บทที่ 3

เงื่อนไขที่ทำให้ฟังก์ชันต่อเนื่องจาก R ไปยัง R เป็นฟังก์ชันปิด

ในบทนี้จะเป็นการศึกษาบทความของ M. Solveig E. spelie และ James E. Joseph ซึ่งตีพิมพ์ในวารสาร Mathematics Magazine ปี 1972 [8] ในหัวข้อ " A Characterization of Continuous Closed Real Function "

จุดประสงค์ที่สำคัญของบทนี้ ก็เพื่อที่จะหาเงื่อนไขที่ทำให้ฟังก์ชันต่อเนื่องจาก R ไปยัง R เป็นฟังก์ชันปิด

<u>นิยาม 3.1</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจากสับเซตของ R ไปยัง R และ (x_n) เป็นลำดับใน R จะเรียก $(f(x_n))$ ว่าเป็นลำดับอซิมโทติค สำหรับ f

ถ้า (x_n) เป็นลำดับที่ไม่มีลำดับย่อยคอชี และมี $y \in R$ ซึ่ง $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = y$ แต่ $y \neq f(x_n)$ สำหรับทุก $n \in N$

<u>ตัวอย่าง 3.2</u> ให้ $f : R \to R$ โดยที่

$$f(x) = \frac{1}{2^x}$$

ให้ (x_n) เป็นลำดับใน R ซึ่ง $x_n = n$

จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$

ดังนั้นทุกลำดับย่อยของ (x_n) จะไดเวอร์จเข้าสู่ ∞

จะได้ว่า (x_n) ไม่มีลำดับย่อยที่ลู่เข้า

จากตัวอย่าง 2.2.24 และนิยาม 2.2.23 ดังนั้น (x_n)

ไม่มีลำดับย่อยคอชี

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{x_n}} = 0 \in R$$

แต่ $f(x_n) = \frac{1}{2^n} \neq 0$

สำหรับทุก $n \in N$

จะได้ว่า $(f(x_n))$ เป็นลำดับอซิมโทติค สำหรับ f

<u>ทฤษฎี 3.3</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจากสับเซทของ R ไปยัง R จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันปิด ก็ต่อเมื่อ f ไม่มีลำดับอซิมโทติค

<u>พิสูจน์</u> $(\Longrightarrow)$

ให้ f เป็นฟังก์ชันปิด

สมมติ f มีลำดับอซิมโทติค คือ $(f(x_n))$

ดังนั้น (x_n) เป็นลำดับใน R ที่ไม่มีลำดับย่อยคอชี

จะได้ว่า (x_n) เป็นลำดับที่ไม่มีลำดับย่อยที่ลู่เข้า

จากทฤษฎี 2.2.16

ดังนั้น $\{x_n / n \in N\}$ เป็นเซตที่ไม่มีจุดลิมิต

จะได้ว่า $\{x_n / n \in N\}$ เป็นเซตปิด

ทำให้ $\{f(x_n) / n \in N\}$ เป็นเซตปิด

แต่ $(f(x_n))$ เป็นลำดับอซิมโทติค

ดังนั้น มี $y \in R$ ซึ่ง $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y$

แต่ $y \neq f(x_n)$ สำหรับทุก $n \in N$

ดังนั้น y เป็นจุดลิมิตของเซต $\{f(x_n) / n \in N\}$

ซึ่ง $y \notin \{f(x_n) / n \in N\}$

ทำให้ $\{f(x_n) / n \in N\}$ ไม่เป็นเซตปิด เกิดข้อขัดแย้ง

จึงได้ว่า f ไม่มีลำดับอซิมโทติค

$(\Longleftarrow)$

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ไม่มีลำดับอซิมโทติค

สมมุติ f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

จะมี $S \subset R$ ซึ่ง S เป็นเซตปิด

แต่ $f(S)$ ไม่เป็นเซตปิดใน R

ดังนั้นจะมี $y \in R$ ซึ่งเป็นจุดลิมิตของ $f(S)$ และ $y \notin f(S)$ จึงมีลำดับ (x_n) ใน S ที่ $(f(x_n))$ ลู่เข้าสู่ y

จะได้ว่า $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y$

แต่ $y \neq f(x_n)$ สำหรับทุก $n \in N$

เนื่องจาก $(f(x_n))$ ไม่เป็นลำดับอชิมโททิคสำหรับ f

ดังนั้น (x_n) มีลำดับย่อยคอชีให้เป็น (x_{n_m})

จากที่ R คอมพลีท และ S เป็นเซตปิดใน R จะได้ว่ามี $x \in S$ ซึ่ง $x_{n_m} \to x$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ดังนั้น $\lim_{m \to \infty} f(x_{n_m}) = f(x) \in f(S)$

แต่ลำดับ $(f(x_n))$ ลู่เข้าสู่ y

ดังนั้น ลำดับย่อย $(f(x_{n_m}))$ จะต้องลู่เข้าสู่ y

จะได้ว่า $f(x) = y$ เกิดข้อขัดแย้งที่ว่า

$$y \notin f(S) \quad \text{แต่} \quad f(x) \in f(S)$$

ดังนั้น f ต้องเป็นฟังก์ชันปิด $\square$

<u>บทแทรก 3.4</u> ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจากสับเซตของ R ไปยัง R

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ หรือ $-\infty$ อย่างใดอย่างหนึ่ง และ

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ หรือ $-\infty$ อย่างใดอย่างหนึ่ง แล้ว f เป็นฟังก์ชันปิด

<u>พิสูจน์</u> สมมุติว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

ดังนั้นจากทฤษฎี 3.3 จะได้ว่า f มีลำดับอซิมโทติค

ให้ (x_n) เป็นลำดับใน R ซึ่ง

ลำดับ $(f(x_n))$ เป็นลำดับอซิมโทติค สำหรับ f

ดังนั้นลำดับ (x_n) ไม่มีลำดับย่อยคอชี

ทำให้ลำดับ (x_n) ไม่มีลำดับย่อยที่เป็นลำดับลู่เข้า

จากทฤษฎี 2.2.19 จะได้ว่า $\{x_n / n \in N\}$ เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขต

ถ้า $\{x_n / n \in N\}$ ไม่มีขอบเขตบน

(x_n) จะมีลำดับย่อย (x_{n_m}) ที่เป็นลำดับเพิ่มที่

$\lim_{m \to \infty} x_{n_m} = \infty$

ทำให้ $(f(x_{n_m}))$ เป็นลำดับย่อยของ $(f(x_n))$

แต่จาก $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ หรือ $-\infty$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

ดังนั้น $\lim_{m \to \infty} f(x_{n_m}) = \infty$ หรือ $-\infty$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

แต่ $(f(x_n))$ เป็นลำดับอซิมโทติค

ดังนั้น จะมี $y \in R$ ซึ่ง $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y$

และ $y \neq f(x_n)$ สำหรับทุก $n \in N$

ทำให้ได้ว่าทุกลำดับย่อยของ $(f(x_n))$ จะลู่เข้าสู่ y ด้วย

ดังนั้น $\lim_{m \to \infty} f(x_{n_m}) = y$ เกิดข้อขัดแย้ง

กรณีที่ $\{x_n / n \in N\}$ ไม่มีขอบเขตล่างก็พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

พิสูจน์ โดยใช้เงื่อนไข $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ หรือ $-\infty$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

จึงสรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันปิด □

<u>ตัวอย่าง 3.5</u> จะแสดงว่าบทกลับของบทแทรก 3.4 ไม่จริงเสมอไป

นั่นคือ มีฟังก์ชันต่อเนื่องจาก R ไปยัง R ที่เป็นฟังก์ชันปิด

แต่ $\lim_{x \to \infty} f(x) \neq \pm \infty$ หรือ $\lim_{x \to -\infty} f(x) \neq \pm \infty$

ให้ $f : R \to R$ โดยที่

$f(x) = k \quad , k \in R$

จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันปิด

ให้ $A \subset R$ โดยที่ A เป็นเซตปิด

จะได้ว่า $f(A) = \{k\}$ หรือ ϕ ซึ่งเป็นเซตปิดใน R

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันปิด

แต่ $\lim_{x \to \infty} f(x) = k \neq \pm\infty$

และ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = k \neq \pm\infty$

<u>บทแทรก 3.6</u> ฟังก์ชันโพลิโนเมียล และฟังก์ชันลอการิทึม เป็นฟังก์ชันปิด แต่ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล ไม่เป็นฟังก์ชันปิด ฟังก์ชันตรรกยะที่ไม่เป็นฟังก์ชันคงที่ซึ่ง

$$f(x) = \frac{a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0}$$

เป็นฟังก์ชันปิด ก็ต่อเมื่อ $m > n$

<u>พิสูจน์</u> 1. จะแสดงว่าฟังก์ชันโพลิโนเมียลเป็นฟังก์ชันปิด

ให้ $f : R \to R$ โดยที่

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

m เป็นจำนวนเต็มบวก และ

$a_0, a_1, \dots, a_m \in R$ และ $a_m \neq 0$

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_o$$

$$= x(a_m x^{m-1} + a_{m-1}x^{m-2} + \dots + a_2 x + a_1) + a_o$$

$$= x(x(a_m x^{m-2} + a_{m-1}x^{m-3} + \dots + a_3 x + a_2) + a_1) + a_o$$

$$= x(x(x(\dots x(a_m x + a_{m-1}) + a_{m-2}) + \dots) + a_o$$

ถ้า $a_m > 0$ จะได้ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

และ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \text{เมื่อ } m \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ -\infty & \text{เมื่อ } m \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

ถ้า $a_m < 0$ และ m เป็นจำนวนคู่

จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ และ

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

ถ้า $a_m < 0$ และ m เป็นจำนวนคี่

จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ และ

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ หรือ $-\infty$
อย่างใดอย่างหนึ่ง

และ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ หรือ $-\infty$
อย่างใดอย่างหนึ่ง

จากบทแทรก 3.4 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันปิด

2. จะแสดงว่าฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชันปิด

ให้ $f : R^+ \dashrightarrow R$ โดยที่

$$f(x) = \log_a x \quad \text{เมื่อ} \quad a > 0 , a \neq 1$$

กรณี 1 ถ้า $a > 1$

จะเห็นว่าแต่ละ $M > 0$

$\log_a x \geq M + 1 > M$ เมื่อ $x \geq a^{M+1}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

กรณี 2 ถ้า $0 < a < 1$

พิสูจน์ทำนองเดียวกันจะได้ว่า $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

สมมุติว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

ดังนั้น f มีลำดับอซิมโทติคให้เป็น $(f(x_n))$

นั่นคือ (x_n) เป็นลำดับใน R ที่ไม่มีลำดับย่อยคอชี และมี

$y \in R$ ซึ่ง $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = y$

และ $f(x_n) \neq y$ สำหรับทุก $n \in N$

ดังนั้นลำดับ (x_n) ไม่มีลำดับย่อยที่ลู่เข้า

จะได้ว่า $\{x_n / n \in N\}$ เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขต

เพราะว่าโดเมนของ f เป็น R^+

ดังนั้น $\{x_n / n \in N\}$ เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขตบน

(x_n) จะมีลำดับย่อย (x_{n_m}) ที่เป็นลำดับเพิ่ม

จะได้ว่า $\lim_{m \to \infty} x_{n_m} = \infty$

แต่ $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ หรือ $-\infty$

อย่างใดอย่างหนึ่ง

ดังนั้น $\lim_{m \to \infty} f(x_{n_m}) = \infty$ หรือ $-\infty$

อย่างใดอย่างหนึ่ง

แต่ $(f(x_{n_m}))$ เป็นลำดับย่อยของ $(f(x_n))$

ดังนั้น $\lim_{m \to \infty} f(x_{n_m}) = y \in R$ เกิดข้อขัดแย้ง

จึงได้ว่า f เป็นฟังก์ชันปิด

3. จะแสดงว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชันปิด

3.1 จะแสดงว่าฟังก์ชันไซน์ (sine) และฟังก์ชันโคไซน์ (cosine) ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

ให้ (x_n) เป็นลำดับใน R โดยที่

$$x_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$$

จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 2n\pi + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

$= \infty$

ดังนั้น (x_n) ไม่มีลำดับย่อยที่เป็นลำดับลู่เข้า

ทำให้ (x_n) ไม่มีลำดับย่อยคอชี

ถ้า $f : R \to R$ เป็นฟังก์ชันโดยที่

$f(x) = \sin x$

จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(2n\pi + \frac{1}{n})$

$= \lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{n}$

$= 0$

แต่ $f(x_n) = \sin(2n\pi + \frac{1}{n}) = \sin \frac{1}{n} \neq 0$

สำหรับทุก $n \in N$

จะได้ว่า $(f(x_n))$ เป็นลำดับอซิมโทติคสำหรับ f

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

ถ้า $f(x) = \cos x$

$$f(x_n) = \cos\left(2n\pi + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \cos\frac{1}{n} \neq 1 \quad \text{สำหรับทุก } n \in N$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim \cos\left(2n\pi + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \cos\frac{1}{n}$$

$$= 1$$

จะได้ว่า $(f(x_n))$ เป็นลำดับอซิมโทติค สำหรับ f

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

จึงสรุปได้ว่า ฟังก์ชันไซน์ และฟังก์ชันโคไซน์ ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

3.2 จะแสดงว่าฟังก์ชันแทนเจนต์ (tangent) ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

ให้ $f : R \to R$ โดยที่

$$f(x) = \tan x$$

ให้ $A = \{n\pi + \frac{1}{n} \mid n \in N\}$

จะได้ว่า A เป็นเซตปิดใน R

และ $f(A) = \{\tan(n\pi + \frac{1}{n}) \mid n \in N\}$

$$= \{\tan\frac{1}{n} \mid n \in N\}$$

จาก $\lim_{n\to\infty} \tan \frac{1}{n} = 0$

ดังนั้น 0 เป็นจุดลิมิตของ $f(A)$

แต่ $\tan \frac{1}{n} \neq 0$ สำหรับทุก $n \in N$

ดังนั้น $0 \notin f(A)$

จะได้ว่า $f(A)$ ไม่เป็นเซตปิด

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

นั่นคือ ฟังก์ชันแทนเจนต์ ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

3.3 จะแสดงว่าฟังก์ชันโคเซแคนต์ (cosecant) ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

ให้ $f : R \longrightarrow R$ โดยที่

$$f(x) = \text{cosec } x$$

ให้ $A = \{2n\pi + (\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}) / n \in N\}$ เป็นเซตปิดใน R

$$f(A) = \{\text{cosec } (2n\pi + (\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n})) / n \in N\}$$

$$= \{\text{cosec } (\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}) / n \in N\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \text{cosec } (\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}) = 1$$

ดังนั้น 1 เป็นจุดลิมิตของ $f(A)$

แต่ $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right) \neq 1$ สำหรับทุก $n \in N$

ดังนั้น $1 \notin f(A)$

จะได้ว่า $f(A)$ ไม่เป็นเซตปิด

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

นั่นคือ ฟังก์ชันโคเซแคนต์ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

3.4 จะแสดงว่าฟังก์ชันเซแคนต์ (secant) ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

ให้ $f : R \dashrightarrow R$ โดยที่

$$f(x) = \sec x$$

ให้ $A = \{2n\pi + \frac{1}{n} / n \in N\}$ เป็นเซตปิดใน R

$$f(A) = \{\sec (2n\pi + \frac{1}{n}) / n \in N\}$$

$$= \{\sec \frac{1}{n} / n \in N\}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sec \frac{1}{n} = 1$$

ดังนั้น 1 เป็นจุดลิมิตของ $f(A)$

แต่ $\sec(2n\pi + \frac{1}{n}) \neq 1$ สำหรับทุก $n \in N$

ดังนั้น $1 \notin f(A)$

จะได้ว่า $f(A)$ ไม่เป็นเซตปิด

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

นั่นคือฟังก์ชันเซแคนต์ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

3.5 จะแสดงว่าฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (cotangent) ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

ให้ $f : R \dashrightarrow R$ โดยที่

$$f(x) = \cot x$$

ให้ $A = \{n\pi + (\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}) / n \in N\}$ เป็นเซตปิดใน R

$$f(A) = \{\cot(n\pi + (\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n})) / n \in N\}$$

$$= \{\cot(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}) / n \in N\}$$

$$\lim_{n \to \infty} \cot(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}) = 0$$

จะได้ว่า 0 เป็นจุดลิมิตของ $f(A)$

แต่ $\cot(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}) \neq 0$ สำหรับทุก $n \in N$

ดังนั้น $0 \notin f(A)$

จะได้ว่า f(A)ไม่เป็นเซตปิด

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

จะได้ว่า ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

4. จะแสดงว่าฟังก์ชันเอกซโปเนนเชียล ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

ให้ $f : R \longrightarrow R$ โดยที่

$$f(x) = a^x \quad \text{เมื่อ} \quad a > 0 , a \neq 1$$

<u>กรณี 1</u> ถ้า $0 < a < 1$

ให้ (x_n) เป็นลำดับใน R โดยที่

$$x_n = n$$

ดังนั้น (x_n) ไม่มีลำดับย่อยที่เป็นลำดับลู่เข้า

จึงได้ว่า (x_n) ไม่มีลำดับย่อยคอชี

และ $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} a^n = 0$

$f(x_n) = a^n \neq 0$ สำหรับทุก $n \in N$

ดังนั้น $(f(x_n))$ เป็นลำดับอซิมโทติค สำหรับ f

กรณี 2 ถ้า $a > 1$

ให้ (x_n) เป็นลำดับใน R โดยที่

$$x_n = -n$$

ดังนั้น (x_n) ไม่มีลำดับย่อยที่เป็นลำดับลู่เข้า

จึงได้ว่า (x_n) ไม่มีลำดับย่อยคอชี

และ $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} a^{-n} = 0$

$$f(x_n) = a^{-n} \neq 0 \quad \text{สำหรับทุก} \quad n \in N$$

ดังนั้น $(f(x_n))$ เป็นลำดับอซิมโทติคสำหรับ f

จะได้ว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

5. จะแสดงว่า $f(x) = \dfrac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0}$

เมื่อ $a_m, b_n \neq 0$

เป็นฟังก์ชันปิด ก็ต่อเมื่อ $m > n$

$(\Longleftarrow)$

ให้ $m > n$, m , n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0}$$

จะเขียนได้เป็น $f(x) = \dfrac{a_m x^{m-n} + a_{m-1}x^{m-1-n} + \dots + a_o x^{-n}}{b_n + b_{n-1}x^{-1} + \dots + b_o x^{-n}}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_m x^{m-n} + \dots + a_n}{b_n}$

จะเห็นว่า $\dfrac{a_m x^{m-n} + \dots + a_n}{b_n}$ เป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียล

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \text{เมื่อ } \dfrac{a_m}{b_n} > 0 \\ -\infty & \text{เมื่อ } \dfrac{a_m}{b_n} < 0 \end{cases}$

และ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \text{เมื่อ } \dfrac{a_m}{b_n} > 0 \text{ , } m-n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ & \text{หรือ } \dfrac{a_m}{b_n} < 0 \text{ , } m-n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ -\infty & \text{เมื่อ } \dfrac{a_m}{b_n} > 0 \text{ , } m-n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ & \text{หรือ } \dfrac{a_m}{b_n} < 0 \text{ , } m-n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$

จากบทแทรก 3.4 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันปิด

($\Longrightarrow$) ให้ f เป็นฟังก์ชันปิด

จะพิสูจน์ว่า $m > n$

ถ้า $m \le n$

จะได้ว่า

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } m < n \\ \dfrac{a_m}{b_n} & \text{ถ้า } m = n \end{cases}$$

พิจารณาสมการ

$$\frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_o}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_o} = k$$

เมื่อ k เป็นค่าคงที่ใด ๆ

เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการโพลิโนเมียลได้เป็น

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_o - kb_n x^n - kb_{n-1} x^{n-1} - \dots - kb_o = 0 \quad \text{-----------------------(1)}$$

จากทฤษฎี 2.1.10 จะได้ว่า (1) มีรากที่แตกต่างกันได้ไม่เกิน n ราก

ดังนั้น ถ้าให้ $k = 0$ หรือ $\dfrac{a_m}{b_n}$

และให้ $M = \max\{x \in R \;/\; x$ เป็นรากของสมการ $f(x) = k\}$

จะได้ว่า $f(x) \neq k$ สำหรับทุก $x > M$

ดังนั้น $k \notin \{f(x) \;/\; x \geq M + 1\}$

แต่ $[M + 1 , \infty)$ เป็นเซตปิด และ $\lim_{x \to \infty} f(x) = k$

จึงได้ว่า k เป็นจุดลิมิตของเซต $\{f(x) / x \geq M + 1\}$

ดังนั้น $f([M+1, \infty))$ ไม่เป็นเซตปิด

จึงได้ว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด ถ้า $m \leq n$

ดังนั้น $m > n$ $\square$

<u>ตัวอย่าง 3.7</u> จะแสดงว่า $f(x) = \dfrac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_o}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_o}$

f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด เมื่อ $m = n$

ให้ $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$$

ให้ (x_k) เป็นลำดับใน R โดยที่

$$x_k = k \quad , k \in N$$

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \infty$$

(x_k) เป็นลำดับที่ไม่มีลำดับย่อยคอชี

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = 1$$

แต่ $f(x_k) \neq 1$ สำหรับทุก $k \in N$

ดังนั้น $(f(x_k))$ เป็นลำดับอซิมโทติค สำหรับ f

ทำให้ f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

<u>ตัวอย่าง 3.8</u> จะแสดงว่า

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{n-1} x^{m-1} + \cdots + a_o}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_o}$$

f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด ถ้า $m < n$

ให้ $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

ให้ (x_k) เป็นลำดับใน R โดยที่

$$x_k = k \quad , \quad k \in N$$

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \infty$$

(x_k) เป็นลำดับที่ไม่มีลำดับย่อยคอชี

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = 0$$

แต่ $f(x_k) \neq 0$ สำหรับทุก $k \in N$

ดังนั้น $(f(x_k))$ เป็นลำดับอซิมโทติค สำหรับ f

ทำให้ f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด