in E} \{ \frac{-p_{n-1}(x)}{S^*(x)} \} \geq 0$

ให้ $\varepsilon \geq 0$ ซึ่ง $\sup_{x\in E} \{ \frac{-p_{n-1}(x)}{S^*(x)} \} \leq \varepsilon \leq \inf_{x\in F} \{ \frac{p_{n-1}(x)}{- S^*(x)} \}$

และให้ $p_n(x) = p_{n-1}(x) + \varepsilon S^*(x)$

จะเห็นได้ชัดว่า $p_n(x)$ มีกำลัง n และ

เนื่องจาก $S^*(x_i) = 0 \quad , \; i = 1, 2, \ldots, n$

ดังนั้น $p_n(x_i) = p_{n-1}(x_i) = y_i \, ,$

$i = 1, 2, \ldots, n$

จะแสดงว่า $p_n(x) \geq 0 \qquad \forall x \in [0, 1]$

1) ถ้า $x' \in [0, 1]$ ที่ $p_{n-1}(x') \leq 0$ (นั่นคือ $x' \in E$)

ดังนั้น $S^*(x') > 0$

เนื่องจาก $$\frac{-p_{n-1}(x')}{S^*(x')} \leq \sup_{x \in E} \left\{ \frac{-p_{n-1}(x)}{S^*(x)} \right\} \leq \varepsilon$$

ดังนั้น $p_{n-1}(x') + \varepsilon S^*(x') \geq 0$

นั่นคือ $p_n(x') \geq 0$

2) ถ้า $x' \in [0, 1]$ ที่ $p_{n-1}(x') > 0$

2.1) ถ้า $S^*(x') \geq 0$

ดังนั้น $p_n(x') = p_{n-1}(x') + \varepsilon S^*(x') \geq p_{n-1}(x') > 0$

2.2) ถ้า $S^*(x') < 0$ ดังนั้น $x' \in F$

เนื่องจาก $$\frac{p_{n-1}(x')}{-S^*(x')} \geq \inf_{x \in F} \left\{ \frac{p_{n-1}(x)}{-S^*(x)} \right\} \geq \varepsilon$$

ดังนั้น $p_{n-1}(x') + \varepsilon S^*(x') \geq 0$

นั่นคือ $p_n(x') \geq 0$

โดย (1) และ (2) ได้ว่า $p_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

□

<u>ข้อสังเกต</u>

1) การพิสูจน์ทฤษฎี 4.1.1 สำหรับ $n = 2$ นั้น สามารถพิสูจน์
โดยใช้ทฤษฎี 4.1.2 ได้ โดยจะทำการพิสูจน์ต่อจากขบวนการพิสูจน์
ในทฤษฎี 4.1.1 ในกรณีที่ $p_1(x) < 0 \quad \exists x \in [0, 1]$

<u>พิสูจน์</u> จากการพิสูจน์ในทฤษฎี 4.1.1 จะเห็นว่า

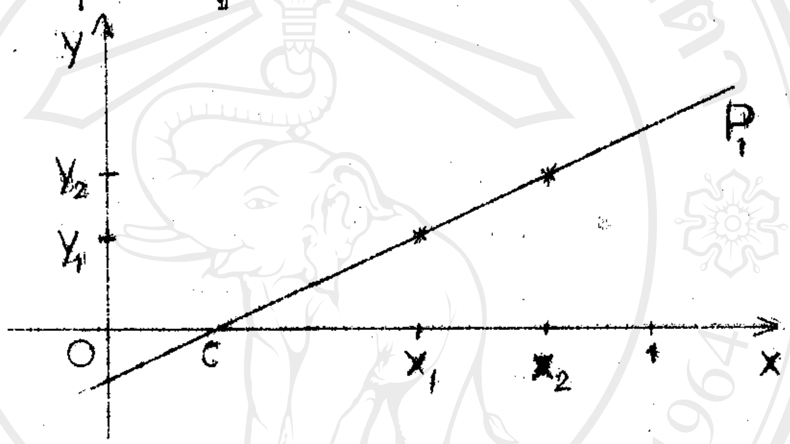
จุด c เป็นจุดตัดแกนของกราฟ p_1

ก) ถ้า $c \in (0, x_1)$ เมื่อ $x_1 \neq 0$

ดังนั้น $p_1(x) < 0 \quad \forall x \in [0, c)$

และ $p_1(x) > 0 \quad \forall x \in (c, 1]$

จะได้ว่า p_1 มีช่วงใต้ศูนย์เพียง 1 ช่วง คือ $(0, c) \subset (0, x_1)$

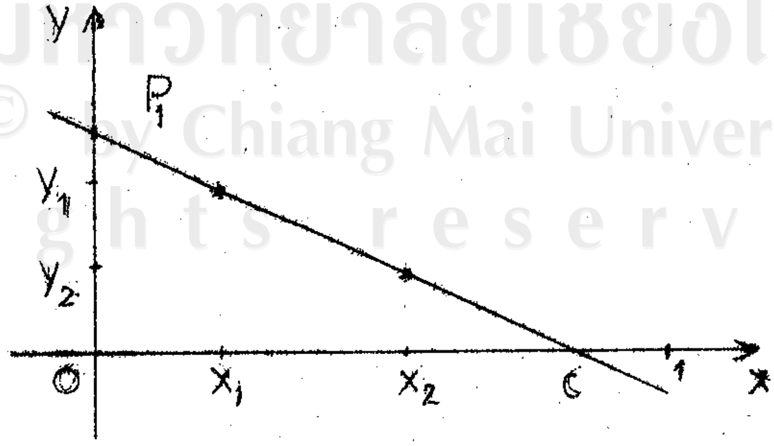


ข) ถ้า $c \in (x_2, 1)$ เมื่อ $x_2 \neq 1$

ดังนั้น $p_1(x) > 0 \quad \forall x \in [0, c)$

และ $p_1(x) < 0 \quad \forall x \in (c, 1]$

จะได้ว่า p_1 มีช่วงใต้ศูนย์เพียง 1 ช่วง คือ $(c, 1) \subset (x_2, 1)$



ต่อไปจะพิจารณาทั้งกรณี ก และ ข ร่วมกันดังนี้

ให้ $S_1(x) = (x - x_1)(x - x_2)$

$S_2 = - S_1$

จะเห็นว่า $S_1(x) > 0 \quad \forall x \in [0, x_1)$ ถ้า $x_1 \neq 0$

$S_1(x) < 0 \quad \forall x \in (x_1, x_2)$

$S_1(x) > 0 \quad \forall x \in (x_2, 1]$ ถ้า $x_2 \neq 1$

ให้ $S^* = S_1$

จะเห็นได้ชัดว่า $S^* > 0$ บนช่วงใกล้ศูนย์ของกราฟ p_1

และ $S^*(c) > 0$

ให้ $E = \{x \in [0, 1] : p_1(x) \leq 0\}$ (E เป็นเซทปิด)

และให้ $F = \{x \in [0, 1] : S^*(x) < 0\} = (x_1, x_2)$

พิสูจน์เช่นเดียวกับทฤษฎี 4.1.2 ว่า $\sup\limits_{x \in E} \left\{ \dfrac{-p_1(x)}{S^*(x)} \right\}$ และ

$\inf\limits_{x \in F} \{ \dfrac{p_1(x)}{- S^*(x)} \}$ มีใน R

เนื่องจาก $\dfrac{- p_1(x)}{S^*(x)} \geq 0 \quad \forall x \in E$

$$\sup_{x \in E} \{ \frac{-p_1(x)}{S^*(x)} \} \geq 0$$

เนื่องจาก $p_1(x) > 0 \qquad \forall x \in F$

ดังนั้น $\dfrac{p_1(x)}{-S^*(x)} > 0 \qquad \forall x \in F$

$$\inf_{x \in F} \left\{ \frac{p_1(x)}{-S^*(x)} \right\} \geq 0$$

ให้ $\alpha = \sup_{x \in E} \left\{ \dfrac{-p_1(x)}{S^*(x)} \right\}$ และ $\beta = \inf_{x \in F} \left\{ \dfrac{p_1(x)}{-S^*(x)} \right\}$

จะแสดงว่า $\alpha \leq \beta$:

สมมุติว่า $\alpha > \beta$

ดังนั้นมี $t \in F$ ซึ่งทำให้ $\alpha > \dfrac{p_1(t)}{-S^*(t)} > \beta$

ดังนั้น $p_1(t) + \alpha S^*(t) < 0$

เนื่องจาก $p_1(x_1) + \alpha S^*(x_1) = p_1(x_1) = y_1 > 0$

$p_1(x_2) + \alpha S^*(x_2) = p_1(x_2) = y_2 > 0$

และ $x_1 < t < x_2$

ดังนั้นมี $u_1 \in (x_1, t)$ และ $u_2 \in (t, x_2)$

ซึ่งทำให้ $p_1(u_i) + \alpha S^*(u_i) = 0 \quad , \ i = 1, 2$

จะเห็นว่า $p_1(x) + \alpha S^*(x)$ มีราก ≥ 2 รากใน (x_1, x_2)

เนื่องจาก E เป็นเซตปิด

ดังนั้นมี $u_3 \in E$

ซึ่งทำให้ $\dfrac{-p_1(u_3)}{S^*(u_3)} = \sup\limits_{x\in E} \{ \dfrac{-p_1(x)}{S^*(x)} \} = \alpha$

$$p_1(u_3) + \alpha S^*(u_3) = 0$$

ดังนั้น $p_1(x) + \alpha S^*(x)$ มีรากอย่างน้อย 3 ราก ใน $[0, 1]$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะว่า $p_1(x) + \alpha S^*(x)$ เป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียล

มีกำลัง 2 ซึ่งจะต้องมีรากไม่เกิน 2 ราก

ดังนั้น $\alpha \leq \beta$

โดยทฤษฎี 4.1.2 จะได้ว่า มี p_2 ที่ $p_2 \geq 0$ บน $[0, 1]$

และ $p_2(x_i) = y_i \quad ; \; i = 1, 2$

□

2) จากตัวอย่างที่ 4.1.1 จะเห็นว่ากราฟ p_2 มีช่วงใต้ศูนย์บน $[0, 1]$

คือ $(0, 0.28)$ และ $(0.74, 1)$

ให้ $S_1(x) = (x - 0.3)(x - 0.4)(x - 0.7)$

$$S_2 = -S_1$$

เนื่องจาก $S_1(x) < 0 \quad , x \in (0, 0.3)$

$S_1(x) > 0 \quad , x \in (0.7, 1)$

และ $S_2(x) > 0 \quad , x \in (0, 0.3)$

$S_2(x) < 0 \quad , x \in (0.7, 1)$

จะเห็นว่า $S_1 < 0$ บนช่วงใต้ศูนย์ $(0, 0.28)$

และ $S_2 < 0$ บนช่วงใต้ศูนย์ $(0.74, 1)$

ดังนั้นไม่มีฟังก์ชัน S^* ตามเงื่อนไขของทฤษฎี 4.1.2

□

<u>ทฤษฎี</u> 4.1.3 ให้ $f : [0, 1] \dashrightarrow [0, \infty)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

บน $[0, 1]$ สำหรับ $n = 1, 2, \ldots$

กำหนด $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^{n}$ เป็นเซตของจุดที่

$0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq 1$ และ $f(x_i) > 0$

$(i = 1,2,\ldots,n)$ ให้ฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_{n-1}

ผ่านจุด n จุดนี้ และ p_{n-1} มีช่วงใต้ศูนย์

กำหนดให้ $S_1(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$

และ $S_2 = -S_1$

ให้ $S^* = S_1$ หรือ S_2 ถ้า S^* มีคุณสมบัติต่อไปนี้

(i) $S^* > 0$ บนช่วงใต้ศูนย์ของกราฟ p_{n-1}

(ii) $S^*(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ ที่ $p_{n-1}(x) = 0$

ถ้า $[f(x) - p_{n-1}(x)]\, S^*(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

และ

$$0 \leq \sup \left\{ \frac{-p_{n-1}(x)}{S^*(x)} : x \in [0,1] \text{ ที่ } p_{n-1}(x) \leq 0 \right\}$$

$$\leq \frac{f(x) - p_{n-1}(x)}{S^*(x)}$$

สำหรับทุกๆ ค่าของ $x \in [0, 1]$ ที่ $x \neq x_i$

$(i = 1,2,\ldots, n)$

จะมีฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_n เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบ

บน $[0, 1]$ ซึ่ง $p_n(x_i) = f(x_i)$ สำหรับ $i=1,2,\ldots,n$

พิสูจน์

ให้ $A = [0, 1] - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

และให้ $\varepsilon = \inf\limits_{x \in A} \{ \frac{f(x) - p_{n-1}(x)}{S^*(x)} \}$

เนื่องจาก

$$0 \leq \sup \{ \frac{-p_{n-1}(x)}{S^*(x)} : x \in [0,1] \text{ ที่ } p_{n-1}(x) \leq 0\}$$

$$\leq \inf_{x \in A} \{\frac{f(x) - p_{n-1}(x)}{S^*(x)}\} = \varepsilon$$

ดังนั้น $\sup \{ \frac{-p_{n-1}(x)}{S^*(x)} : x \in [0,1] \text{ ที่ } p_{n-1}(x) \leq 0\} \leq \varepsilon$

ให้ $C = \{x \in [0, 1] : S^*(x) < 0\}$

$$p_{n-1}(x) - f(x) \leq p_{n-1}(x) \qquad \forall x \in C$$

และ $- S^*(x) > 0 \qquad \forall x \in C$

ดังนั้น $\frac{p_{n-1}(x)}{- S^*(x)} \geq \frac{p_{n-1}(x) - f(x)}{- S^*(x)} \qquad \forall x \in C$

$$= \frac{f(x) - p_{n-1}(x)}{S^*(x)} \qquad \forall x \in C$$

จะได้ว่า $\inf\limits_{x \in C} \{ \frac{p_{n-1}(x)}{- S^*(x)} \} \geq \inf\limits_{x \in C} \{\frac{f(x) - p_{n-1}(x)}{S^*(x)}\}$

เนื่องจาก $C \subset A$

ดังนั้น

$$\inf_{x\in A} \left\{\frac{f(x) - p_{n-1}(x)}{S^*(x)}\right\} \leq \inf_{x\in C} \left\{\frac{f(x) - p_{n-1}(x)}{S^*(x)}\right\}$$

ดังนั้น $$\varepsilon \leq \inf_{x\in C} \left\{\frac{f(x) - p_{n-1}(x)}{S^*(x)}\right\}$$

$$\leq \inf_{x\in C} \left\{\frac{p_{n-1}(x)}{-S^*(x)}\right\}$$

ดังนั้น

$$\sup \left\{\frac{-p_{n-1}(x)}{S^*(x)} : x \in [0,1] \text{ ที่ } p_{n-1}(x) \leq 0\right\}$$

$$\leq \inf_{x\in C} \left\{\frac{p_{n-1}(x)}{-S^*(x)}\right\}$$

โดยทฤษฎี 4.1.2 จะได้ว่ามีฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_n ที่ไม่เป็นลบ บน $[0, 1]$ ซึ่ง $p_n(x_i) = f(x_i)$

$i = 1, 2, \ldots, n$

□

ทฤษฎี 4.1.4 ให้ $f : [0,1] \longrightarrow [0, \infty)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0, 1]$

สำหรับ $n = 1,2,\ldots$ กำหนด $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^{n}$

เป็นเซตของจุดที่ $0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq 1$

และ $f(x_i) > 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ ให้ฟังก์ชัน

โพลิโนเมียล p_{n-1} ผ่านจุด n จุดนี้ และ p_{n-1}

มีช่วงใต้ศูนย์

กำหนดให้ $S_1(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$

และ $S_2 = - S_1$

ให้ $S^* = S_1$ หรือ S_2 ถ้า S^* มีคุณสมบัติต่อไปนี้

(i) $S^* > 0$ บนช่วงใต้ศูนย์ของกราฟ p_{n-1}

(ii) $S^*(x) > 0$ $\forall x \in [0,1]$ ที่ $p_{n-1}(x) = 0$

ถ้า $\sup\{\frac{f(x) - p_{n-1}(x)}{S^*(x)} : x \in [0, 1]$ ที่ $p_{n-1}(x) \leq 0\}$

$\leq \inf\{\frac{p_{n-1}(x)}{-S^*(x)} : x \in [0, 1]$ ที่ $S^*(x) < 0\}$

แล้ว มีฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_n ที่ไม่เป็นลบ บน $[0, 1]$

ซึ่ง $p_n(x_i) = f(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

และมีจุด $x^* \in [0, 1] - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

ที่ $p_n(x^*) = f(x^*)$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $E = \{x \in [0, 1]: p_{n-1}(x) \leq 0\}$

จะเห็นว่า E เป็นคอมแพคเซต

(พิสูจน์เช่นเดียวกับทฤษฎี 4.1.2)

เนื่องจาก $-p_{n-1}(x) \leq f(x) - p_{n-1}(x) \quad \forall x \in E$

และ $S^*(x) > 0 \quad \forall x \in E$

ดังนั้น $0 \leq \dfrac{-p_{n-1}(x)}{S^*(x)} \leq \dfrac{f(x) - p_{n-1}(x)}{S^*(x)} \quad \forall x \in E$

$$0 \leq \sup_{x \in E} \left\{ \frac{-p_{n-1}(x)}{S^*(x)} \right\}$$

$$\leq \sup_{x \in E} \left\{ \frac{f(x) - p_{n-1}(x)}{S^*(x)} \right\}$$

$$\leq \inf \left\{ \frac{p_{n-1}(x)}{-S^*(x)} : x \in [0,1] \text{ ที่ } S^*(x) < 0 \right\}$$

ดังนั้น $\sup_{x \in E} \left\{ \dfrac{-p_{n-1}(x)}{S^*(x)} \right\}$

$$\leq \inf \left\{ \frac{p_{n-1}(x)}{-S^*(x)} : x \in [0, 1] \text{ ที่ } S^*(x) < 0 \right\}$$

โดยทฤษฎี 4.1.2 จะได้ว่า มี $p_n \geq 0$ ที่ $p_n(x_i) = f(x_i)$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$

เนื่องจาก E เป็นคอมแพคเซต

ดังนั้น มี $x^* \in E$ ซึ่ง

$$\frac{f(x^*) - p_{n-1}(x^*)}{S^*(x^*)} = \sup_{x \in E} \left\{ \frac{f(x) - p_{n-1}(x)}{S^*(x)} \right\}$$

ให้ $$\varepsilon = \sup_{x \in E} \left\{ \frac{f(x) - p_{n-1}(x)}{S^*(x)} \right\}$$

จะเห็นว่า

$$\sup_{x \in E} \left\{ \frac{-p_{n-1}(x)}{S^*(x)} \right\} \leq \varepsilon \leq \inf \left\{ \frac{p_{n-1}(x)}{-S^*(x)} : x \in [0, 1] \text{ ที่ } S^*(x) < 0 \right\}$$

ให้ $p_n(x) = p_{n-1}(x) + \varepsilon S^*(x)$

พิสูจน์เช่นเดียวกับทฤษฎี 4.1.2 จะได้ว่า

$p_n(x) \geq 0 \qquad \forall x \in [0, 1]$

และ $p_n(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$

จะเห็นได้ว่า $f(x^*) = p_{n-1}(x^*) + \varepsilon S^*(x^*) = p_n(x^*)$

และ $x^* \neq x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$

$\square$

ทฤษฎี 4.1.5 ให้ $f : [0, 1] \longrightarrow (0, \infty)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0, 1]$ ให้ฟังก์ชันอนุพันธ์อันดับที่ $n - 1$ ของ f มีความต่อเนื่องบน $[0, 1]$ และให้ f มีฟังก์ชันอนุพันธ์อันดับที่ n บน $(0, 1)$

ให้ $M = \min\limits_{x \in [0,1]} f(x)$, $N = \sup\limits_{x \in (0,1)} \left| f^{(n)}(x) \right|$

ให้ $0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq 1$

ถ้า $N \leq n!\, M$ แล้ว จะมีฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_{n-1} และไม่เป็นลบบน $[0, 1]$ ที่ $p_{n-1}(x_i) = f(x_i)$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$

และ $\left| f - p_{n-1} \right| \leq M$

พิสูจน์ โดยทฤษฎี 2.6.3 จะได้ว่ามีฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_{n-1} ที่

$p_{n-1}(x_i) = f(x_i)$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$

ให้ $x \in [0,1]$ จะมี $\xi_x \in (0, 1)$ ซึ่งทำให้

$$f(x) - p_{n-1}(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!}$$

$$\left| f(x) - p_{n-1}(x) \right| = \left| (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) \right| \left| \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!} \right|$$

เนื่องจาก $\left| (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \right| \leq 1$

$\forall x \in [0, 1]$

ดังนั้น $\left|f(x) - p_{n-1}(x)\right| \leq \frac{N}{n!}$ $\qquad \forall x \in [0,1]$

$$\leq \frac{n!\ M}{n\,!} = M \qquad \forall x \in [0,1]$$

จะได้ $\left|f(x) - p_{n-1}(x)\right| \leq M \qquad \forall x \in [0,1]$

ดังนั้น $-M \leq f(x) - p_{n-1}(x) \leq M \qquad \forall x \in [0,1]$

$$f(x) + M \geq p_{n-1}(x) \geq f(x) - M \geq 0 \qquad \forall x \in [0,1]$$

ดังนั้น $p_{n-1}(x) \geq 0 \qquad \forall x \in [0,1]$

$\square$

4.2 ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการประมาณฟังก์ชัน

4.2.1 ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการประมาณฟังก์ชันค่าจริง f ที่ไม่เป็นลบ และต่อเนื่องบน $[0, 1]$ ด้วยฟังก์ชันโพลิโนเมียลที่ไม่เป็นลบบน $[0, 1]$

จากทฤษฎี 3.1 กล่าวคือ ให้ $f : [0,1] \longrightarrow [0, \infty)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0, 1]$ สำหรับ $n = 0, 1, 2, \ldots$ จะมี $(n + 1)$ จุด คือ $0 \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq 1$ และมีฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_n เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบ บน $[0,1]$ ซึ่ง $p_n(x_k) = f(x_k)$ สำหรับ $k = 0, 1, \ldots, n$ ดังนั้นจะพิจารณาความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการใช้ฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_n เป็นฟังก์ชันประมาณของฟังก์ชัน f ซึ่งค่าของความคลาดเคลื่อน $\left|f - p_n\right|$ ที่เกิดขึ้นนี้สามารถจะประมาณค่าได้

ถ้าเราทราบขอบเขตบนของ $|f^{(n+1)}(y)|$ เมื่อ $y \in (0, 1)$
ดังนั้น

$$\left|f(x) - p_n(x)\right| \le \frac{1}{(n+1)!} \sup_{y \in (0,1)} \left|f^{(n+1)}(y)\right|$$

$$\forall x \in [0, 1]$$

4.2.2 ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการประมาณฟังก์ชันค่าจริง f ที่ไม่เป็นลบ และต่อเนื่องบน $[0, 1]$ ด้วยฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_n ที่ไม่เป็นลบ บน $[0, 1]$ ผ่านจุด n จุด บนฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้

ถ้ากำหนดจุด n จุด บนฟังก์ชันค่าจริง f คือ

$\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$ โดยที่ $0 \le x_1 < x_2 < \dots < x_n \le 1$

และ $y_i > 0$ $(i=1, 2, \dots, n)$ และมีเงื่อนไขสอดคล้องตามทฤษฎี 4.1.2 แล้ว สามารถหาฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_n ที่ไม่เป็นลบ บน $[0, 1]$ และ $p_n(x_i) = y_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ ดังนั้นความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น $|f - p_n|$ นี้สามารถจะประมาณค่าได้ในเทอมของอนุพันธ์อันดับที่ n ของฟังก์ชัน f (ถ้าสามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับที่ n ของฟังก์ชัน f ได้)

<u>ทฤษฎี</u> 4.2.1 สมมุติให้เงื่อนไขเช่นเดียวกับทฤษฎี 4.1.2

ให้ $p_n(x) = p_{n-1}(x) + \varepsilon S^*(x)$ สำหรับบาง $\varepsilon > 0$

ซึ่ง

$$\sup \left\{ \frac{-p_{n-1}(x)}{S^*(x)} : x \in [0, 1] \text{ ที่ } p_{n-1}(x) \leq 0 \right\}$$

$$\leq \varepsilon \leq \inf \left\{ \frac{p_{n-1}(x)}{S^*(x)} : x \in [0,1] \text{ ที่ } S^*(x) < 0 \right\}$$

ให้ฟังก์ชันอนุพันธ์อันดับที่ $n - 1$ ของ f มีความต่อเนื่องบน $[0, 1]$ และให้ f มีฟังก์ชันอนุพันธ์อันดับที่ n บน $(0, 1)$ ดังนั้น

$$\left| f(x) - p_n(x) \right| \leq \frac{1}{n!} \sup_{y \in (0,1)} \left| f^{(n)}(y) - \varepsilon S^*(y) \right| \quad \forall x \in [0, 1]$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $x \in [0, 1]$

จะมี L_x เป็นจำนวนจริง ซึ่งนิยามโดย

$$f(x) - p_n(x) = L_x(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \quad \ldots(1)$$

และให้

$$g(t) = f(t) - p_n(t) - L_x(t - x_1)(t - x_2)\ldots(t - x_n) \ldots(2)$$

$$(0 \leq t \leq 1)$$

ดังนั้นฟังก์ชัน g มีอนุพันธ์อันดับที่ n บน $(0, 1)$ และ

(i) $g(x) = f(x) - p_n(x) - L_x(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) = 0$

(ii) $g(x_i) = f(x_i) - p_n(x_i) - L_x(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots(x_i-x_n) = 0$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$

นั่นคือ $g(t)$ มีราก $\geq n+1$ ราก บน $[0, 1]$
โดยทฤษฎีบทของโรลส์ $g'(t)$ จะมีรากอย่างน้อย n ราก บน $(0, 1)$
และประยุกต์ทฤษฎีบทของโรลส์ นี้ n ครั้ง
จะได้ว่ามี $c_x \in (0, 1)$ ที่ $g^{(n)}(c_x) = 0$

จาก (2)

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - p_n^{(n)}(t) - L_x\, n! \qquad \ldots(3)$$

จาก $p_n(t) = p_{n-1}(t) + \varepsilon S^*(t)$

และ $p_{n-1}(t)$ มีกำลัง $\leq n-1$ ดังนั้น $p_{n-1}^{(n)}(t) = 0$

ดังนั้น $p_n^{(n)}(t) = \varepsilon S^{*(n)}(t)$

จาก (3)

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - \varepsilon S^{*(n)}(t) - L_x\, n!$$

ดังนั้น $0 = g^{(n)}(c_x) = f^{(n)}(c_x) - \varepsilon S^{*(n)}(c_x) - L_x\, n!$

จะได้ $L_x = \dfrac{f^{(n)}(c_x) - \varepsilon S^{*(n)}(c_x)}{n!}$

แทน L_x ใน (1) จะได้

$$f(x)-p_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)\left[\frac{f^{(n)}(c_x) - \varepsilon S^{*(n)}(c_x)}{n!}\right]$$

ดังนั้น $\left|f(x) - p_n(x)\right| \leq \frac{1}{n!} \left|f^{(n)}(c_x) - \varepsilon S^{*(n)}(c_x)\right|$

$$\left|f(x) - p_n(x)\right| \leq \frac{1}{n!} \sup_{y \in (0,1)} \left|f^{(n)}(y) - \varepsilon S^{*(n)}(y)\right| \quad \forall x \in [0, 1]$$

□

ทฤษฎี 4.2.2 สมมุติให้เงื่อนไขเช่นเดียวกับทฤษฎี 4.2.1

ให้ $E(x) = f(x) - p_{n-1}(x)$

และ $E^*(x) = f(x) - p_n(x)$

ถ้า $E(x)\, S^*(x) \geq 0 \qquad \forall x \in [0, 1]$

และ $\varepsilon \leq \dfrac{|E(x)|}{|S^*(x)|} \qquad \forall x \in [0,1] - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

แล้ว $\sup\limits_{x \in [0,1]} |E^*(x)| \leq \sup\limits_{x \in [0,1]} |E(x)|$

พิสูจน์ จาก $p_n(x) = p_{n-1}(x) + \varepsilon S^*(x)$

และ
$$
\begin{aligned}
E^*(x) &= f(x) - p_n(x) \\
&= f(x) - p_{n-1}(x) - \varepsilon S^*(x) \\
&= E(x) - \varepsilon S^*(x)
\end{aligned}
$$

ให้ $x \in [0, 1] - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

ถ้า $E(x) > 0$ ดังนั้น $S^*(x) > 0$

$$
\begin{aligned}
E^*(x) &= E(x) - \varepsilon S^*(x) \\
&< E(x) \\
&= |E(x)|
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $E^*(x) < |E(x)| \qquad \ldots\ldots(1)$

ถ้า $E(x) < 0$ ดังนั้น $S^*(x) < 0$

$$
\begin{aligned}
-E^*(x) &= -\left[E(x) - \varepsilon S^*(x)\right] \\
&= -E(x) + \varepsilon S^*(x) \\
&< -E(x) \\
&= \left|E(x)\right|
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $E^*(x) > -\left|E(x)\right|$ ... (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $\left|E^*(x)\right| < \left|E(x)\right|$

จะเห็นได้ชัดว่า $E^*(x_i) = E(x_i) = 0$

ดังนั้น $\left|E^*(x)\right| \leq \left|E(x)\right| \quad \forall x \in [0, 1]$

ดังนั้น $\sup\limits_{x \in [0,1]} \left|E^*(x)\right| \leq \sup\limits_{x \in [0,1]} \left|E(x)\right|$

□