บทที่ 4

การวางนัยทั่วไปของฟังก์ชันต่อเนื่องปิดบนปริภูมิเมตริก

ในบทนี้เป็นการขยายโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยยังคงทำให้ผลสรุปของทฤษฎี 3.3 เป็นจริง และหาเงื่อนไขอื่นที่ทำให้ฟังก์ชันต่อเนื่องจาก R ไปยัง R เป็นฟังก์ชันปิด เมื่อลิมิตที่อนันต์ของฟังก์ชันดังกล่าวมีจริง นอกจากนี้ยังพิสูจน์ได้ว่า ฟังก์ชันต่อเนื่องจาก R ไปยัง R เมื่อลิมิตของฟังก์ชันที่อนันต์หาค่าไม่ได้และไม่เท่ากับ $\pm\infty$ แล้ว ฟังก์ชันดังกล่าวไม่เป็นฟังก์ชันปิด

4.1 การวางนัยทั่วไปของฟังก์ชันต่อเนื่องปิดบนปริภูมิเมตริก

เนื่องจากจะขยายโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อเนื่องในทฤษฎี 3.3 จึงนิยามลำดับอซิมโทติคดังต่อไปนี้

นิยาม 4.1.1 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก (Y, J) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยีที่ทุกลำดับลู่เข้ามีจุดลิมิตเพียงจุดเดียว และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก X ไปยัง Y ให้ (x_n) เป็นลำดับใน X จะเรียก $(f(x_n))$ ว่าเป็นลำดับอซิมโทติคบน (Y, J) (asymptotic sequence on (Y, J)) สำหรับ f ถ้า (x_n) เป็นลำดับที่ไม่มีลำดับย่อยคอชี

และ มี $y \in Y$ ซึ่ง $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y$

แต่ $y \neq f(x_n)$ สำหรับทุก $n \in N$

<u>ตัวอย่าง 4.1.2</u> ให้ (R, d) เป็นปริภูมิเมตริก โดยที่ d เป็นดีสครีตเมตริก

ให้ $J = \{\emptyset\} \cup \{A \subset R \,/\, 0 \notin A$ หรือ $R - A$ เป็นเซตจำกัด$\}$

จะได้ว่า (R, J) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

จะแสดงว่า (R, J) เป็นปริภูมิ T_2

ให้ $x, y \in R$ ซึ่ง $x \neq y$

สมมุติ $y \neq 0$ ดังนั้น $\{y\} \in J$

และ $R - (R - \{y\}) = \{y\}$ เป็นเซตจำกัด

ดังนั้น $R - \{y\} \in J$ ซึ่ง $x \in R - \{y\}$

จะได้ว่า $\{y\} \cap (R - \{y\}) = \emptyset$

ดังนั้น (R, J) เป็นปริภูมิ T_2

จะได้ว่าทุกลำดับที่ลู่เข้าใน (R, J) มีจุดลิมิตเพียงจุดเดียว

ให้ $f : (R, d) \longrightarrow (R, J)$ โดยที่

$f(x) = x$

จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ให้ $x_n = n$

จะได้ว่า (x_n) เป็นลำดับใน (R, d)

และ (x_n) เป็นลำดับที่ไม่มีลำดับย่อยที่ลู่เข้า

ดังนั้น (x_n) เป็นลำดับที่ไม่มีลำดับย่อยคอชี

จาก $f(x) = x$

ดังนั้น $f(x_n) = f(n) = n$

เนื่องจาก แต่ละ $W \in \mathcal{N}(0)$ จะได้ว่า W เป็นเซตไม่จำกัด

ดังนั้น $(f(x_n)) \longrightarrow 0$

และ $f(x_n) \neq 0$ สำหรับทุก $n \in N$

จะได้ว่า $(f(x_n))$ เป็นลำดับอซิมโทติค สำหรับ f บน (R, J)

<u>ทฤษฎี 4.1.3</u> ให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก (Y, J) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยีที่ทุกลำดับที่ลู่เข้ามีจุดลิมิตจุดเดียว และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก X ไปยัง Y จะได้ว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันปิด แล้ว f ไม่มีลำดับอซิมโทติคบน (Y, J)

<u>พิสูจน์</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันปิด

สมมุติ f มีลำดับอซิมโทติคบน (Y, J)

มี (x_n) เป็นลำดับใน X ที่ไม่มีลำดับย่อยคอชี

และมี $y \in Y$ ซึ่ง $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = y$

แต่ $f(x_n) \neq y$ สำหรับทุก $n \in N$

จะได้ว่า (x_n) ไม่มีลำดับย่อยที่ลู่เข้า

ดังนั้น $\{x_n / n \in N\}$ เป็นเซตที่ไม่มีจุดลิมิต

จะได้ว่า $\{x_n / n \in N\}$ เป็นเซตปิด

ทำให้ $\{f(x_n) / n \in N\}$ เป็นเซตปิด

แต่ y เป็นจุดลิมิตของเซต $\{f(x_n) / n \in N\}$

และ $y \notin \{f(x_n) / n \in N\}$

จึงขัดแย้งกับที่ $\{f(x_n) / n \in N\}$ เป็นเซตปิด

จึงได้ว่า f ไม่มีลำดับอซิมโทติคบน (Y, J) □

<u>ทฤษฎี 4.1.4</u> ให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกที่คอมพลีท (Y, J) เป็นปริภูมิเฟิร์สเคานท์เบิลที่ทุกลำดับลู่เข้า มีจุดลิมิตเพียงจุดเดียว และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก X ไปยัง Y จะได้ว่า ถ้า f ไม่มีลำดับอซิมโทติค บน (Y, J) แล้ว f เป็นฟังก์ชันปิด

<u>พิสูจน์</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีลำดับอซิมโทติคบน (Y, J)

สมมุติว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

จะมีเซต $S \subset X$ ซึ่งเป็นเซตปิดใน X แต่ $f(S)$ ไม่เป็นเซตปิดใน Y

ดังนั้นมี y เป็นจุดลิมิตของ $f(S)$ และ $y \notin f(S)$

เพราะว่า (Y, J) เป็นปริภูมิเฟิร์สเคานท์เบิล

ดังนั้นมีลำดับ $(f(x_n))$ ใน $f(S)$ ที่ลู่เข้าสู่ y

นั่นคือ $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y$ และ $y \neq f(x_n)$

สำหรับทุก $n \in N$

เนื่องจาก $(f(x_n))$ ไม่เป็นลำดับอซิมโทติคสำหรับ f

ดังนั้น (x_n) เป็นลำดับใน S ที่มีลำดับย่อยคอชี

ให้ (x_{n_m}) เป็นลำดับย่อยคอชีของลำดับ (x_n)

เนื่องจาก X เป็นคอมพลีท และ S เป็นเซตปิด

จะได้ว่า S เป็นคอมพลีท

ดังนั้นทุกลำดับคอชีใน S จะลู่เข้าสู่จุดใน S

ให้ $x \in S$ ซึ่ง $\lim_{m \to \infty} x_{n_m} = x$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ดังนั้น $\lim_{m \to \infty} f(x_{n_m}) = f(x)$

แต่ $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y$

ดังนั้น $\lim_{m \to \infty} f(x_{n_m}) = y$

แต่ ทุกลำดับใน (Y, J) มีจุดลิมิตเพียงจุดเดียว

จะได้ว่า $f(x) = y$ เกิดข้อขัดแย้ง

เพราะว่า $f(x) \in f(S)$ แต่ $y \notin f(S)$

จึงได้ว่า f เป็นฟังก์ชันปิด □

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างที่แสดงว่า (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกที่คอมพลีทเป็นเงื่อนไขที่จำเป็น สำหรับทฤษฎี 4.1.4

<u>ตัวอย่าง 4.1.5</u> ให้ $((0, 1), d_u)$ เป็นปริภูมิเมตริก โดยที่ d_u เป็นยูชวลเมตริก และ (R, J_u) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี โดยที่ J_u เป็นยูชวลโทโพโลยี

ให้ $f : ((0, 1), d_u) \longrightarrow (R, J_u)$

โดยที่ $f(x) = \frac{1}{2^x}$

จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

จากตัวอย่าง 2.2.26 จะได้ว่า $((0, 1), d_u)$ ไม่เป็นคอมพลีท และจากตัวอย่าง 2.2.30 จะได้ว่า $(0, 1)$ เป็นโททอลลี่บาวด์ จากทฤษฎี 2.2.31

ดังนั้นทุกลำดับใน $(0, 1)$ จะมีลำดับย่อยคอชี

จะได้ว่า f ไม่มีลำดับอซิมโทติค

จะแสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

ให้ $A = (0, 1)$ ดังนั้น A เป็นเซตปิดใน $(0, 1)$

แต่ $f(A) = (\frac{1}{2}, 1)$ ไม่เป็นเซตปิดใน R

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างที่แสดงว่า (Y, J) เป็นปริภูมิเฟิร์สเคานท์เบิล
เป็นเงื่อนไขที่จำเป็น สำหรับทฤษฎี 4.1.4

ตัวอย่าง 4.1.6 ให้ (R, d) เป็นปริภูมิเมตริกที่ d เป็นดีสครีตเมตริก

และ (Y, J) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี ที่

$Y = R$, $J = \{\emptyset\} \cup \{A \subset R \,/\, R - A$ เป็นเซตนับได้ $\}$

จะแสดงว่า (R, J) ไม่เป็นปริภูมิเฟิร์สเคานท์เบิล

สมมุติ (R, J) เป็นปริภูมิเฟิร์สเคานท์เบิล

จาก $0 \in R$ ดังนั้นมีเนเบอร์ฮูดเบส $\mathcal{B}(0)$ ของ 0 ที่
เป็นเซตนับได้

ให้ $\mathcal{B}(0) = \{B_n \,/\, n \in N\}$

มี $G_n \in J$ ซึ่ง $0 \in G_n \subset B_n$ สำหรับทุก $n \in N$

ให้ $F_n = R - G_n$

ดังนั้น F_n เป็นเซตนับได้ สำหรับทุก $n \in N$

ให้ $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$

จะได้ว่า A เป็นเซตนับได้ แต่ R เป็นเซตนับไม่ได้

ดังนั้น มี $p \in R$ ที่ $p \notin A$ และ $p \neq 0$

นั่นคือ $p \in R - A$

แต่ $p \in R - A = R - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} (R - F_n)$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

ดังนั้น $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$

เนื่องจาก $R - (R - \{p\}) = \{p\}$

ดังนั้น $R - \{p\}$ เป็นเซตเปิด และ $0 \in R - \{p\}$

มี $B_k \in \mathcal{B}(0)$ ซึ่ง $0 \in B_k \subset R - \{p\}$

นั่นคือ $p \notin B_k$ เกิดข้อขัดแย้ง

เพราะว่า $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$

จึงได้ว่า (R, J) ไม่เป็นปริภูมิเฟิร์สเคาน์ทเบิล

จะแสดงว่า ทุกลำดับที่ลู่เข้าใน (R, J) มีจุดลิมิตเพียงจุดเดียว

ให้ (x_n) เป็นลำดับที่ลู่เข้าใน (R, J)

สมมุติ $x_n \to x$ และ $x_n \to y$ และ $x \neq y$

ให้ $G = R - \{y\}$

จะได้ว่า $G \in J$ และ $x \in G$

จาก $x_n \dashrightarrow x$

ดังนั้น มี $n_1 \in N$ ซึ่ง $x_n \in G$

สำหรับทุก $n \geqslant n_1$

ให้ $V = R - \{x_n / n \in N$ และ $n \geq n_1\}$

จะได้ว่า $V \in J$ และ $y \in V$

จาก $x_n \dashrightarrow y$

ดังนั้น มี $n_2 \in N$ ซึ่ง $x_n \in V$ สำหรับทุก $n \geq n_2$

ให้ $n_o = \max\{n_1, n_2\}$

จะได้ว่า $x_n \in V$ สำหรับทุก $n \geq n_o$ เกิดข้อขัดแย้ง

จึงได้ว่า ลำดับที่ลู่เข้าใน (R, J) มีจุดลิมิตจุดเดียว

จากตัวอย่าง 2.2.25 ได้ว่า (R, d) เป็นคอมพลีท

ให้ $f : (R, d) \dashrightarrow (R, J)$ โดยที่

$f(x) = x$

เพราะว่า d เป็นดีสครีทเมตริก จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

จะแสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

ให้ $A = [0, 1]$ เป็นเซตปิดใน (R, d)

แต่ $f(A) = [0, 1]$ เป็นเซตนับไม่ได้

ดังนั้น $f(A)$ ไม่เป็นเซตปิด

จะได้ว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

จะแสดงว่า f ไม่มีลำดับอซิมโทติค

พิจารณา (x_n) ที่เป็นลำดับใน (R, d)

ถ้า (x_n) เป็นลำดับที่มีลำดับย่อยที่ลู่เข้า

ดังนั้น (x_n) เป็นลำดับที่มีลำดับย่อยคอชี

จะได้ว่า $(f(x_n))$ ไม่เป็นลำดับอซิมโทติค

ถ้า (x_n) เป็นลำดับที่ไม่มีลำดับย่อยที่ลู่เข้า

เพราะว่า $f(x_n) = x_n$

จะเห็นว่า $\{f(x_n) / n \in N\}$ เป็นเซตนับได้

ให้ $A = \{f(x_n) / n \in N\}$

สมมุติว่า $f(x_n) \dashrightarrow x_o$ สำหรับบาง $x_o \in R$

ให้ $G = R - (A - \{x_o\})$

จะได้ว่า $R - G = R - (R - (A - \{x_o\}))$

$= A - \{x_o\}$ เป็นเซตนับได้

ดังนั้น $G \in J$ และ $x_o \in G$

และ $f(x_n) \notin G$ สำหรับทุก $n \in N$

ดังนั้น $f(x_n) \not\longrightarrow x_o$

จะได้ว่า $(f(x_n))$ ไม่ลู่เข้าสู่ x สำหรับทุก $x \in R$

ดังนั้น $(f(x_n))$ ไม่เป็นลำดับอซิมโทติค

จึงสรุปได้ว่า f ไม่มีลำดับอซิมโทติค

<u>บทแทรก 4.1.7</u> ให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกที่คอมพลีท, (Y, J) เป็นปริภูมิเฟิร์สเคาน์ทเบิลที่ทุกลำดับที่ลู่เข้ามีจุดลิมิตเพียงจุดเดียว และ $f : (X, d) \longrightarrow (Y, J)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันปิด ก็ต่อเมื่อ

f ไม่มีลำดับอซิมโทติคบน (Y, J)

<u>พิสูจน์</u> จากทฤษฎี 4.1.3 และ 4.1.4 □

4.2 เงื่อนไขอื่นที่ทำให้ฟังก์ชันต่อเนื่องจาก R ไปยัง R เป็นฟังก์ชันปิด เมื่อลิมิตของฟังก์ชันดังกล่าวที่อนันต์มีจริง

<u>ทฤษฎี 4.2.1</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก R ไปยัง R

และ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) \in R$

จะได้ว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันปิดแล้ว $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) \in R_f$

<u>พิสูจน์</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันปิด

สมมุติว่า $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \notin R_f$

แต่ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \in R$

ให้ $y \in R$ ซึ่ง $y = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

ให้ $x_n = n \quad , \; n \in N$

จะได้ว่า (x_n) เป็นลำดับใน R

เพราะว่า $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$

ดังนั้น (x_n) ไม่มีลำดับย่อยที่ลู่เข้า

จะได้ว่า (x_n) เป็นลำดับที่ไม่มีลำดับย่อยคอชี

และ $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = y$

แต่ $y \notin R_f$

ดังนั้น $f(x_n) \neq y$ สำหรับทุก $n \in N$

จะได้ว่า $(f(x_n))$ เป็นลำดับอซิมโทติค สำหรับ f

จากทฤษฎี 3.3 จะได้ว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $\lim_{x \to \infty} f(x) \in R_f$

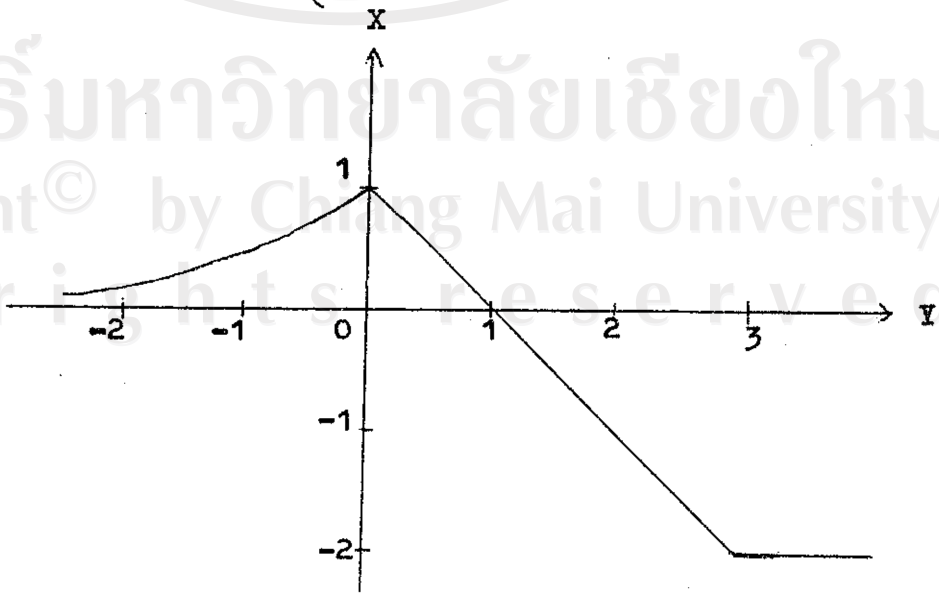
กรณีที่ $\lim_{x \to -\infty} f(x) \in R_f$ ก็พิสูจน์ทำนองเดียวกัน

จึงสรุปได้ว่าทฤษฎีเป็นจริง □

ต่อไปนี้จะเป็นตัวอย่างที่แสดงว่าบทกลับของทฤษฎี 4.2.1 ไม่จริง

<u>ตัวอย่าง 4.2.2</u> ให้ $f : R \to R$ โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & , x \leq 0 \\ 1 - x & , 0 < x < 3 \\ -2 & , x \geq 3 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -2 \in R_f$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \in R_f$$

จะแสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

ให้ $A = (-\infty, 0]$ เป็นเซตปิดใน R

แต่ $f(A) = (0, 1]$ ไม่เป็นเซตปิดใน R

<u>ทฤษฎี 4.2.3</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก R ไปยัง R และมี $y \in R$ ซึ่ง $\lim_{x \to \infty} f(x) = y$ จะได้ว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันปิด แล้ว จะมี $k \in R$ ที่ทำให้ $f(x) = y$ สำหรับทุก $x \in [k, \infty)$

<u>พิสูจน์</u> สมมุติว่า สำหรับทุก $k \in R$ มี $x \in [k, \infty)$ ที่ทำให้ $f(x) \neq y$

จาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $\lim_{x \to \infty} f(x) = y$

ให้ $x_1 \in R$ ซึ่ง $0 < |f(x_1) - y| < 1$

เลือก $x_2 \in [x_1+1, \infty)$

ซึ่ง $0 < |f(x_2) - y| < \frac{1}{2}$

เลือก $x_3 \in [x_2+1, \infty)$

ซึ่ง $0 < |f(x_3) - y| < \frac{1}{3}$

เลือก $x_n \in [x_{n-1}+1, \infty)$

ซึ่ง $0 < |f(x_n) - y| < \frac{1}{n}$

จะแสดงว่า $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y$

ให้ $M > 0$ จะมี $n_o \in N$ ซึ่งทำให้ $\frac{1}{n_o} < M$

จะได้ว่า $|f(x_n) - y| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_o} < M$

สำหรับทุก $n \geq n_o$

นั่นคือ $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y$

แต่ $f(x_n) \neq y$

และ (x_n) เป็นลำดับที่ไม่มีลำดับย่อยคอชี

จะได้ว่า $(f(x_n))$ เป็นลำดับอซิมโทติคสำหรับ f

ทำให้ f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

ดังนั้น จะต้องมี $k \in R$ ที่ทำให้ $f(x) = y$

สำหรับทุก $x \in [k, \infty)$ $\square$

<u>ทฤษฎี 4.2.4</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก R ไปยัง R

มี $y \in R$ ซึ่ง $\lim_{x \to -\infty} f(x) = y$

จะได้ว่าถ้า f เป็นฟังก์ชันปิดแล้ว จะมี $k \in R$

ที่ทำให้ $f(x) = y$ สำหรับทุก $x \in (-\infty, k]$

<u>พิสูจน์</u> พิสูจน์ทำนองเดียวกับทฤษฎี 4.2.3 □

<u>ทฤษฎี 4.2.5</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก R ไปยัง R

มี $y_1, y_2 \in R$ ซึ่ง $\lim_{x \to \infty} f(x) = y_1$,

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_2$

จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันปิด ก็ต่อเมื่อมี $k \in R^+$

ซึ่งทำให้ $f(x) = y_1$ สำหรับทุก $x \in [k, \infty)$

และ $f(x) = y_2$ สำหรับทุก $x \in (-\infty, -k]$

<u>พิสูจน์</u> ($\Longrightarrow$)

ให้ f เป็นฟังก์ชันปิด

จากทฤษฎี 4.2.3 จะได้ว่า

มี $k_1 \in R$ ซึ่งทำให้ $f(x) = y_1$ สำหรับทุก

$x \in [k_1, \infty)$

จากทฤษฎี 4.2.4 จะได้ว่า

มี $k_2 \in R$ ซึ่งทำให้ $f(x) = y_2$ สำหรับทุก

$x \in (-\infty, k_2]$

ให้ $k \in R$ ซึ่ง $k = \max\{|k_1|, |k_2|\}$

ดังนั้น $f(x) = y_1$ สำหรับทุก $x \in [k, \infty)$

และ $f(x) = y_2$ สำหรับทุก $x \in (-\infty, -k]$

$(\Longleftarrow)$

ให้ $k \in R^+$ และ $f(x) = y_1$ สำหรับทุก

$x \in [k, \infty)$ และ $f(x) = y_2$ สำหรับทุก

$x \in (-\infty, -k]$

จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันปิด

สมมุติ f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

จากทฤษฎี 3.3 จะได้ว่า f มีลำดับอซิมโทติค

ให้ (x_n) เป็นลำดับใน R ซึ่งไม่มีลำดับย่อยคอชี

และ $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y \in R$

ซึ่ง $f(x_n) \neq y$ สำหรับทุก $n \in N$

จะได้ว่า (x_n) ไม่มีลำดับย่อยที่ลู่เข้า

ดังนั้น $\{x_n / n \in N\}$ เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขต

ถ้า $\{x_n / n \in N\}$ เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขตบน

(x_n) จะมีลำดับย่อย (x_{n_m}) ที่เป็นลำดับเพิ่ม

และ $\lim_{m \to \infty} x_{n_m} = \infty$

จาก $(f(x_{n_m}))$ เป็นลำดับย่อยของ $(f(x_n))$

ดังนั้น $\lim_{m \to \infty} f(x_{n_m}) = y$

แต่ $\lim_{x \to \infty} f(x) = y_1$

จะได้ว่า $\lim_{m \to \infty} f(x_{n_m}) = y_1$

ดังนั้น $y = y_1$

และ $f(x) = y_1$ สำหรับทุก $x \in [k, \infty)$

จะได้ว่า $f(x) = y$ สำหรับทุก $x \in [k, \infty)$

ดังนั้น $f(x_n) = y$ สำหรับทุก

$x_n \in [k, \infty)$ เกิดข้อขัดแย้ง

กรณีที่ $\{x_n / n \in N\}$ เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขตล่าง

ก็พิสูจน์ทำนองเดียวกัน โดยใช้เงื่อนไข $\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_2$

จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันปิด □

<u>บทแทรก 4.2.6</u> ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก R ไปยัง R

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ หรือ $-\infty$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

และ มี $y, k \in R$ ที่ทำให้ $f(x) = y$

สำหรับทุก $x \in (-\infty, k]$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันปิด

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ หรือ $-\infty$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

และมี $y, k \in R$ ที่ทำให้ $f(x) = y$ สำหรับทุก

$x \in (-\infty, k]$

สมมุติว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

ดังนั้น f มีลำดับอซิมโทติค

ให้ (x_n) เป็นลำดับใน R ที่ไม่มีลำดับย่อยคอซี

และ $y_1 \in R$ ซึ่ง $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y_1$

แต่ $y_1 \neq f(x_n)$ สำหรับทุก $n \in N$

จะได้ว่า (x_n) ไม่มีลำดับย่อยที่ลู่เข้า

ดังนั้น $\{x_n / n \in N\}$ เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขต

ถ้า $\{x_n / n \in N\}$ เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขตบน

(x_n) จะมีลำดับย่อย (x_{n_m}) ที่เป็นลำดับเพิ่ม

และ $\lim_{m \to \infty} x_{n_m} = \infty$

แต่จาก $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ หรือ $-\infty$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

ดังนั้น $\lim_{m \to \infty} f(x_{n_m}) = \infty$ หรือ $-\infty$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

แต่ $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y_1$

ดังนั้น $\lim_{m \to \infty} f(x_{n_m}) = y_1$ เกิดข้อขัดแย้ง

ถ้า $\{x_n / n \in N\}$ เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขตล่าง

(x_n) จะมีลำดับย่อย (x_{n_m}) ที่เป็นลำดับลด

และ $\lim_{m \to \infty} x_{n_m} = -\infty$

จาก $\lim_{m \to \infty} f(x_{n_m}) = y_1$

แต่ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = y$

ดังนั้น $\lim_{m \to \infty} f(x_{n_m}) = y$

จะได้ว่า $y = y_1$

และจาก $f(x) = y$ สำหรับทุก $x \in (-\infty, k]$

ดังนั้น $f(x) = y_1$ สำหรับทุก $x \in (-\infty, k]$

จะได้ว่า $f(x_n) = y_1$ สำหรับทุก $x_n \in (-\infty, k]$

เกิดข้อขัดแย้ง

จึงสรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันปิด □

<u>บทแทรก 4.2.7</u> ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก R ไปยัง R

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ หรือ $-\infty$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

และมี $y, k \in R$ ที่ทำให้ $f(x) = y$

สำหรับทุก $x \in [k, \infty)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันปิด

<u>พิสูจน์</u> พิสูจน์ทำนองเดียวกับบทแทรก 4.2.6 □

<u>ทฤษฎีนำ</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก R ไปยัง R
ถ้าลิมิตของ f ที่บวกอนันต์หาค่าไม่ได้ และไม่เท่ากับ $\pm \infty$
แล้ว $f_{|[k, \infty)}$ ไม่เป็นฟังก์ชันคงที่ สำหรับทุก $k \in R$
และถ้าลิมิตของ f ที่ลบอนันต์หาค่าไม่ได้ และไม่เท่ากับ $\pm \infty$
แล้ว $f_{|(-\infty, k]}$ ไม่เป็นฟังก์ชันคงที่ สำหรับทุก $k \in R$

<u>พิสูจน์</u> ให้ลิมิตของ f ที่บวกอนันต์หาค่าไม่ได้ และไม่เท่ากับ $\pm \infty$
สมมุติว่ามี $k_o \in R$ ซึ่งทำให้ $f_{|[k_o, \infty)}$ เป็นฟังก์ชันคงที่
นั่นคือมี $y \in R$ ซึ่งทำให้ $f(x) = y$ สำหรับทุก
$x \in [k_o, \infty)$

ดังนั้น $\lim_{x \to \infty} f(x) = y$ เกิดข้อขัดแย้ง

จะได้ว่า สำหรับทุก $k \in R$ $f_{|[k, \infty)}$ ไม่เป็นฟังก์ชันคงที่

พิสูจน์ทำนองเดียวกัน จะได้ว่า ถ้าลิมิตของ f ที่ลบอนันต์ หาค่าไม่ได้
และไม่เท่ากับ $\pm \infty$ แล้ว $f_{|(-\infty, k]}$
ไม่เป็นฟังก์ชันคงที่สำหรับทุก $k \in R$ □

<u>ทฤษฎี 4.2.8</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก R ไปยัง R
ถ้าลิมิตของ f ที่บวกอนันต์หาค่าไม่ได้ และไม่เท่ากับ $\pm \infty$
หรือลิมิตของ f ที่ลบอนันต์หาค่าไม่ได้ และไม่เท่ากับ $\pm \infty$
แล้ว f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

<u>พิสูจน์</u> ให้ลิมิตของ f ที่บวกอนันต์ หาค่าไม่ได้ และไม่เท่ากับ $\pm\infty$

จะแสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

<u>กรณี 1</u> f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต

นั่นคือ มีจำนวนจริง M ซึ่งทำให้

$|f(x)| \leq M$ สำหรับทุก $x \in R$

ให้ $x_1 = 1$

จากทฤษฎีนำ จะได้ว่า $f_{|[k, \infty)}$ ไม่เป็นฟังก์ชันคงที่

สำหรับทุก $k \in R$

ทำให้สามารถเลือก $x_2 \geq x_1 + 1$ ที่ทำให้ $f(x_2) \neq f(x_1)$

และเลือก $x_3 \geq x_2 + 1$ ที่ทำให้ $f(x_3) \neq f(x_2)$

และ $f(x_3) \neq f(x_1)$

และเลือก $x_n \geq x_{n-1} + 1$ ที่ทำให้ $f(x_n) \neq f(x_k)$

สำหรับทุก $k = 1, 2, \ldots, n-1$

จะได้ว่า $(f(x_n))$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

ดังนั้น $(f(x_n))$ มีลำดับย่อย $(f(x_{n_m}))$ ที่เป็น

ลำดับลู่เข้า

ให้ $f(x_{n_m}) \longrightarrow a$, $a \in R$

เพราะว่า $f(x_n) \neq f(x_k)$ สำหรับทุก $n \neq k$

ดังนั้น $f(x_{n_m}) \neq f(x_{n_i})$ สำหรับทุก $i \neq m$

จะมี $n_o \in N$ ที่ทำให้ $f(x_{n_m}) \neq a$

สำหรับทุก $m \geq n_o$

ดังนั้น $a \notin \{f(x_{n_i}) / i \geq n_o\}$

จะได้ว่า $\{f(x_{n_i}) / i \geq n_o\}$ ไม่เป็นเซตปิด

พิจารณา $\{x_{n_i} / i \geq n_o\}$

จะเห็นว่า (x_{n_i}) เป็นลำดับเพิ่ม และไม่มีขอบเขต

ดังนั้น $x_{n_i} \longrightarrow \infty$

ทำให้ทุกลำดับย่อยของ (x_{n_i}) ไดเวอร์จเข้าสู่ ∞

จะได้ว่า (x_{n_i}) เป็นลำดับที่ไม่มีลำดับย่อยที่ลู่เข้า

ดังนั้น $\{x_{n_i} / i \geq n_o\}$ เป็นเซตที่ไม่มีจุดลิมิต

จะได้ว่า $\{x_{n_i} / i \geq n_o\}$ เป็นเซตปิด

จึงได้ว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

<u>กรณี 2</u> f เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขต

สมมุติ ทุก $a \in R$ มี $k_a \in N$ ซึ่ง $f(x) \neq a$

สำหรับทุก $x \in [k_a, \infty)$

<u>กรณี 1</u> ถ้าทุก $a \in R$ มี $k_a \in N$ ซึ่ง $f(x) > a$

สำหรับทุก $x \in [k_a, \infty)$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ เกิดข้อขัดแย้ง

<u>กรณี 2</u> ถ้าทุก $a \in R$ มี $k_a \in N$ ซึ่ง $f(x) < a$

สำหรับทุก $x \in [k_a, \infty)$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ เกิดข้อขัดแย้ง

<u>กรณี 3</u> มี $a, b \in R$ และมี $k \in N$ ที่ $f(x) < a$

และ $f(x) > b$ สำหรับทุก $x \in [k, \infty)$

จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้นจะมี $a \in R$ สำหรับทุก $k \in N$ จะมี $x \in [k, \infty)$ ที่ทำให้ $f(x) = a$

ให้ $k_1 = 1$ จะมี $x_1 \in [1, \infty)$ ซึ่ง $f(x_1) = a$

จาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $f|_{[k, \infty)}$ ไม่เป็นฟังก์ชันคงที่

สำหรับทุก $k \in R$

ทำให้สามารถเลือก $y_1 > x_1$ ที่ $0 < |f(y_1) - a| < 1$

ให้ $k_2 > y_1$ จะมี $x_2 \in [k_2, \infty)$

ซึ่ง $f(x_2) = a$ สามารถเลือก $y_2 > x_2$

ที่ $0 < |f(y_2) - a| < \frac{1}{2}$

ให้ $k_3 > y_2$ จะมี $x_3 \in [k_3, \infty)$

ซึ่ง $f(x_3) = a$ สามารถเลือก $y_3 > x_3$

ที่ $0 < |f(y_3) - a| < \frac{1}{3}$

ให้ $k_n > y_{n-1}$ จะมี $x_n \in [k_n, \infty)$

ซึ่ง $f(x_n) = a$ สามารถเลือก $y_n > x_n$

ที่ $0 < |f(y_n) - a| < \frac{1}{n}$

จะได้ว่า $\lim_{n \to \infty} f(y_n) = a$

และ $f(y_n) \neq a$ สำหรับทุก $n \in N$

และ $\lim_{n \to \infty} y_n = \infty$

จะได้ว่า (y_n) เป็นลำดับที่ไม่มีลำดับย่อยที่ลู่เข้า

ดังนั้น (y_n) เป็นลำดับที่ไม่มีลำดับย่อยคอชี

จะได้ว่า $(f(y_n))$ เป็นลำดับอซิมโทติคสำหรับ f

จึงสรุปได้ว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันปิด

กรณีที่ลิมิตของ f ที่ลบอนันต์หาค่าไม่ได้ และไม่เท่ากับ $\pm \infty$

ก็สามารถพิสูจน์ทำนองเดียวกัน □

จากทฤษฎี 4.2.5 , บทแทรก 4.2.6, บทแทรก 4.2.7 และทฤษฎี 4.2.8 ทำให้สรุปเป็นบทแทรกดังนี้

<u>บทแทรก 4.2.10</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก R ไปยัง R

จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันปิด ก็ต่อเมื่อ f สอดคล้องกับข้อความดังต่อไปนี้เพียงข้อความเดียว

1. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ หรือ $-\infty$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

   และ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ หรือ $-\infty$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

2. มี $k \in R^+$, $y_1, y_2 \in R$ ซึ่งทำให้ $f(x) = y_1$

   สำหรับทุก $x \in [k, \infty)$ และ $f(x) = y_2$

   สำหรับทุก $x \in (-\infty, -k]$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ หรือ $-\infty$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

   และมี $k, y \in R$ ซึ่งทำให้ $f(x) = y$

สำหรับทุก $x \in (-\infty, k]$

4. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ หรือ $-\infty$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

และมี $k, y \in R$ ซึ่งทำให้ $f(x) = y$

สำหรับทุก $x \in [k, \infty)$ $\square$