บทที่ 3

การหาคำตอบของสมการเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ $A, B, C \in M_n(Z)$ ที่สอดคล้องกับสมการ $A^k + B^k = C^k$

จุดประสงค์ของบทนี้ต้องการแสดงว่ามีคำตอบของสมการเมตริกซ์ $A^k + B^k = C^k$ เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ขนาด nxn เมื่อกำหนดเงื่อนไขดังนี้

1) $n = k$ โดยที่ n, k เป็นจำนวนเต็มบวก

2) k เป็นจำนวนคี่บวก และ $n \geq k$ หรือ n เป็นจำนวนคู่บวก

ซึ่งจะกล่าวโดยละเอียดต่อไป

__นิยาม 3.1.1__ ให้ $\pi \in S_n$, $P(\pi)$ จะเป็น__เมตริกซ์ของการจัดลำดับ__ (Permutation matrix) ขนาด nxn เมื่อ $P(\pi)_{i,j} = s_{\pi(i),j}$ โดยที่

$$s_{\pi(i),j} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } \pi(i) = j \\ 0 & \text{ถ้า } \pi(i) \neq j \end{cases}$$

__หมายเหตุ__ $P(\pi)_{i,j}$ หมายถึง สมาชิกของเมตริกซ์ $P(\pi)$ ในตำแหน่งแถวที่ i และหลักที่ j

ตัวอย่างที่ 3.1.1 ให้ $X = \{1,2,3\}$ และ $\pi \in S_3$ โดยที่ $\pi = (123)$

พิจารณา

$$P(\pi) = \begin{bmatrix} P(\pi)_{1,1} & P(\pi)_{1,2} & P(\pi)_{1,3} \\ P(\pi)_{2,1} & P(\pi)_{2,2} & P(\pi)_{2,3} \\ P(\pi)_{3,1} & P(\pi)_{3,2} & P(\pi)_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_{\pi(1),1} & s_{\pi(1),2} & s_{\pi(1),3} \\ s_{\pi(2),1} & s_{\pi(2),2} & s_{\pi(2),3} \\ s_{\pi(3),1} & s_{\pi(3),2} & s_{\pi(3),3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_{2,1} & s_{2,2} & s_{2,3} \\ s_{3,1} & s_{3,2} & s_{3,3} \\ s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>นิยาม 3.1.1</u> ให้ $(G_1, \circ), (G_2, *)$ เป็นกรุป และ $f : G_1 \dashrightarrow G_2$ จะเรียก f ว่าเป็น<u>ฟังก์ชันแอนทิโฮโมมอร์ฟิซึม</u> (Anti-homomorphism function) จาก G_1 ไปยัง G_2 ถ้า f มีคุณสมบัติ

$$f(x \cdot y) = f(y) * f(x) \quad , x, y \in G_1$$

<u>ทฤษฎี 3.1.1</u> ถ้า f เป็นฟังก์ชันแอนทิโฮโมมอร์ฟิซึมจาก G_1 ไป G_2 แล้ว จะได้ว่า $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$ สำหรับ $x \in G_1$

<u>พิสูจน์</u> ให้ G_1, G_2 เป็นกรุปและ $f : G_1 \dashrightarrow G_2$

เพราะว่า $(f(x))^{-1}$ เป็นอินเวอร์สของ $f(x)$, $\forall x \in G_1$

ดังนั้น $f(x)(f(x))^{-1} = e_2$ (e_2 เป็นสมาชิกเอกลักษณ์บน G_2) (1)

และเพราะว่า f เป็นฟังก์ชันแอนทิโฮโมมอร์ฟิซึม

ดังนั้น $f(x)(f(x^{-1})) = f(x^{-1}x)$, $\forall x \in G_1$

$= f(e_1)$ (e_1 เป็นสมาชิกเอกลักษณ์บน G_1)

$= e_2$ (2)

จาก (2) จะได้ว่า $f(x^{-1})$ เป็นอินเวอร์สของ $f(x)$

ดังนั้น โดยทฤษฎี 2.1.1 จะได้ว่า

$$(f(x))^{-1} = f(x^{-1})$$

□

<u>ตัวอย่าง 3.1.2</u> ให้ $S = \{1,2,\ldots,n\}$ และกำหนด

$P : (S_n, \circ) \longrightarrow (\{A \in M_n(R) \,/\, \exists A^{-1} \in M_n(R)$

ซึ่ง $A.A^{-1} = I = A^{-1}.A\}$, .) โดยที่

$P(\pi)_{i,j} = s_{\pi(i),j}$, $\pi \in S_n$ และ

$$s_{\pi(i),j} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \pi(i) = j, \\ 0 & \text{เมื่อ } \pi(i) \neq j, \end{cases} \quad \forall i,j = 1,2,\ldots,n$$

จะได้ว่า p เป็นฟังก์ชันแอนทิโฮโมมอร์ฟิซึม

<u>หมายเหตุ</u> (S_n, $\circ$) คือกรุปภายใต้การดำเนินทวิภาคการคอมโพสิท (composite)

$(\{A \in M_n(R) / A^{-1} \in M_n(R)$ ซึ่ง $A.A^{-1} = I = A^{-1}.A\}, .)$
คือกรุปภายใต้การดำเนินทวิภาคการคูณเมตริกซ์

<u>พิสูจน์</u> <u>1. จะแสดงว่า P เป็นฟังก์ชัน</u>

ให้ $\pi, \beta \in S_n$ และ $\pi = \beta$

พิจารณา $P(\pi)_{i,j}$, $\forall i,j = 1,2,\ldots,n$

จะเห็นว่า

$$P(\pi)_{i,j} = s_{\pi(i),j} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \pi(i) = j \\ 0 & \text{เมื่อ } \pi(i) \neq j \end{cases}$$

เนื่องจาก $\pi(i) = \beta(i)$, $\forall i = 1,\ldots,n$ ดังนั้น

$$P(\pi)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \beta(i) = j \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad \beta(i) \neq j \end{cases}$$

$$= s_{\beta(i),j}$$

$$= P(\beta)_{i,j}$$

นั่นคือ $P(\pi) = P(\beta)$

<u>2. จะแสดงว่า P เป็นฟังก์ชันแอนทิโฮโมมอร์ฟิซึม</u>

ให้ $\pi, \beta \in S_n$

<u>จะแสดงว่า $P(\pi) \cdot P(\beta) = P(\beta \circ \pi)$</u>

จาก $$(P(\pi) \cdot P(\beta))_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} P(\pi)_{i,k} P(\beta)_{k,j}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} s_{\pi(i),k}\, s_{\beta(k),j}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \pi(i) = k' \text{ และ } \beta(k') = j, \ \exists k' \in \{1,2,\ldots,n\} \\ 0 & \text{กรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

แต่ $\pi(i) = k'$ และ $\beta(k') = j$ คือ $\beta(\pi(i)) = \beta\circ\pi(i) = j$

ดังนั้น $$(P(\pi) \cdot P(\beta))_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \beta\circ\pi(i) = j \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad \beta\circ\pi(i) \neq j \end{cases}$$

$$= s_{\beta\circ\pi(i),j} = P(\beta\circ\pi)_{i,j}$$

แสดงว่า $P(\pi).P(\beta) = P(\beta o \pi)$

นั่นคือ P เป็นฟังก์ชันแอนทิโฮโมมอร์ฟิซึม

<u>หมายเหตุ</u> จากทฤษฎี 3.1.1 และตัวอย่าง 3.1.2 จะได้ $(P(\pi))^{-1} = P(\pi^{-1})$

<u>ทฤษฎี 3.1.2</u> ให้ $\pi \in S_n$, $P : (S_n, o) \longrightarrow (\{A \in M_n(R) / \exists A^{-1} \in M_n(R)$ ซึ่ง $A.A^{-1} = I = A^{-1}.A\}, .)$ และถ้า $[a]$ เป็นเมตริกซ์แยงโดยที่ $[a] = \text{diag} <a_1, \ldots, a_n>$, $a_i \in Z$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$ แล้ว

$$P(\pi).[a].(P(\pi))^{-1} = [ao\pi]$$

<u>ข้อตกลง</u> $[ao\pi]$ หมายถึง เมตริกซ์แยงที่

$$[ao\pi] = \text{diag} < a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, \ldots, a_{\pi(n)} >$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $P(\pi) = [P(\pi)_{i,j}]_{nxn} = [s_{\pi(i),j}]_{nxn}$

$[a] = [a_{ij}]_{nxn}$, $a_{ij} = 0$, เมื่อ $i \neq j$ และ

$$(P(\pi))^{-1} = P(\pi^{-1}) = \left[P(\pi^{-1})_{i,j}\right]_{nxn} = \left[s_{\pi^{-1}(i),j}\right]_{nxn}$$

ดังนั้น

$$P(\pi).[a].(P(\pi))^{-1} = \left[\sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} s_{\pi(i),k} a_{kh} s_{\pi^{-1}(h),j}\right]_{nxn}$$

เพราะว่า [a] เป็นเมตริกซ์แยง เพราะฉะนั้น

$$a_{kh} = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad k \neq h$$

และเพราะว่า $s_{\pi(i),k} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \pi(i) = k \\ 0 & \text{เมื่อ } \pi(i) \neq k \end{cases}$

เพราะฉะนั้น $\displaystyle\sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} s_{\pi(i),k}\, a_{kh}\, s_{\pi^{-1}(h),j}$

$$= \begin{cases} a_{k'k'} & \text{เมื่อ} \quad \pi(i) = k' \text{ และ } \pi^{-1}(k') = j \\ 0 & \text{กรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

แต่ $\pi^{-1}(k') = j$ และ $\pi(i) = k'$

คือ $\pi^{-1}(\pi(i)) = (\pi^{-1} o \pi)(i) = j$

เพราะว่า $(\pi^{-1} o \pi)(i) = i$ ดังนั้น $i = j$

ทำให้ได้ว่า $\displaystyle\sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} s_{\pi(i),k}\, a_{kh}\, s_{\pi^{-1}(h),j}$

$$= \begin{cases} a_{k'}a_{k'} = a_{k'} & \text{เมื่อ } i = j \\ 0 & \text{เมื่อ } i \neq j \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a_{\pi(i)} & \text{เมื่อ } i = j \\ 0 & \text{เมื่อ } i \neq j \end{cases}$$

ดังนั้น $P(\pi).[a].(P(\pi))^{-1} = \text{diag} < a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(n)} >$

นั่นคือ $P(\pi).[a].(P(\pi))^{-1} = [a \circ \pi]$

□

<u>ข้อตกลง</u> ให้ A, B เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn

จะเขียนแทน $A \cdot B$ ด้วย AB

<u>ตัวอย่าง 3.1.3</u> กำหนดให้ $[a] = \text{diag} < a_1, a_2, a_3, a_4 >$

โดยที่ $a_1 = 6$, $a_2 = 7$, $a_3 = 8$, $a_4 = 9$

และ $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$

โดยทฤษฎี 3.1.2 จะได้ว่า

1. $P(\pi)[a](P(\pi))^{-1} = [a \circ \pi]$

$= \text{diag} < a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, a_{\pi(3)}, a_{\pi(4)} >$

$= \text{diag} < a_4, a_1, a_2, a_3 >$

$P(\pi)[a](P(\pi))^{-1} = \text{diag} < 9, 6, 7, 8 >$

2. $P(\pi^2)[a](P(\pi^2))^{-1} = [a \circ \pi^2]$

$= \text{diag} < a_{\pi^2(1)}, a_{\pi^2(2)}, a_{\pi^2(3)}, a_{\pi^2(4)} >$

เนื่องจาก $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

ดังนั้น $\pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ทำให้ได้ว่า

$$P(\pi^2)[a](P(\pi^2))^{-1} = \text{diag} < a_3, a_4, a_1, a_2 >$$

$$= \text{diag} < 8, 9, 6, 7 >$$

3. $P(\pi^3)[a](P(\pi^3))^{-1} = [a \circ \pi^3]$

$$= \text{diag} < a_{\pi^3(1)}, a_{\pi^3(2)}, a_{\pi^3(3)}, a_{\pi^3(4)} >$$

$$= \text{diag} < a_{\pi^2(\pi(1))}, a_{\pi^2(\pi(2))}, a_{\pi^2(\pi(3))}, a_{\pi^2(\pi(4))} >$$

$$= \text{diag} < a_{\pi^2(4)}, a_{\pi^2(1)}, a_{\pi^2(2)}, a_{\pi^2(3)} >$$

$$= \text{diag} < a_{\pi(\pi(4))}, a_{\pi(\pi(1))}, a_{\pi(\pi(2))}, a_{\pi(\pi(3))} >$$

$$= \text{diag} < a_{\pi(3)}, a_{\pi(4)}, a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)} >$$

$$= \text{diag} < a_2, a_3, a_4, a_1 >$$

$$P(\pi^3)[a](P(\pi))^{-1} = \text{diag} < 7, 8, 9, 6 >$$

<u>ทฤษฎี 3.1.3</u> ให้ $M_n(Z)$ เป็นเซตของเมตริกซ์จำนวนเต็มขนาด nxn จะได้ว่ามีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ $A, B, C \varepsilon M_n(Z)$ ที่ $A^n + B^n = C^n$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $P : S_n \longrightarrow \{A \varepsilon M_n(R) \;/\; \exists A^{-1} \varepsilon M_n(R)$ ซึ่ง $AA^{-1} = I = A^{-1}A\}$

โดยที่ $P(\pi)_{i,j} = s_{\pi(i),j} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \pi(i) = j \\ 0 & \text{เมื่อ } \pi(i) \neq j \end{cases}$

จากตัวอย่าง 3.1.2 จะได้ว่า P เป็นฟังก์ชันแอนทิโฮโมมอร์ฟิซึม

กำหนดให้ [a] เป็นเมตริกซ์ทแยงโดยที่

$[a] = \text{diag} \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle, a_i \neq 0, a_i \varepsilon Z, \forall i = 1, 2, \ldots, n$

ให้ $\pi \varepsilon S_n$ จากทฤษฎี 3.1.2 จะได้ว่า

$P(\pi)[a](P(\pi))^{-1} = [a o \pi]$

เลือก π ที่เป็น ไซเคิล ความยาว n

พิจารณา $([a]P(\pi))^n$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
([a]P(\pi))^n &= [a]P(\pi)[a]P(\pi)\ldots[a]P(\pi) \\
&= [a]P(\pi)[a]((P(\pi))^{-1}P(\pi))P(\pi) \\
&\quad [a]((P(\pi))^{-1}P(\pi))P(\pi)\ldots P(\pi) \\
&\quad [a]((P(\pi))^{-1}P(\pi))P(\pi) \\
&= [a](P(\pi)[a](P(\pi))^{-1})((P(\pi))^2 \\
&\quad [a](P(\pi))^{-1})(P(\pi))^2\ldots \\
&\quad ((P(\pi))^2[a](P(\pi))^{-1})(P(\pi))^2 \\
&= [a][a\circ\pi]((P(\pi))^2[a](P(\pi))^{-1})((P(\pi))^{-1} \\
&\quad P(\pi))(P(\pi))^2\ldots((P(\pi))^2[a](P(\pi))^{-1} \\
&\quad ((P(\pi))^{-1}P(\pi))(P(\pi))^2 \\
&= [a][a\circ\pi]((P(\pi))^2[a](P(\pi))^{-2}) \\
&\quad (P(\pi))^3\ldots((P(\pi))^3[a](P(\pi))^{-2}) \\
&\quad (P(\pi))^3 \\
&= [a][a\circ\pi](P(\pi^2)[a](P(\pi^2))^{-1}) \\
&\quad (P(\pi))^3\ldots((P(\pi))^3[a](P(\pi))^{-2})(P(\pi))^3 \\
&= [a][a\circ\pi][a\circ\pi^2]\,(P(\pi))^3\ldots \\
&\quad (P(\pi))^3[a]((P(\pi))^{-2})(P(\pi))^3 \\
&\quad \vdots \\
&= [a][a\circ\pi][a\circ\pi^2]\ldots \\
&\quad ((P(\pi))^{n-1}[a](P(\pi))^{-n+1})(P(\pi))^n \\
&= [a][a\circ\pi][a\circ\pi^2]\ldots[a\circ\pi^{n-1}]P(\pi^n) \\
&= [a][a\circ\pi][a\circ\pi^2]\ldots[a\circ\pi^{n-1}]
\end{aligned}
$$

จะเห็นว่า $[a], [a\circ\pi], \ldots, [a\circ\pi^{n-1}]$

เป็นเมตริกซ์ทแยง ดังนั้นโดยทฤษฎี 2.2.6 จะได้ว่า

$[a][a\circ\pi]\ldots[a\circ\pi^{n-1}]$ เป็นเมตริกซ์ทแยงและมี

สมาชิกในแนวทแยงอยู่ในรูป $a_i \cdot a_{\pi(i)} \cdot \ldots \cdot a_{\pi^{n-1}(i)}$,

$\forall i = 1,2,\ldots,n$

แต่เนื่องจาก π เป็นไซเคิลความยาว n

โดยนิยาม 2.1.10 จะได้ว่า

$$\{a_i, a_{\pi(i)}, \ldots, a_{\pi^{n-1}(i)}\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \forall i = 1,2,\ldots,n$$

นั่นคือ $a_i \cdot a_{\pi(i)} \cdot \ldots \cdot a_{\pi^{n-1}(i)} = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$,

$\forall i = 1,2,\ldots,n$

เพราะฉะนั้น $[a][a\circ\pi]\ldots[a\circ\pi^{n-1}]$

$$= \begin{bmatrix} a_1a_2\ldots a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1a_2\ldots a_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1a_2\ldots a_n \end{bmatrix}$$

ให้ $\alpha,\beta,\mu \in Z$ โดยที่ $\alpha,\beta,\mu \neq 0$ และ $\alpha+\beta = \mu$

และให้ $[a] = \text{diag} < \alpha, 1, 1, \ldots, 1 >$, $A = [a]P(\pi)$

$[b] = \text{diag} < \beta, 1, 1, \ldots, 1 >$, $B = [b]P(\pi)$

$[c] = \text{diag} < \mu, 1, 1, \ldots, 1 >$, $C = [c]P(\pi)$

โดยที่ π เป็นไซเคิลความยาวเท่ากับ n จะได้ว่า $A,B,C \in M_n(Z)$

และ $A^n = ([a]P(\pi))^n$

$$= \begin{bmatrix} a_1a_2\cdots a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1a_2\cdots a_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1a_2\cdots a_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{bmatrix}$$

ในทำนองเดียวกัน $B^n = ([b]P(\pi))^n = \begin{bmatrix} \beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta \end{bmatrix}$

และ $C^n = ([c]P(\pi))^n = \begin{bmatrix} \mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu \end{bmatrix}$

พิจารณา $A^n + B^n$ จะได้ว่า

$$A^n + B^n = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha+\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \alpha+\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu \end{bmatrix}$$

$$= C^n$$

และเนื่องจาก $[a]P(\pi), [b]P(\pi)$ และ $[c]P(\pi)$ เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ จะได้ว่ามีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ $A, B, C \in M_n(Z)$ ที่ $A^n + B^n = C^n$ □

ตัวอย่าง 3.1.3 ให้ $\pi \in S_5$ โดยที่ $\pi = (31245)$

$[a] = \text{diag} < 3,1,1,1,1 >$

$[b] = \text{diag} < 4,1,1,1,1 >$

$[c] = \text{diag} < 7,1,1,1,1 >$

และให้ $A = [a]P(\pi)$, $B = [b]P(\pi)$, $C = [c]P(\pi)$

จะได้ว่า

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

และในทำนองเดียวกัน

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $A^5 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B^5 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

และ $C^5 = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $A^5 + B^5 = C^5$

<u>นิยาม 3.1.3</u> ให้ $A_1, A_2, \ldots, A_s$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $m_1 x m_1$, $m_2 x m_2, \ldots, m_s x m_s$ ตามลำดับ แล้ว A เป็น <u>ไดเรคซัม</u>ของ A_i (direct sum of A_i) $i = 1,2,\ldots,s$ ก็ต่อเมื่อ A เป็นเมตริกซ์พาร์ติชันที่มีเมตริกซ์ย่อยเป็น A_{ij} โดยที่

$$A_{ij} = \begin{cases} A_i & \text{เมื่อ } i = j \\ 0 & \text{เมื่อ } i \neq j \end{cases} \quad \forall i,j = 1,2,\ldots,s$$

และ A มีขนาด $\sum_{i=1}^{s} m_i \times \sum_{i=1}^{s} m_i$

ใช้สัญลักษณ์แทนไดเรคซัมของ $A_i, \forall i = 1,2,\ldots,s$

ด้วย $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_s$

นั่นคือ

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่าง 3.1.4</u> ให้ $A_1 = [2]$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 8 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

<u>นิยาม 3.1.4</u> ให้ A_o เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ แล้ว A จะเป็น<u>ไดเรคซัม</u> m ชุดของ A_o (direct sum of m copies of A_o)

ก็ต่อเมื่อ A เป็นไดเรคซัมของ A_i, โดยที่

$A_i = A_o$, $\forall i = 1,2,\ldots, m$

<u>ทฤษฎี 3.1.4</u> ให้ R เป็นริงที่มีเอกลักษณ์ และ $M_n(Z)$ เป็นริงของเมตริกซ์จัตุรัสขนาด nxn ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนเต็ม โดยที่ n เป็นจำนวนคู่บวก แล้วจะมีเมตริกซ์อินโวลูทอรี $A, B, C \in M_n(Z)$ ซึ่ง $A + B = C$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $A_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B_o = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

พิจารณาจะเห็นว่า $A_o^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

$$B_o^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$C_o^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

นั่นคือ A_o, B_o, C_o เป็นเมตริกซ์อินโวลูทอรี โดยที่ $A_o, B_o, C_o \in M_2(Z)$

พิจารณา $A_o + B_o$ จะได้ว่า

$$A_o + B_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = C_o$$

ให้ $n = 2m$, $m \in Z^+$ และ A, B, C เป็นไดเรคซัม m ชุดของ A_o, B_o, C_o ตามลำดับ จะได้ว่า

$$A = \begin{bmatrix} A_o & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_o & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_o \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_o & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_o & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_o \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_o & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_o & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_o \end{bmatrix}$$

พิจารณาจะเห็นว่า

$$A^2 = \begin{bmatrix} A_o & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_o & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_o & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_o & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_o^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_o^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_o^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_2 \end{bmatrix} = I_n$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $B^2 = I_n$ และ $C^2 = I_n$

เพราะฉะนั้นแสดงว่า A, B, C เป็นเมตริกซ์อินโวลูทอรี

โดยที่ $A, B, C \in M_n(Z)$

พิจารณา A + B จะเห็นว่า

$$A+B = \begin{bmatrix} A_o & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_o & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_o & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_o & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_o \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_o+B_o & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_o+B_o & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_o+B_o \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_o & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_o & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_o \end{bmatrix} = C$$

เพราะฉะนั้นแสดงว่ามีเมตริกซ์อินโวลูทอรี $A, B, C \in M_n(Z)$ ซึ่ง $A + B = C$ □

<u>ทฤษฎี 3.1.5</u> ให้ k เป็นจำนวนคี่บวก และ n เป็นจำนวนคู่บวกหรือ $n \geq k$ จะได้ว่า จะมีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ขนาด nxn ที่ $A^k+B^k = C^k$ โดยที่ $A, B, C \in M_n(Z)$

<u>พิสูจน์</u> (1) ให้ k เป็นจำนวนคี่บวก และ n เป็นจำนวนคู่บวก โดยทฤษฎี 3.1.4 จะได้ว่ามีเมตริกซ์อินโวลูทอรี

$A, B, C \in M_n(Z)$ ซึ่ง $A + B = C$

แต่เนื่องจากเมตริกซ์อินโวลูทอรีเป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ ดังนั้น A, B, C เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

เนื่องจาก k เป็นจำนวนคี่บวก และ A, B, C เป็นเมตริกซ์อินโวลูทอรี จะได้ว่า $A^k = A, B^k = B, C^k = C$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่ามีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ $A, B, C \in M_n(Z)$ ซึ่ง $A^k + B^k = C^k$

(2) ให้ k เป็นจำนวนคี่บวก และ $n \geq k$, n เป็นจำนวนเต็มบวก จะแสดงเพียง $n \geq k$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวกเท่านั้น เพราะว่า n เป็นจำนวนคู่บวกได้แสดงให้เห็นจริงใน (1) แล้ว

<u>พิจารณาเมื่อ $n = k$</u>

โดยทฤษฎี 3.1.3 จะได้ว่ามี $A, B, C \in M_n(Z)$ ที่ $A^k + B^k = C^k$ เมื่อ A, B, C เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

<u>พิจารณาเมื่อ $n > k$</u>

ดังนั้น $n = k + m$ เมื่อ m เป็นจำนวนคู่บวก

โดยทฤษฎี 3.1.3 จะได้ว่ามีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

$A_1, B_1, C_1 \in M_k(Z)$ ซึ่ง $A_1^k + B_1^k = C_1^k$

และโดยข้อ (1) จะได้ว่ามีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

$A_2, B_2, C_2 \in M_m(Z)$ ซึ่ง $A_2^k + B_2^k = C_2^k$

เมื่อ m เป็นจำนวนคู่บวก

ให้ $A = A_1 \oplus A_2$, $B = B_1 \oplus B_2$, $C = C_1 \oplus C_2$

ดังนั้น

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}_{n\times n} B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}_{n\times n} C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

เพราะว่า A_1 และ A_2 เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์จะได้ว่า

A_1 และ A_2 มีอินเวอร์สของการคูณเมตริกซ์ ดังนั้น

ให้ A_1^{-1} , A_2^{-1} เป็นอินเวอร์สการคูณของ A_1 และ A_2

ตามลำดับ

พิจารณา
$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2A_2^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1^{-1}A_1 & 0 \\ 0 & A_2^{-1}A_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{m-} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

แสดงว่า A มีอินเวอร์สภายใต้การคูณ นั่นคือ A เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ และในทำนองเดียวกันจะได้ว่า B, C เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

พิจารณา $$A^k = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} A_1^k & 0 \\ 0 & A_2^k \end{bmatrix}$$

$$B^k = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} B_1^k & 0 \\ 0 & B_2^k \end{bmatrix}$$

$$C^k = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} C_1^k & 0 \\ 0 & C_2^k \end{bmatrix}$$

พิจารณา

$$A^k + B^k = \begin{bmatrix} A_1^k & 0 \\ 0 & A_2^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1^k & 0 \\ 0 & B_2^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1^k + B_1^k & 0 \\ 0 & A_2^k + B_2^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1^k & 0 \\ 0 & C_2^k \end{bmatrix} = C^k$$

แสดงว่ามี เมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ $A, B, C \in M_n(Z)$

ซึ่ง $A^k + B^k = C^k$

โดยที่ $n \geq k$ และ k เป็นจำนวนคี่บวก

ดังนั้นจาก (1) และ (2) แสดงว่ามีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

$A, B, C \in M_n(Z)$ ซึ่ง $A^k + B^k = C^k$

โดยที่ k เป็นจำนวนคี่บวก และ n เป็นจำนวนคู่บวก

หรือ $n \geq k$ □

<u>ตัวอย่าง 3.1.5</u> จงหาเมตริกซ์ นอนซิงกูลาร์ A, B, C ซึ่ง

1) $A^5 + B^5 = C^5$ เมื่อ $A, B, C \in M_6(Z)$

2) $A^5 + B^5 = C^5$ เมื่อ $A, B, C \in M_7(Z)$

<u>วิธีทำ</u> 1) จากทฤษฎี 3.1.5จะได้ว่ามี $A, B, C, \in M_6(Z)$

ที่ $A^5 + B^5 = C^5$ โดยที่

$$A = A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$$

$$B = B_1 \oplus B_1 \oplus B_1$$

$$C = C_1 \oplus C_1 \oplus C_1$$

เมื่อ $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^5 + B^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^5 + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^5$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^5 = C^5$$

2) จากทฤษฎี 3.1.5 จะได้ว่ามี $A, B, C \in M_7(Z)$

ที่ $A^5 + B^5 = C^5$ โดยที่

$$A = A_1 \oplus A_2$$

$$B = B_1 \oplus B_2$$

เมื่อ $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

และ $A_2 = [a]\,P(\pi)$, $B_2 = [b]P(\pi)$,

$C_2 = [c]\,P(\pi)$

$\pi = (13254) \in S_5$

$[a] = < 3,1,1,1,1 >$

$[b] = < 4,1,1,1,1 >$

$[c] = < 7,1,1,1,1 >$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

และ $A^5+B^5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^5 + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^5$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^5 = C^5$$