บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานเฉพาะที่จำเป็น เพื่อเป็นพื้นฐานการพิสูจน์ทฤษฎีในบทที่ 3 และบทที่ 4 โดยจะกล่าวถึงเฉพาะนิยาม และทฤษฎีเท่านั้น สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีในบทนี้จะไม่แสดงไว้ ผู้อ่านสามารถศึกษาได้จากหนังสืออ้างอิงที่ระบุไว้ท้ายเล่ม

สัญลักษณ์ที่ใช้ในบทที่ 2, 3, 4 มีดังนี้

$>$	หมายถึง	มากกว่า
$<$	หมายถึง	น้อยกว่า
$\geq$	หมายถึง	มากกว่าหรือเท่ากับ
$\leq$	หมายถึง	น้อยกว่าหรือเท่ากับ
$\in$	หมายถึง	เป็นสมาชิกของ
$\notin$	หมายถึง	ไม่เป็นสมาชิกของ
$\subset$	หมายถึง	สับเซต (subset)
$=$	หมายถึง	การเท่ากัน
$\neq$	หมายถึง	ไม่เท่ากัน
$\cap$	หมายถึง	อินเตอร์เซคชัน (Intersection)
$\cup$	หมายถึง	ยูเนียน (Union)
(x_n)	หมายถึง	ลำดับ
$\emptyset$	หมายถึง	เซตว่าง

Q	หมายถึง	เซตของจำนวนตรรกยะ
N	หมายถึง	เซตของจำนวนธรรมชาติ
R	หมายถึง	เซตของจำนวนจริง
R^+	หมายถึง	เซตของจำนวนจริงบวก
$f : A \dashrightarrow B$	หมายถึง	f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B
f(A)	หมายถึง	อิมเมจของ A ภายใต้ f
X - A	หมายถึง	เซต $\{x / x \in X$ และ $x \notin A\}$ เรียกว่า คอมพลีเมนต์ของ A เทียบกับ X

2.1 <u>ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน</u> (Relation and Function)

<u>นิยาม 2.1.1</u> ให้ A และ B เป็นเซต 2 เซต <u>ผลคูณคาร์ทีเซียน</u> (The cartesian Product) ของ A กับ B จะแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \times B$ หมายถึง เซตของคู่ลำดับ (a, b) ทั้งหมด เมื่อ $a \in A$ และ $b \in B$ หรือใช้สัญลักษณ์สั้น ๆ ดังนี้ $A \times B = \{(a, b) / a \in A$ และ $b \in B\}$

<u>นิยาม 2.1.2</u> <u>ความสัมพันธ์ r</u> จากเซต X ไปยัง Y หมายถึง สับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียนของ X กับ Y ในกรณีที่ X = Y จะเรียกความสัมพันธ์ r ว่า <u>เป็นความสัมพันธ์ในเซต X</u>

<u>นิยาม 2.1.3</u> <u>ฟังก์ชัน</u> (function) หมายถึง ความสัมพันธ์ซึ่งคู่ลำดับสองคู่ลำดับใด ๆ ที่ต่างกันในความสัมพันธ์จะมีสมาชิก ในพิกัดที่หนึ่งเหมือนกันไม่ได้ นั่นคือ ถ้าให้ f เป็นฟังก์ชัน โดยที่
ถ้า $(x, y), (x, z) \in f$ แล้วจะได้ว่า $y = z$

<u>นิยาม 2.1.4</u> เซตของพิกัดที่หนึ่งของคู่ลำดับทั้งหมดของฟังก์ชัน f เรียกว่า <u>โดเมน</u> (domain) ของ f เขียนแทนด้วย D_f เซตของพิกัดที่สองของคู่ลำดับทั้งหมดของฟังก์ชัน f เรียกว่า <u>เรนจ์</u> (range) ของ f เขียนแทนด้วย R_f
ใช้สัญลักษณ์ $f : A \dashrightarrow B$ แทน f เป็นฟังก์ชันจากสับเซตของ A ไปยัง B

<u>นิยาม 2.1.5</u> ให้ $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ และ $f : X \dashrightarrow Y$
ให้ $Z \subset X$ และ $g : Z \dashrightarrow Y$ เรียก g ว่า <u>เรสติกชัน</u> ของ f บน Z (The restriction of f to Z)
ก็ต่อเมื่อ $g(c) = f(c)$ สำหรับทุก $c \in Z$
ใช้สัญลักษณ์ $f_{|Z}$ แทน g

<u>ทฤษฎี 2.1.6</u> สมการโพลิโนเมียลอันดับ n จะมีรากที่แตกต่างกันได้ไม่เกิน n ราก

<u>พิสูจน์</u> [6] หน้า 19

2.2 ปริภูมิเมตริก (Metric space)

นิยาม 2.2.1 ให้ X เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง จะเรียกฟังก์ชัน

$d : X \times X \rightarrow R$ ว่าเป็นฟังก์ชันระยะทาง

(distance function) หรือ เมตริก (metric)

บนเซต X ถ้า d มีคุณสมบัติต่อไปนี้

สำหรับสมาชิก x, y, z ใด ๆ ของ X จะได้ว่า

1. $d(x, y) \geq 0$

2. $d(x, y) = d(y, x)$

3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

4. $d(x, y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

นิยาม 2.2.2 จะเรียกเซต $X \neq \emptyset$ พร้อมด้วยเมตริก d ว่าเป็น

ปริภูมิเมตริก (metric space) ซึ่งจะใช้แทนด้วยสัญลักษณ์

(X, d)

ตัวอย่าง 2.2.3 ให้ $X = R$, $d_u : R \times R \rightarrow R$ โดยนิยามดังนี้

$d_u(x, y) = |x - y|$ สำหรับสมาชิก x, y ใด ๆ ของ R

จะได้ว่า (R, d_u) เป็นปริภูมิเมตริก และจะเรียก d_u ว่า

เมตริกปกติ หรือ ยูซวลเมตริก

<u>ตัวอย่าง 2.2.4</u> ให้ X เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง

$d : X \times X \longrightarrow R$ กำหนดโดย

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 , & x = y \\ 1 , & x \neq y \end{cases}$$

จะได้ว่า d เป็นเมตริกบน X และเรียก d ว่า <u>ดีสครีตเมตริก</u> (discrete metric) และ (X, d) เป็น<u>ปริภูมิดีสครีตเมตริก</u>

<u>นิยาม 2.2.5</u> ให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก

ให้ $p \in X$ และ $\varepsilon > 0$ จะเรียกเซต

$$B(p, \varepsilon) = \{x \in X \,/\, d(x, p) < \varepsilon\}$$

ว่าเป็น <u>บอลล์เปิด</u> (open ball) ใน (X, d) ที่มีศูนย์กลางที่ p และรัศมี ε

<u>นิยาม 2.2.6</u> ให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $A \subset X$

จะเรียก A ว่าเป็น<u>เซตเปิด</u> (open set) ถ้าแต่ละ $x \in A$ มีบอลล์เปิด $B(x, \varepsilon_x)$ ใน (X, d) ซึ่งทำให้ $B(x, \varepsilon_x) \subset A$ และเรียก A ว่า <u>เซตปิด</u> (closed set) ถ้า X - A เป็นเซตเปิด

<u>ทฤษฎี 2.2.7</u> ทุกบอลล์เปิดเป็นเซตเปิด

<u>พิสูจน์</u> [10] หน้า 50

<u>นิยาม 2.2.8</u> ให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก จะเรียกสับเซต W ของ X ว่าเป็น <u>เนเบอร์ฮูด</u> (neighborhood) ของ $x \in X$ ถ้ามีเซตเปิด G ซึ่ง $x \in G \subset W$ และใช้สัญลักษณ์ $\eta(x)$ แทนเซตของเนเบอร์ฮูดทั้งหมดของ x

<u>นิยาม 2.2.9</u> ให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $A \subset X$, $x \in X$ จะเรียก x ว่าเป็น<u>จุดลิมิต</u> (limit point) ของ A ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $W \in \eta(x)$ จะได้ว่า

$W \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$

<u>นิยาม 2.2.10</u> ให้ $S : N \longrightarrow X$ ซึ่ง $X \neq \emptyset$

โดยที่ $S(n) = x_n$ สำหรับทุก $n \in N$

เรียก $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ ว่า <u>ลำดับ</u> (sequence) ใน X และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ (x_n) หรือ $\{x_n\}$

<u>นิยาม 2.2.11</u> ให้ (x_n) เป็นลำดับใน X และ (n_k) เป็นลำดับในเซตของจำนวนธรรมชาติ โดยที่ $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$

จะเรียกลำดับ (x_{n_k}) ว่า ลำดับย่อย (subsequence)

ของ (x_n)

นิยาม 2.2.12 เรียกลำดับ (x_n) ใน R ว่าเป็น

1. ลำดับเพิ่ม (monotone increasing)

ถ้า $x_n \leq x_{n+1}$, $n \geq 1$

2. ลำดับลด (monotone decreasing)

ถ้า $x_n \geq x_{n+1}$, $n \geq 1$

นิยาม 2.2.13 ให้ (x_n) เป็นลำดับในปริภูมิเมตริก (X, d) , $x \in X$

จะกล่าวว่า (x_n) ลู่เข้า (converge) สู่ x หรือ เป็น

ลำดับที่ลู่เข้า (convergent sequence)

ถ้าแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $n_o \in N$ ซึ่งทำให้

$d(x_n, x) < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geq n_o$

ถ้าลำดับใดไม่มีลิมิตเรียกลำดับนั้นว่า ไดเวอร์จ (diverge)

หรือ เป็นลำดับที่ไดเวอร์จ (divergent sequence)

หมายเหตุ จะเขียน $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ หรือ $x_n \longrightarrow x$

เพื่อแสดงว่า (x_n) ลู่เข้าสู่ x หรือ x คือ ลิมิตของ (x_n)

<u>นิยาม 2.2.14</u> ให้ (x_n) เป็นลำดับใน R , $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

หมายความว่า สำหรับทุกจำนวนจริง $M > 0$

จะมี $n_o \in N$ ซึ่ง $x_n > M$ สำหรับทุก $n \geq n_o$

และ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ หมายความว่า สำหรับทุก

จำนวนจริง $M > 0$ จะมี $n_o \in N$ ซึ่ง $x_n < -M$

สำหรับทุก $n \geq n_o$

<u>ทฤษฎี 2.2.15</u> ให้ (x_n) เป็นลำดับลู่เข้าในปริภูมิเมตริก (X, d)

ถ้า (x_n) ลู่เข้าสู่ x และ y ใน X แล้ว $x = y$

<u>พิสูจน์</u> [10] หน้า 85

<u>ทฤษฎี 2.2.16</u> ให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก และ (x_n)

เป็นลำดับใน X ซึ่งไม่มีลำดับย่อยที่ลู่เข้าแล้วเซต

$\{x_n / n \in N\}$ จะไม่มีจุดลิมิต

<u>พิสูจน์</u> [2] หน้า 22 - 23

<u>นิยาม 2.2.17</u> ให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก $E \subset X$ ถ้ามี $M \in R$ และ $x \in X$ ซึ่ง $d(x, y) \leq M$ สำหรับทุก $y \in E$ จะเรียก E ว่า เป็น<u>เซตที่มีขอบเขต</u> (bounded set)

<u>นิยาม 2.2.18</u> ให้ (x_n) เป็นลำดับใน R เรียก (x_n) ว่าเป็น <u>ลำดับที่มีขอบเขต</u> (bounded sequence) ก็ต่อเมื่อ เรนจ์ของ (x_n) คือเซต $\{x_n / n \geq 1\}$ เป็นเซตที่มีขอบเขต ไม่เช่นนั้นเรียก (x_n) ว่าเป็น <u>ลำดับที่ไม่มีขอบเขต</u> (unbounded sequence)

<u>ทฤษฎี 2.2.19</u> ทุกลำดับที่มีขอบเขตใน R จะมีลำดับย่อยที่เป็นลำดับที่ลู่เข้า

<u>พิสูจน์</u> [9] หน้า 86 - 87

<u>ทฤษฎี 2.2.20</u> ทุกลำดับ (x_n) ใน R ที่ไม่มีขอบเขตจะมีลำดับย่อย (x_{n_k}) ซึ่ง $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = \infty$ หรือ $-\infty$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

<u>พิสูจน์</u> ให้ (x_n) เป็นลำดับใน R และเป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต

ถ้า (x_n) ไม่มีขอบเขตบน

จะได้ว่า สำหรับทุก $k \in N$ จะมี $x_{n_k} > k$

ดังนั้น $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = \infty$

ถ้า (x_n) ไม่มีขอบเขตล่าง

จะได้ว่า สำหรับทุก $k \in N$ จะมี $x_{n_k} < -k$

ดังนั้น $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = -\infty$ □

<u>นิยาม 2.2.21</u> ให้ลำดับ (x_n) เป็นลำดับในปริภูมิเมตริก (X, d)

จะกล่าวว่าลำดับ (x_n) เป็น<u>ลำดับคอชี</u> (Cauchy sequence)

ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $n_o \in N$ ซึ่ง

$d(x_n, x_m) < \varepsilon$ สำหรับทุก $n, m \geq n_o$

<u>ทฤษฎี 2.2.22</u> ให้ (x_n) เป็นลำดับในปริภูมิเมตริก (X, d)

จะได้ว่า ถ้า (x_n) เป็นลำดับที่ลู่เข้าใน X แล้ว (x_n)

เป็นลำดับคอชีใน X

<u>พิสูจน์</u> [10] หน้า 90

<u>นิยาม 2.2.23</u> จะเรียกปริภูมิเมตริก (X, d) ว่า <u>คอมพลีท</u> (complete) ก็ต่อเมื่อ ทุกลำดับคอชีใน X ลู่เข้าสู่จุดใน X

<u>ตัวอย่าง 2.2.24</u> (R, d_u) เป็นปริภูมิเมตริกที่คอมพลีท

<u>ตัวอย่าง 2.2.25</u> ปริภูมิดีสครีตเมตริก เป็นปริภูมิเมตริกที่คอมพลีท

<u>ตัวอย่าง 2.2.26</u> $((0, 1), d_u)$ ไม่เป็นคอมพลีท

เพราะมี ลำดับคอชีใน $(0, 1)$ ที่เป็นลำดับไม่ลู่เข้าสู่จุดใน $(0, 1)$

ให้ $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in N$

จะได้ว่า (x_n) เป็นลำดับใน $(0, 1)$

กำหนด $\varepsilon > 0$ มี $n_o \in N$ ที่ $n_o > \frac{2}{\varepsilon}$

ซึ่ง $|x_n - x_m| < \varepsilon$ สำหรับทุก $m, n \geq n_o$

ดังนั้น (x_n) เป็นลำดับคอชีใน $(0, 1)$

แต่ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

และ $0 \notin (0, 1)$

<u>นิยาม 2.2.27</u> ถ้า (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $Y \subset X$ ที่ $Y \neq \emptyset$ แล้ว $(Y, d_{|Y \times Y})$ เรียกว่า <u>ปริภูมิย่อย</u> (subspace) ของ (X, d)

<u>ทฤษฎี 2.2.28</u> ถ้า (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกที่คอมพลีท และ Y เป็นเซตปิดใน X แล้วจะได้ว่า $(Y, d_{|Y \times Y})$ เป็นปริภูมิเมตริกที่คอมพลีท

<u>พิสูจน์</u> [10] หน้า 97

<u>นิยาม 2.2.29</u> จะเรียกปริภูมิเมตริก (X, d) ว่า <u>โททอลลี่บาวด์</u> (totally bounded) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมีสับเซตจำกัด F ของ X ซึ่ง $X = \bigcup_{z \in F} B(z, \varepsilon)$

<u>ตัวอย่าง 2.2.30</u> $((0, 1), d_u)$ เป็นโททอลลี่บาวด์

ให้ $\varepsilon > 0$

ถ้า $\varepsilon = \frac{1}{2}$

ให้ $F = \{\frac{1}{2}\}$

ดังนั้น $B(\frac{1}{2}, \varepsilon) = (0, 1)$

ถ้า $\varepsilon \le \frac{1}{2}$ จะมี $n \in N$

ซึ่งทำให้ $\frac{1}{n} \le \varepsilon$ แบ่ง $[0, 1]$ ออกเป็น n ช่วงเท่า ๆ กัน

ที่ $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$

ให้ $F = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}\}$

จะได้ว่า $\bigcup_{x_i \in F} B(x_i, \varepsilon) = (0, 1)$

ดังนั้น $((0, 1), d_u)$ เป็นโททอลลี่บาวด์

<u>ทฤษฎี 2.2.31</u> ปริภูมิเมตริก (X, d) เป็นโททอลลี่บาวด์ ก็ต่อเมื่อ ทุกลำดับใน X มีลำดับย่อยคอชี

<u>พิสูจน์</u> [10] หน้า 283 - 285

2.3 <u>ลิมิตของฟังก์ชัน และฟังก์ชันต่อเนื่อง</u>

<u>นิยาม 2.3.1</u> ให้ $f : E \longrightarrow R$, $E \subset R$

เรียกสมาชิก b ของ R ว่า เป็น<u>จุดลิมิต</u> (limit point) <u>ของ f ที่จุด c</u> ใน R โดยที่ c เป็นจุดลิมิตจุดหนึ่งของ E ถ้าสำหรับทุก ๆ เนเบอร์ฮูด V ของ b จะมีเนเบอร์ฮูด U ของ c ซึ่งถ้า $x \in U \cap E$ และ $x \neq c$ แล้วจะได้ว่า $f(x) \in V$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$\lim_{x \to c} f(x) = b$ หรือ $f(x) \to b$ ขณะที่ $x \to c$

<u>ทฤษฎี 2.3.2</u> ให้ $f : E \longrightarrow R$, $E \subset R$ จะได้ว่า

ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. จุดลิมิต $b = \lim_{x \to c} f(x)$ มีจริง
2. ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ มาให้ จะหา $\delta > 0$ ได้ ซึ่ง

   ทำให้ $|f(x) - b| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ จุด $x \in E$

   ที่ $0 < |x - c| < \delta$
3. $b = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$ สำหรับลำดับ (x_n) ใด ๆ

   ใน E ที่ $x_n \neq c$ (ทุก ๆ n) และ $x_n \longrightarrow c$

<u>พิสูจน์</u> [9] หน้า 153

<u>นิยาม 2.3.3</u> ให้ $f : E \longrightarrow R$, $E \subset R$

1. จะกล่าวว่าลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใกล้ ∞

   เป็นจำนวนจริง a และเขียนแทนด้วย

   $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$ ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ มาให้

   จะมีจำนวนจริง $M > 0$ ซึ่งทำให้ $|f(x) - a| < \varepsilon$

   สำหรับทุก $x \in E$ ที่ $x > M$
2. จะกล่าวว่าลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใกล้ $-\infty$

   เป็นจำนวนจริง a และเขียนแทนด้วย

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$ ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ มาให้

จะมีจำนวนจริง $M > 0$ ซึ่งทำให้ $|f(x) - a| < \varepsilon$

สำหรับทุก $x \in E$ ที่ $x < -M$

3. จะกล่าวว่า $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ มาให้ จะมีจำนวนจริง $M > 0$

ซึ่ง $f(x) > \varepsilon$ เมื่อ $x > M$

4. จะกล่าวว่า $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ มาให้จะมี จำนวนจริง $M > 0$ ซึ่ง

$f(x) < -\varepsilon$ เมื่อ $x > M$

5. จะกล่าวว่า $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ มาให้จะมีจำนวนจริง $M > 0$

ซึ่ง $f(x) > \varepsilon$ เมื่อ $x < -M$

6. จะกล่าวว่า $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ มาให้จะมีจำนวนจริง $M > 0$

ซึ่ง $f(x) < -\varepsilon$ เมื่อ $x < -M$

<u>ทฤษฎี 2.3.5</u> ให้ $f : R \longrightarrow R$ และ $y \in R$ จะได้ว่า

$\lim_{x \to \infty} f(x) = y$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y$

สำหรับทุก (x_n) ที่ $x_n \longrightarrow \infty$

<u>พิสูจน์</u> $(\Longrightarrow)$

ให้ $\lim_{x \to \infty} f(x) = y$

ให้ (x_n) เป็นลำดับใน R ซึ่ง $x_n \longrightarrow \infty$

จะแสดงว่า $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y$

กำหนด $\varepsilon > 0$

เพราะว่า $\lim_{x \to \infty} f(x) = y$

ดังนั้นมีจำนวนจริง $M > 0$ ที่ทำให้

$|f(x) - y| < \varepsilon$ สำหรับทุก $x > M$

เพราะว่า $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$

ดังนั้น สำหรับทุกจำนวนจริง $M > 0$ จะมี $n_0 \in N$

ที่ทำให้ $x_n > M$ สำหรับทุก $n \geq n_0$

จะได้ว่า $|f(x_n) - y| < \varepsilon$

นั่นคือ $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y$

($\Longleftarrow$)

ให้ $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$ และ $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y$

จะแสดงว่า $\lim_{x \to \infty} f(x) = y$

สมมุติ $\lim_{x \to \infty} f(x) \neq y$

ดังนั้น จะมี $\varepsilon > 0$ ซึ่ง ทุกจำนวนจริง $M > 0$

จะมี $x > M$ ซึ่ง $|f(x) - y| \geq \varepsilon$

ให้ $M_n = n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

จะมี x_n ที่ทำให้ $x_n \geq M_n = n$ ....(1)

แต่ $|f(x_n) - y| \geq \varepsilon$ ....(2)

จาก (1) จะได้ว่า $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$

แต่จาก (2) $\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq y$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $\lim_{x \to \infty} f(x) = y$ $\square$

<u>นิยาม 2.3.6</u> จะเรียกฟังก์ชัน $f : (X, d) \dashrightarrow (Y, d')$

ว่าเป็น <u>ฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x_o \in X$</u>

ถ้าแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$

โดยที่ ถ้า $y \in X$ และ $d(x_o, y) < \delta$

แล้ว $d(f(x_o), f(y)) < \varepsilon$

จะเรียก f ว่าเป็น <u>ฟังก์ชันต่อเนื่อง</u> (continuous function)

บน X ถ้า f ต่อเนื่องที่ทุกจุดใน X

<u>ทฤษฎี 2.3.7</u> ให้ (X, d) และ (Y, d') เป็นปริภูมิเมตริก

ถ้า $f : (X, d) \dashrightarrow (Y, d')$ เป็นฟังก์ชันแล้ว

f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x_o \in X$ ก็ต่อเมื่อทุกลำดับ (x_n)

ใน (X, d) ที่ลู่เข้าไปยัง $x_o \in X$ $(f(x_n))$

จะลู่เข้าสู่ $f(x_o) \in Y$

<u>พิสูจน์</u> [10] หน้า 116

<u>นิยาม 2.3.8</u> ฟังก์ชัน f มีเรนจ์อยู่ใน R จะเป็นฟังก์ชันที่มี<u>ขอบเขต</u> (bounded function) ถ้ามีจำนวนจริง M ซึ่งทำให้ $|f(x)| \leq M$ สำหรับทุก x ในโดเมนของ f

2.4 <u>ปริภูมิเชิงโทโพโลยี</u> (Topological space)

<u>นิยาม 2.4.1</u> ให้เซต $X \neq \emptyset$ และ J เป็นเซตของสับเซตของ X จะเรียก J ว่า เป็น<u>โทโพโลยี</u> (topology) สำหรับ X ถ้า J มีคุณสมบัติ

1. $X, \emptyset \in J$
2. ถ้า $A, B \in J$ แล้ว $A \cap B \in J$
3. ถ้า $A_i \in J$ สำหรับทุก $i \in I$ แล้ว

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in J$$

และเรียกสมาชิกใน J ว่า <u>เซตเปิด</u> (Open set)

<u>หมายเหตุ 2.4.2</u> จากนิยาม 2.4.1 (2) จะได้ว่า ถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_n \in J$ แล้ว $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in J$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

หมายเหตุ 2.4.3 จะได้ว่า P(X) เป็นโทโพโลยี สำหรับ X จะเรียกว่า ดีสครีตโทโพโลยี (discrete topology)

นิยาม 2.4.4 ให้ J เป็นโทโพโลยี สำหรับ X จะเรียกคู่ลำดับ (X, J) ว่า ปริภูมิเชิงโทโพโลยี (topological space)

นิยาม 2.4.5 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก และ

J_d = {G ⊂ X / G เป็นเซตเปิดของ X}

จะได้ว่า J_d เป็นโทโพโลยี สำหรับ X จะเรียก (X, J_d) ว่าเป็น ปริภูมิเชิงโทโพโลยีที่กำหนดโดยเมตริก d

ตัวอย่าง 2.4.6 ให้ d เป็นยูซวลเมตริก บน R และ J_d เป็นโทโพโลยี สำหรับ R ที่กำหนดโดย d จะเรียก J_d ในกรณีนี้ว่า ยูซวลโทโพโลยี (usual topology) ซึ่งอาจเขียนแทนด้วย J_u

นิยาม 2.4.7 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $F \subset X$ จะเรียก F ว่าเป็นเซตปิด ก็ต่อเมื่อ X-F เป็นเซตเปิด

<u>นิยาม 2.4.8</u> ให้ $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี จะเรียกสับเซต W ของ X ว่าเป็น <u>เนเบอร์ฮูด</u> (neighborhood) ของ $x \in X$ ก็ต่อเมื่อมี $G \in \mathcal{J}$ ซึ่ง $x \in G \subset W$

<u>สัญลักษณ์</u> ให้ $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $x \in X$
$\mathcal{N}(x)$ คือ เซตของเนเบอร์ฮูดทั้งหมดของ x

<u>นิยาม 2.4.9</u> ให้ x เป็นสมาชิกในปริภูมิเชิงโทโพโลยี $(X, \mathcal{J})$ <u>เนเบอร์ฮูดเบส</u> (neighborhood base) <u>ของ x</u> จะหมายถึงเซต $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{N}(x)$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า สำหรับทุก $N \in \mathcal{N}(x)$ จะมี $B \in \mathcal{B}(x)$ โดยที่ $B \subset N$

<u>นิยาม 2.4.10</u> เรียกปริภูมิเชิงโทโพโลยี $(X, \mathcal{J})$ ว่าเป็น <u>ปริภูมิเฟิร์สเคานท์เบิล</u> (first countable space) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x \in X$ มีเนเบอร์ฮูดเบส $\mathcal{B}(x)$ ซึ่งเป็นเซตนับได้

<u>นิยาม 2.4.11</u> ให้ $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี $A \subset X$ และ $x \in X$ จะเรียก x ว่าเป็น<u>จุดลิมิต</u> (limit point or cluster point) ของ A ถ้า $U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$ สำหรับทุก $U \in \mathcal{N}(x)$

<u>นิยาม 2.4.12</u> ให้ $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี $A \subset X$ <u>โคลเชอร์</u> (closure) ของ A เขียนแทนด้วย $\bar{A}$ หมายถึง $A \cup A'$ โดยที่ A' เป็นเซทของจุดลิมิตของ A

<u>ทฤษฎี 2.4.13</u> ให้ $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $F \subset X$ แล้ว F เป็นเซทปิด ก็ต่อเมื่อ จุดลิมิตทั้งหมดของ F เป็นสมาชิกของ F

<u>พิสูจน์</u> [10] หน้า 148

<u>นิยาม 2.4.14</u> ให้ (x_n) เป็นลำดับในปริภูมิเชิงโทโพโลยี $(X, \mathcal{J})$ และ $x \in X$ แล้ว (x_n) เรียกว่า <u>ลู่เข้า</u> (converges) ไปยัง $x \in X$ ก็ต่อเมื่อทุกเนเบอร์ฮูด V ของ x ใน X มี $n_0 \in N$ ที่ $x_n \in V$ สำหรับทุก $n \geq n_0$ ถ้า (x_n) ลู่เข้าสู่บางจุดใน X แล้ว (x_n) เรียกว่า <u>ลำดับลู่เข้า</u> (convergent sequence) ใน X

<u>ทฤษฎี 2.4.15</u> ให้ $(X, \mathcal{J})$ เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยีที่ทุกลำดับที่ลู่เข้าใน X มีจุดลิมิตเพียงจุดเดียวจะได้ว่า ถ้า (x_n) ลู่เข้าสู่จุด $x \in X$ แล้วทุกลำดับย่อยของ (x_n) จะลู่เข้าสู่ x

พิสูจน์ ให้ (x_n) เป็นลำดับใน (X, J) และ (x_n) ลู่เข้าสู่ $x \in X$

โดยนิยาม 2.4.14

ให้ $V \in \eta(x)$ จะมี $n_o \in N$ ซึ่ง $x_n \in V$ สำหรับทุก $n \geq n_o$

ให้ (x_{n_m}) เป็นลำดับย่อยของ (x_n)

เนื่องจาก $n_m \geq m$ เมื่อ $m = 1, 2, 3, \ldots$

ดังนั้น ถ้า $m \geq n_o$ แล้ว $n_m \geq n_o$

จะได้ว่า $x_{n_m} \in V$

ดังนั้น (x_{n_m}) ลู่เข้าสู่ $x \in X$

ทฤษฎี 2.4.16 ถ้า (X, J) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี $A \subset X$ และ $x \in X$ จะได้ว่า ถ้า (x_n) เป็นลำดับใน A ซึ่ง (x_n) ลู่เข้าสู่ $x \in X$ แล้ว $x \in \bar{A}$

พิสูจน์ [4] หน้า 24

ทฤษฎี 2.4.17 ถ้า (X, J) เป็นปริภูมิเฟิร์สเคานท์เบิล และ $E \subset X$ แล้ว $x \in \bar{E}$ ก็ต่อเมื่อ มีลำดับ (x_n) ใน E ที่ลู่เข้าสู่ $x \in X$

พิสูจน์ [16] หน้า 71

นิยาม 2.4.18 ให้ (X, J) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี ถ้า $x \neq y$ ใน X มีเนเบอร์ฮูด U, V ของ x, y ตามลำดับ ซึ่ง $U \cap V = \emptyset$ แล้วเรียก (X, J) ว่า ปริภูมิ T_2 (T_2 - space) หรือ ปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟฟ์ (Hausdorff Space)

ทฤษฎี 2.4.19 ถ้า (X, J) เป็นปริภูมิ T_2 แล้ว ทุกลำดับใน X ที่เป็นลำดับลู่เข้าจะมีจุดลิมิตเพียงจุดเดียว

พิสูจน์ [10] หน้า 211 - 212

ทฤษฎี 2.4.20 ทุกปริภูมิเมตริกเป็นปริภูมิเฟิร์สเคานท์เทเบิล

พิสูจน์ [12] หน้า 102

นิยาม 2.4.21 ให้ (X, J), (Y, J') เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $f : (X, J) \longrightarrow (Y, J')$ จะเรียก f ว่า ต่อเนื่องที่จุด $x \in X$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละเซตเปิด H ใน Y ซึ่ง $f(x) \in H$ มีเซตเปิด G ใน X ซึ่ง $x \in G$ และ $f(G) \subset H$ จะเรียก f ว่า ต่อเนื่องบน X ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องที่ทุกจุด $x \in X$

<u>นิยาม 2.4.22</u> ให้ (X, J) และ (Y, J') เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี จะเรียกฟังก์ชัน $f : (X, J) \longrightarrow (Y, J')$ ว่าเป็น <u>ฟังก์ชันปิด</u> (Closed function) ก็ต่อเมื่อ ถ้า S เป็นเซตปิดใน (X, J) แล้ว $f(S)$ เป็นเซตปิดใน (Y, J')

<u>ทฤษฎี 2.4.23</u> ให้ (X, J) และ (Y, J') เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี $f : (X, J) \longrightarrow (Y, J')$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ ถ้า (x_n) ลู่เข้าสู่ $x \in X$ แล้วจะได้ว่า $(f(x_n))$ จะลู่เข้าสู่ $f(x) \in Y$

<u>พิสูจน์</u> [4] หน้า 27