บทที่ 6

บทสรุป

จากการวิจัยนี้ ซึ่งเป็นการหาฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_n ที่ไม่เป็นลบบน $[0, 1]$ ซึ่งมีกำลังอย่างมาก n ประมาณฟังก์ชันค่าจริง f ที่ไม่เป็นลบ และต่อเนื่องบน $[0, 1]$ โดยที่ฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_n ผ่านจุด n จุดบนฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้ พร้อมทั้งหาความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการประมาณฟังก์ชัน

6.1 ผลที่ได้จากการวิจัย

6.1.1) สำหรับ $n = 1, 2$

ให้ $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$ เป็นเซตของจุดที่แตกต่างกันซึ่ง

$0 \leq x_i \leq 1$ และ $y_i > 0$; $i = 1, \ldots, n$

แล้ว จะมีฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_n ซึ่ง

(i) $p_n(x_i) = y_i$ สำหรับ $i = 1, \ldots, n$

(ii) $p_n(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่า $x \in [0, 1]$

6.1.2) ถ้ากำหนด $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$ โดยที่ $n \geq 2$ เป็นเซตของจุด

ที่ $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq 1$ และ

$y_i > 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$

ให้ฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_{n-1} ผ่านจุด n จุดนี้ และ p_{n-1} มีช่วงใต้ศูนย์

กำหนดให้ $S_1(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$

และ $S_2 = -S_1$

ให้ $S^* = S_1$ หรือ S_2 ถ้า S^* มีคุณสมบัติต่อไปนี้

(i) $S^* > 0$ บนช่วงใต้ศูนย์ของกราฟ p_{n-1}

(ii) $S^*(y) > 0 \quad \forall y \in [0, 1]$ ที่ $p_{n-1}(y) = 0$

จะได้ว่ามีฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_n ที่ไม่เป็นลบบน $[0, 1]$ และ $p_n(x_i) = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ ก็ต่อเมื่อ

$$\sup \left\{ \frac{-p_{n-1}(x)}{S^*(x)} : x \in [0, 1] \text{ ที่ } p_{n-1}(x) \leq 0 \right\}$$

$$\leq \inf \left\{ \frac{p_{n-1}(x)}{-S^*(x)} : x \in [0, 1] \text{ ที่ } S^*(x) < 0 \right\}$$

6.1.3) ให้ $f : [0, 1] \dashrightarrow [0,\infty)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0,1]$

สำหรับ $n = 1, 2, \ldots$ กำหนด $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^{n}$

เป็นเซตของจุดที่ $0 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le 1$

และ $f(x_i) > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$

ให้ฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_{n-1} ผ่านจุด n จุดนี้ และ p_{n-1}

มีช่วงใต้ศูนย์

กำหนดให้ $S_1(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$

และ $S_2 = - S_1$

ให้ $S^* = S_1$ หรือ S_2 ซึ่งมีคุณสมบัติตามข้อ 6.1.2)

จะได้ว่า

ก) ถ้า $[f(x) - p_{n-1}(x)]\, S^*(x) \ge 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

และ $0 \le \sup \{ \dfrac{-p_{n-1}(x)}{S^*(x)} : x \in [0, 1]$ ที่ $p_{n-1}(x) \le 0\}$

$$\le \frac{f(x) - p_{n-1}(x)}{S^*(x)}$$

สำหรับทุกค่าของ $x \in [0, 1] - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

แล้ว จะมีฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_n เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นลบ

บน $[0, 1]$ ซึ่ง $p_n(x_i) = f(x_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n)$

ข) ถ้า $\sup \{\frac{f(x) - p_{n-1}(x)}{S^*(x)} : x \in [0, 1]$ ที่ $p_{n-1}(x) \leq 0\}$

$\leq \inf \{\frac{p_{n-1}(x)}{- S^*(x)} : x \in [0, 1]$ ที่ $S^*(x) < 0\}$

แล้วมีฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_n ที่ไม่เป็นลบบน $[0, 1]$

ซึ่ง $p_n(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$

และมีจุด $x^* \in [0, 1] - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

ที่ $p_n(x^*) = f(x^*)$

6.1.4) ให้ $f : [0, 1] \longrightarrow (0, \infty)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0,1]$ ให้ฟังก์ชันอนุพันธ์อันดับที่ $n - 1$ ของ f มีความต่อเนื่อง บน $[0, 1]$ และให้ f มีฟังก์ชันอนุพันธ์อันดับที่ n บน $(0, 1)$

ให้ $M = \min_{x \in [0,1]} f(x)$, $N = \sup_{x \in (0,1)} \left| f^{(n)}(x) \right|$

ให้ $0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq 1$

ถ้า $N \leq n!\, M$ แล้ว จะมีฟังก์ชันโพลิโนเมียล p_{n-1} และไม่เป็นลบ บน $[0, 1]$ ที่ $p_{n-1}(x_i) = f(x_i)$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$

และ $\left| f - p_{n-1} \right| \leq M$

6.2 ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการประมาณฟังก์ชัน

ความคลาดเคลื่อน $|f - P_n|$ ของฟังก์ชัน f และ P_n สามารถประมาณค่าได้ในเทอมของอนุพันธ์อันดับที่ n ของฟังก์ชัน f (ถ้าสามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับที่ n ของฟังก์ชัน f ได้)

6.2.1) $$\sup_{x\in[0,1]} \left| f(x)-p_n(x)\right| \le \frac{1}{n!} \sup_{x\in(0,1)} \left| f^{(n)}(x) - s^{*(n)}(x)\right|$$

สำหรับ f ในทฤษฎี 4.1.2

6.2.2) $$\sup_{x\in[0,1]} \left| f(x) - p_n(x)\right| \le \sup_{x\in[0,1]} \left| f(x) - p_{n-1}(x)\right|$$

สำหรับ f ในทฤษฎี 4.1.2

ข้อเสนอแนะจากผู้เขียน

พิจารณา 6.1.2 จะเห็นว่า ถ้ามีฟังก์ชัน s^* สอดคล้องตามเงื่อนไขนั้นแล้ว และได้ยอมรับว่า

$$\sup\left\{ \frac{-p_{n-1}(x)}{s^*(x)} : x \in [0,1] \text{ ที่ } p_{n-1}(x) \le 0 \right\}$$

$$\le \inf\left\{ \frac{p_{n-1}(x)}{-s^*(x)} : x \in [0,1] \text{ ที่ } s^*(x) < 0 \right\} \dots (1)$$

เป็นจริง โดยที่ยังพิสูจน์ไม่ได้ แต่ก็ยังหาตัวอย่างที่มาขัดแย้งไม่ได้ ดังนั้นผู้เขียนจึงมีความเห็นว่า อสมการ (1) น่าจะพิสูจน์ได้ว่าเป็นจริง