บทที่ 4

เงื่อนไขในการหาคำตอบของสมการเมตริกซ์ $A, B, C \in M_n(Z)$ ที่สอดคล้องกับสมการ $A^k + B^k = C^k$

สำหรับในบทนี้จะกล่าวถึงเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์และเมตริกซ์ซิงกูลาร์ โดยแยกออกเป็น

4.1 การหาเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ขนาด nxn ที่สอดคล้องกับสมการ $A^p + B^p = C^p$ เมื่อ $p \geq 2$

โดยจะกำหนด $p \geq 2$ และสมการ $a^p + b^p = c^p$ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิต $b, c \in Q(a)$ $(Q(a) = \{x+ya/x, y \in Q\})$ เพื่อสร้างเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ $A, B, C \in M_n(Z)$ ที่สอดคล้องกับสมการ $A^p + B^p = C^p$

4.2 การหาเมตริกซ์ซิงกูลาร์ขนาด nxn ที่สอดคล้องกับสมการ $A^k + B^k = C^k$ เมื่อ $k \in Z^+$ และ $n \neq 1$

โดยจะกำหนดเซตของเมตริกซ์ซิงกูลาร์ขนาด nxn ที่มีคุณสมบัติเป็นเมตริกซ์ไอเดมโพเทนให้ เพื่อหาเมตริกซ์ $A + B = C$ แล้วจึงสรุปเป็นเมตริกซ์ $A^k + B^k = C^k$, $k \in Z^+$ จากเงื่อนไข A, B, C เป็นเมตริกซ์ไอเดมโพเทน

4.1 การหาเมตริกซ์นอเชิงภูอาร์ขนาด $n \times n$ ที่สอดคล้อง $A^p + B^p = C^p$ เมื่อ $p \geq 2$

นิยาม 4.1.1 ให้ $x, y, z \in Q$ ซึ่ง $\sqrt{z} \notin Q$ เรียก $x - y\sqrt{z}$ ว่าเป็นคาสังยุค (conjugate) ของ $x + y\sqrt{z}$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\overline{x+y\sqrt{z}}$

หมายเหตุ ให้ $x_1, x_2, y_1, y_2, z \in Q$ ซึ่ง $\sqrt{z} \notin Q$
จะได้ว่า ถ้า $x_1 + y_1\sqrt{z} = x_2 + y_2\sqrt{z}$
แล้ว $x_1 = x_2$ และ $y_1 = y_2$

ทฤษฎีนำ 4.1.1 กำหนดให้ $Q^* = \{x + y\sqrt{z} \;/\; x, y, z \in Q$ และ $\sqrt{z} \notin Q\}$
และ a เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตที่มีอันดับเท่ากับ 2
แล้วจะได้ว่า $a \in Q^*$ และ $a \neq \bar{a}$

พิสูจน์ จาก a เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตที่มีอันดับเท่ากับ 2 และ
โดยนิยาม 2.3.8 และ นิยาม 2.3.9 จะได้ว่า
a เป็นรากของโพลิโนเมียล $p(x) = x^2 + r_1x + r_2, r_1, r_2 \in Z$
โดยที่ $p(x)$ เป็นโมนิคโพลิโนเมียลที่ลดทอนไม่ได้ใน $Q[x]$

โดยทฤษฎี 2.3.1 ทำให้ได้ว่า

$$a = \frac{-r_1 + \sqrt{r_1^2 - 4r_2}}{2} = \frac{-r_1}{2} + \frac{\sqrt{r_1^2 - 4r_2}}{2}$$

$$\text{และ} \quad b = \frac{-r_1}{2} - \frac{\sqrt{r_1^2 - 4r_2}}{2}$$

<u>จะแสดงว่า $\sqrt{r_1^2-4r_2} \notin Q$</u>

สมมุติให้ $\sqrt{r_1^2-4r_2} \in Q$

ดังนั้นให้ $\frac{s}{t} = \sqrt{r_1^2-4r_2}$ โดยที่ $s,t \in Z$ และ $t \neq 0$

จะได้ว่า $a = -\frac{r_1}{2} + \frac{s}{2t} \in Q$ และ $b = -\frac{r_1}{2} - \frac{s}{2t} \in Q$

พิจารณา $p(x) = (x-a)(x-b)$

$$= \left(x+\frac{r_1}{2} - \frac{s}{2t}\right)\left(x+\frac{r_1}{2} + \frac{s}{2t}\right)$$

แสดงว่า $p(x)$ เป็นโพลิโนเมียลที่ลดทอนได้ใน $Q[x]$
เกิดข้อขัดแย้งกับที่สมมุติให้

ดังนั้น $\sqrt{r_1^2-4r_2} \notin Q$ และ $\bar{a} = b$

จาก $-\frac{r_1}{2}, \frac{1}{2}, r_1^2-4r_2 \in Q$ และ $\sqrt{r_1^2-4r_2} \notin Q$

ดังนั้นจะได้ว่า $-\frac{r_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{r_1^2-4r_2} \in Q^*$

เพราะฉะนั้น $a \in Q^*$

จาก $\sqrt{r_1^2-4r_2} \notin Q$ ทำให้ได้ว่า $\sqrt{r_1^2-4r_2} \neq 0$

ดังนั้น $\sqrt{r_1^2-4r_2} \neq -\sqrt{r_1^2-4r_2}$

นั่นคือ $-\frac{r_1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{r_1^2-4r_2} \neq -\frac{r_1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{r_1^2-4r_2}$

หรือ $a \neq \bar{a}$ □

<u>ทฤษฎีบท 4.1.2</u> กำหนดให้ $a \in Q^*$ และ $p,q,s,t \in Q$ จะได้ว่า

1. $\overline{p+qa} = p+q\bar{a}$

2. $p+qa = s+ta$ ก็ต่อเมื่อ $\overline{p+qa} = \overline{s+ta}$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $a = x+y\sqrt{z}$ โดยที่ $x,y,z \in Q$

และ $\sqrt{z} \notin Q$

ดังนั้น $p+qa = p+q(x+y\sqrt{z}) = (p+qx)+qy\sqrt{z}$

และ $s+ta = s+t(x+y\sqrt{z}) = (s+tx)+ty\sqrt{z}$

จะเห็นว่า $(p+qx),(s+tx),qy,ty,z \in Q$ และ $\sqrt{z} \notin Q$

1. โดยนิยาม 4.1.1 จะได้ว่า

$$\overline{(p+qx)+qy\sqrt{z}} = (p+qx)-qy\sqrt{z}$$
$$= p+q(x-y\sqrt{z})$$

แต่เนื่องจาก $x-y\sqrt{z}$ เป็นค่าสังยุคของ a

ดังนั้น

$$\overline{(p+qx)+qy\sqrt{z}} = p+q\bar{a}$$

นั่นคือ $\overline{p+qa} = p+q\bar{a}$

2. จาก $p+qa = s+ta$

$<==> (p+qx)+qy\sqrt{z} = (s+tx)+ty\sqrt{z}$

$<==> (p+qx)-qy\sqrt{z} = (s+tx)-ty\sqrt{z}$

$<==> p+q(x-y\sqrt{z}) = s+t(x-y\sqrt{z})$

$<==> p+q\bar{a} = s+t\bar{a}$

$<==> \overline{p+qa} = \overline{s+ta}$

□

<u>ทฤษฎีนำ 4.1.3</u> กำหนดให้ $a \in Q^*$ และ $p,q,s,t \in Q$ จะได้ว่า

1. $(\overline{p+qa}) + (\overline{s+ta}) = \overline{(p+qa) + (s+ta)}$

2. $\overline{(p+qa)}\,\overline{(s+ta)} = \overline{(p+qa)(s+ta)}$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $a = x+y\sqrt{z}$ โดยที่ $x,y,z \in Q$ และ $\sqrt{z} \notin Q$

และกำหนดให้ $p,q,s,t \in Q$

1. จาก $(\overline{p+qa}) + (\overline{s+ta}) = (p+q\bar{a}) + (s+t\bar{a})$

$= (p+s) + (q+t)\bar{a}$

เพราะว่า $(p+s),(q+t) \in Q$

และโดยทฤษฎีนำ 4.1.2 ข้อ 1 จะได้ว่า

$(p+s) + (q+t)\bar{a} = \overline{(p+s) + (q+t)a}$

$= \overline{(p+qa) + (s+ta)}$

2. จาก $\overline{(p+qa)(s+ta)}$

$$= (p+q\bar{a})(s+t\bar{a})$$

$$= ps + (qs+pt)\bar{a} + qt\bar{a}^2$$

$$= ps + (qs+pt)(x-y\sqrt{z}) + qt(x-y\sqrt{z})^2$$

$$= ps + qsx+ptx - qsy\sqrt{z} - pty\sqrt{z} + qt(x^2-2xy\sqrt{z} + y^2z)$$

$$= ps + qsx+ptx - qsy\sqrt{z} - pty\sqrt{z} + qtx^2 - 2qtxy\sqrt{z} + qty^2z$$

$$= ps + qsx+ptx + qtx^2 + qty^2z - (qs+pt + 2qtx)y\sqrt{z}$$

$$= \overline{ps + qsx+ptx + qtx^2+qty^2z} + \overline{(qs+pt + 2qtx)y\sqrt{z}}$$

$$= \overline{ps + qsx+ptx + qsy\sqrt{z} + pty\sqrt{z}} + \overline{qtx^2 + 2qtxy\sqrt{z} + qty^2z}$$

$$= \overline{ps + qsx+ptx + qsy\sqrt{z} + pty\sqrt{z}} + \overline{qt(x^2+2xy\sqrt{z} + y^2z)}$$

$$= \overline{ps + (qs+pt)(x+y\sqrt{z}) + qt(x+y\sqrt{z})^2}$$

$$= \overline{ps + (qs+pt)\ a + qta^2}$$

$$= \overline{(p+qa)(s+ta)}$$

เพราะฉะนั้น $\overline{(p+qa)}\,\overline{(s+ta)} = \overline{(p+qa)(s+ta)}$ □

<u>ทฤษฎีนำ 4.1.4</u> ให้ $p \geq 2$ ถ้า a เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตที่มีอันดับเท่ากับ 2 และ $b, c \in Q(a)$ สอดคล้องกับสมการ $a^p + b^p = c^p$ แล้วจะได้ว่า

$\bar{a}^p + \bar{b}^p = \bar{c}^p$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $b = u+va$, $\exists u, \exists v \in Q$

$c = s+ta$, $\exists s, \exists t \in Q$

และจากกำหนดให้ $a^p + b^p = c^p$

โดยทฤษฎีนำ 4.1.2 ข้อ 2 จะได้ว่า $\overline{a^p+b^p} = \overline{c^p}$

จากทฤษฎีนำ 4.1.3 ข้อ 1 จะได้ว่า $\overline{a^p + b^p} = \overline{a^p} + \overline{b^p}$

จากทฤษฎีนำ 4.1.3 ข้อ 2 จะได้ว่า

$\overline{a^p} = \bar{a}^p$, $\overline{b^p} = \bar{b}^p$, $\overline{c^p} = \bar{c}^p$

ดังนั้นจะได้ว่า $\bar{a}^p + \bar{b}^p = \bar{c}^p$

□

<u>ทฤษฎี 4.1.5</u> ให้ $p \geq 2$ ถ้า a เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตที่มีอันดับเท่ากับ 2 และ $b, c \in Q(a)$ โดยที่ $b \neq 0$, $c \neq 0$ และ b, c สอดคล้องกับสมการ $a^p + b^p = c^p$ แล้ว จะมีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ $A, B, C \in M_2(Z)$ ที่ $A^p + B^p = C^p$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $p \geq 2$, a เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตที่มีอันดับเท่ากับ 2 และ $b, c \in Q(a)$ โดยที่ $b \neq 0$ และ $c \neq 0$ และ b, c สอดคล้องกับสมการ $a^p + b^p = c^p$ และจาก $b, c \in Q(a)$ ดังนั้น

ให้ $b = u+va$, $\exists u, \exists v \in Q$ (1)

$c = s+ta$, $\exists s, \exists t \in Q$ (2)

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.1.2 ข้อ 2 และข้อ 1 จะได้ว่า

$\bar{b} = u+v\bar{a}$ (3)

$\bar{c} = s+t\bar{a}$ (4)

เนื่องจาก a เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตที่มีอันดับเท่ากับ 2 จะได้ว่ามี $p(x) = x^2+r_1x+r_2$ โดยที่ $r_1, r_2 \in Z$ เป็นโมนิคโพลิโนเมียลที่ลดทอนไม่ได้

และ $a = -\frac{r_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{r_1^2-4r_2}$ เป็นรากของ $p(x)$

โดยนิยาม 4.1.1 จะได้ว่า $\bar{a} = -\frac{r_1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{r_1^2-4r_2}$

และโดยทฤษฎี 2.3.1 จะได้ว่า $\bar{a}$ เป็นรากอีกรากหนึ่งของ $p(x)$

พิจารณาเมตริกซ์จำนวนเต็ม $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -r_2 & -r_1 \end{bmatrix}$

ให้เมตริกซ์ $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & \bar{a} \end{bmatrix}$

โดยทฤษฎีนำ 4.1.1 ทราบว่า $a \neq \bar{a}$

ดังนั้น $\bar{a}-a \neq 0$ ซึ่งทำให้ $\det S \neq 0$

โดยทฤษฎี 2.2.9 จะได้ว่า S เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

และจะได้ว่า มี S^{-1} ซึ่ง $SS^{-1} = S^{-1}S = I$

แต่เนื่องจาก $S \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & \bar{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a & \bar{a} \\ a^2 & \bar{a}^2 \end{bmatrix}$$

และ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -r_2 & -r_1 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -r_2 & -r_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & \bar{a} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a & \bar{a} \\ -r_2-r_1a & -r_2-r_1\bar{a} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & \bar{a} \\ a^2 & \bar{a}^2 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $S \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -r_2 & -r_1 \end{bmatrix} S$

ทำให้ได้ว่า $S\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a}\end{bmatrix}S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -r_2 & -r_1\end{bmatrix} S\,S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -r_2 & -r_1\end{bmatrix}$

เนื่องจาก $a \neq 0$ และ $\bar{a} \neq 0$ ดังนั้น $a\bar{a} \neq 0$

โดยทฤษฎี 2.2.9 จะได้ว่า $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a}\end{bmatrix}$

เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ ซึ่งมีผลทำให้ X เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

พิจารณาเมตริกซ์ $Y = S\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & \bar{b}\end{bmatrix}S^{-1}$

และจาก (1) และ (3) จะได้ว่า

$$S\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & \bar{b}\end{bmatrix}S^{-1} = S\begin{bmatrix} u+va & 0 \\ 0 & u+v\bar{a}\end{bmatrix}S^{-1}$$

$$= S\left(\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} va & 0 \\ 0 & v\bar{a}\end{bmatrix}\right)S^{-1}$$

$$= u\left(S\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}S^{-1}\right) + v\left(S\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a}\end{bmatrix}S^{-1}\right)$$

เพราะฉะนั้น $Y = u\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -r_2 & -r_1\end{bmatrix}$

พิจารณาเมตริกซ์ $Z = S\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & \bar{c} \end{bmatrix} S^{-1}$

พิสูจน์ทำนองเดียวกันกับ เมตริกซ์ Y จะได้ว่า

Z เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

และ $Z = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -r_2 & -r_1 \end{bmatrix}$

เพราะว่า $u, v, s, t \in Q$ ดังนั้นให้ k เป็น ค.ร.น.

ของส่วนของ u, v, s, t ทำให้ได้ว่า $ku, kv, ks, kt \in Z$

ให้ $A = kX$, $B = kY$, $C = kZ$

นั่นคือ $A = kX = k\left(S\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{bmatrix} S^{-1}\right)$

$$B = kY = k\left(S\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{bmatrix} S^{-1}\right)$$

$$C = kZ = k\left(S\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & \bar{c} \end{bmatrix} S^{-1}\right)$$

จะได้ว่า A, B, C เป็นเมตริกซ์จำนวนเต็ม

จะแสดงว่า $A^p + B^p = C^p$

พิจารณา $A^p + B^p = \left(k\left(S\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a}\end{bmatrix}S^{-1}\right)\right)^p + \left(k\left(S\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & \bar{b}\end{bmatrix}S^{-1}\right)\right)^p$

$$= k^p\left(S\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a}\end{bmatrix}S^{-1}\right)^p + k^p\left(S\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & \bar{b}\end{bmatrix}S^{-1}\right)^p \quad (5)$$

พิจารณา $\left(S\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a}\end{bmatrix}S^{-1}\right)^p$

$$= \left(S\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a}\end{bmatrix}S^{-1}\right)\left(S\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a}\end{bmatrix}S^{-1}\right)\cdots\left(S\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a}\end{bmatrix}S^{-1}\right)$$

$$= S\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a}\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a}\end{bmatrix}\right)S^{-1}$$

$$= S\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a}\end{bmatrix}^p S^{-1}$$

$$\left(S\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a}\end{bmatrix}S^{-1}\right)^p = S\begin{bmatrix} a^p & 0 \\ 0 & \bar{a}^p\end{bmatrix}S^{-1}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$\left(S\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{bmatrix}S^{-1}\right)^{p} = \left(S\begin{bmatrix} b^{p} & 0 \\ 0 & \bar{b}^{p} \end{bmatrix}S^{-1}\right)$$

ดังนั้นจาก (5) จะได้ว่า

$$A^{p} + B^{p} = k^{p}\left(\left(S\begin{bmatrix} a^{p} & 0 \\ 0 & \bar{a}^{p} \end{bmatrix}S^{-1}\right)+\left(S\begin{bmatrix} b^{p} & 0 \\ 0 & \bar{b}^{p} \end{bmatrix}S^{-1}\right)\right)$$

$$= k^{p}\left(S\begin{bmatrix} a^{p}+b^{p} & 0 \\ 0 & \bar{a}^{p}+\bar{b}^{p} \end{bmatrix}S^{-1}\right)$$

จาก $a^{p} + b^{p} = c^{p}$ และทฤษฎีบทนำ 4.1.4 จะได้ว่า

$$A^{p} + B^{p} = k^{p}\left(S\begin{bmatrix} c^{p} & 0 \\ 0 & \bar{c}^{p} \end{bmatrix}S^{-1}\right)$$

$$= k^{p}\left(S\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & \bar{c} \end{bmatrix}S^{-1}\right)^{p}$$

$$= \left(k\left(S\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & \bar{c} \end{bmatrix}S^{-1}\right)\right)^{p}$$

ดังนั้น $A^p + B^p = C^p$

เพราะฉะนั้นแสดงว่ามีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

$A, B, C \in M_2(Z)$ ที่ $A^p + B^p = C^p$

$\square$

ตัวอย่าง 4.1.1 พิจารณา $p = 2$, $(3\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 = (5\sqrt{2})^2$

โดยทฤษฎี 4.1.5 จะสามารถหาเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

$A, B, C \in M_2(Z)$ ที่สอดคล้องกับสมการ $A^2 + B^2 = C^2$

จากกำหนดให้ จะได้ว่า $a = 3\sqrt{2}$, $b = 4\sqrt{2}$, $c = 5\sqrt{2}$

และ $\bar{a} = -3\sqrt{2}$, $\bar{b} = -4\sqrt{2}$, $\bar{c} = -5\sqrt{2}$

ซึ่ง a เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตของ $x^2 - 18$

เพราะว่า $b = 4\sqrt{2} = 0 + \frac{4}{3}(3\sqrt{2})$

ดังนั้น $u = \frac{0}{1}$, $v = \frac{4}{3}$

และ $c = 5\sqrt{2} = 0 + \frac{5}{3}(3\sqrt{2})$

ดังนั้น $s = \frac{0}{1}$, $t = \frac{5}{3}$

ให้ k เป็น ค.ร.น. ของส่วนของ u, v, s, t

จะได้ว่า $k = 3$

จะกำหนด $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \end{bmatrix}$

ดังนั้น $S^{-1} = -\frac{1}{6\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -3\sqrt{2} & -1 \\ -3\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$

และ $A = 3\left(S\begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -3\sqrt{2}\end{bmatrix}S^{-1}\right)$

$$= 3\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -3\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6\sqrt{2}}\end{bmatrix}\right)$$

$$= 3\begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \\ (3\sqrt{2})^2 & (-3\sqrt{2})^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$= 3\begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} \\ \frac{(3\sqrt{2})^2}{2} + \frac{(-3\sqrt{2})^2}{2} & \frac{(3\sqrt{2})^2}{6\sqrt{2}} - \frac{(3\sqrt{2})^2}{6\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$= 3\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 18 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 54 & 0\end{bmatrix}$$

และทำให้ $B = 3\left(S\begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -4\sqrt{2} \end{bmatrix}S^{-1}\right)$

$$= 3\left(u\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 18 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 3\left(\frac{4}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 18 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 72 & 0 \end{bmatrix}$$

และ $C = 3\left(S\begin{bmatrix} 5\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -5\sqrt{2} \end{bmatrix}S^{-1}\right)$

$$= 3\left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 18 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 3\left(\frac{5}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 18 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 90 & 0 \end{bmatrix}$$

มีผลทำให้ $A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 54 & 0 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 72 & 0 \end{bmatrix}^2$

$$= \begin{bmatrix} 162 & 0 \\ 0 & 162 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 288 & 0 \\ 0 & 288 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 450 & 0 \\ 0 & 450 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 90 & 0 \end{bmatrix}^2 = C^2$$

<u>ตัวอย่าง 4.1.2</u> พิจารณา $p = 2$, $(3+3\sqrt{2})^2 + (4+4\sqrt{2})^2 = (5+5\sqrt{2})^2$

โดยทฤษฎี 4.1.5 สามารถหาเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

$A, B, C \in M_2(Z)$ ที่สอดคล้องกับสมการ $A^2 + B^2 = C^2$

จากกำหนดให้ จะได้ว่า

$a = (3+3\sqrt{2})$, $b = (4+4\sqrt{2})$, $c = (5+5\sqrt{2})$ และ

$\bar{a} = 3-3\sqrt{2}$, $\bar{b} = 4-4\sqrt{2}$, $\bar{c} = 5-5\sqrt{2}$

ซึ่ง a เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตที่มีอันดับเท่ากับ 2

ของ $x^2 - 6x - 9$

เพราะว่า $b = 4+4\sqrt{2} = 0 + \frac{4}{3}(3 + 3\sqrt{2})$

ดังนั้น $u = \frac{0}{1}$, $v = \frac{4}{3}$

และ $c = 5 + 5\sqrt{2} = 0 + \frac{5}{3}(3 + 3\sqrt{2})$

ดังนั้น $s = \frac{0}{1}$, $t = \frac{5}{3}$

ให้ k เป็น ค.ร.น. ของส่วนของ u,v,s,t จะได้ว่า $k = 3$

จะกำหนด $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3+3\sqrt{2} & 3-3\sqrt{2} \end{bmatrix}$ ดังนั้น $S^{-1} = \frac{1}{-6\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 3-3\sqrt{2} & -1 \\ -3-3\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$

และ $A = 3\left(S\begin{bmatrix} 3+3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3-3\sqrt{2} \end{bmatrix}S^{-1}\right)$

$$= 3\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3+3\sqrt{2} & 3-3\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3+3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3-3\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3-3\sqrt{2}}{-6\sqrt{2}} & \frac{-1}{-6\sqrt{2}} \\ \frac{-3-3\sqrt{2}}{-6\sqrt{2}} & \frac{1}{-6\sqrt{2}} \end{bmatrix}\right)$$

$$= 3\begin{bmatrix} 3+3\sqrt{2} & 3-3\sqrt{2} \\ (3+3\sqrt{2})^2 & (3-3\sqrt{2})^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3-3\sqrt{2}}{-6\sqrt{2}} & \frac{-1}{-6\sqrt{2}} \\ \frac{-3-3\sqrt{2}}{-6\sqrt{2}} & \frac{1}{-6\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= 3\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 27 & 18 \end{bmatrix}$$

และทำให้ $B = 3\left(S\begin{bmatrix} 4+4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 4-4\sqrt{2} \end{bmatrix} S^{-1} \right)$

$$= 3\left(u\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} \right)$$

$$= 3\left(\frac{4}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 36 & 24 \end{bmatrix}$$

และทำให้ $C = 3\left(S\begin{bmatrix}5+5\sqrt{2} & 0\\ 0 & 5-5\sqrt{2}\end{bmatrix}S^{-1}\right)$

$$= 3\left(s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0 & 1\\ 9 & 6\end{bmatrix}\right)$$

$$= 3\left(\frac{5}{3}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 9 & 6\end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 5\\ 45 & 30\end{bmatrix}$$

มีผลทำให้ $A^2 + B^2 = \begin{bmatrix}0 & 3\\ 27 & 18\end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix}0 & 4\\ 36 & 24\end{bmatrix}^2$

$$= \begin{bmatrix}81 & 54\\ 486 & 405\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}144 & 96\\ 864 & 720\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}225 & 150\\ 1350 & 1125\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 5\\ 45 & 30\end{bmatrix}^2 = C^2$$

<u>ทฤษฎีบท 4.1.6</u> กำหนดให้ $<\bar{Q}> = \{k + \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} \;/\; A = x+y\sqrt{z},$

$B = x-y\sqrt{z},\ k, x, y, z \in Q$ และ $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} \notin Q^*\}$

จะได้ว่า ถ้า a เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตที่มีอันดับเท่ากับ 3

แล้ว $a \in <\bar{Q}>$

<u>พิสูจน์</u> จาก a เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตที่มีอันดับเท่ากับ 3 และ

โดยนิยาม 2.3.8 และ นิยาม 2.3.9 จะได้ว่า

มี $p(x) = x^3+r_1x^2+r_2x+r_3$ เมื่อ $r_1, r_2, r_3 \in Z$

เป็นโมนิคโพลิโนเมียลที่ลดทอนไม่ได้ใน $Q[x]$ และ

a เป็นรากของสมการโดยทฤษฎี 2.3.2 ทำให้ได้ว่า

$$a = -\frac{r_1}{3} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{H}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{H}}$$

เมื่อ $q = r_3 - \frac{r_1r_2}{3} + \frac{2r_1^3}{27}$

และ $H = \frac{1}{27}\left(r_2 - \frac{r_1^2}{3}\right)^3 + \frac{q^2}{4}$

สมมุติให้ $a \in Q^*$

โดยที่ $a = m_1 + n_1\sqrt{d_1}$ เมื่อ $\exists m_1, \exists n_1, \exists d_1 \in Q$

และ $\sqrt{d_1} \notin Q$

แต่เนื่องจาก $m_1 + n_1\sqrt{d_1}$ เป็นรากของโพลิโนเมียลที่มี

อันดับเท่ากับ 2 เมื่อ $n_1 \neq 0$ และ $d_1 \neq 0$

หรือเป็นรากของโพลิโนเมียลที่มีอันดับเท่ากับ 1

เมื่อ $n_1 = 0$ หรือ $d_1 = 0$ ทำให้ a เป็นราก

ของโพลิโนเมียลที่มีอันดับ 2 หรือ 1 ด้วย

เกิดข้อขัดแย้งกับสมมุติให้

ดังนั้น $a \notin Q^*$

และ จาก $a = -\frac{r_1}{3} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{H}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{H}}$

โดยที่ $-\frac{r_1}{3}, \frac{-q}{2}, H \in Q$

ดังนั้นจะได้ว่า $a \in < \bar{Q} >$ □

<u>นิยาม 4.1.2</u> กำหนดให้ $A = x+y\sqrt{z}$, $B = x-y\sqrt{z}$

โดยที่ $x, y, z \in Q$ และ $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} \notin Q^*$

ถ้า $r, s, t \in Q$

และ $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$

จะเรียก $r + s(w\sqrt[3]{A} + w^2\sqrt[3]{B}) + t(w\sqrt[3]{A} + w^2\sqrt[3]{B})^2$

ว่า<u>ค่าสังยุคที่ 1</u> (the first conjugate)

ของ $r + s(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) + t(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B})^2$

ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $(r+s(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) + t(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B})^2)'$

จะเรียก $r+s(w^2\sqrt[3]{A}+w\sqrt[3]{B})+t(w^2\sqrt[3]{A}+w\sqrt[3]{B})^2$

ว่าการสังยุคที่ 2 (the second conjugate)

ของ $r+s(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})+t(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})^2$

ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $(r+s(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})+t(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})^2)''$

<u>หมายเหตุ</u> กำหนดให้ $A = x+y\sqrt{z}$, $B = x-y\sqrt{z}$

โดยที่ $x,y,z \in Q$ และ $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B} \notin Q^*$

จะได้ว่า ถ้า $r_i, s_i, t_i \in Q$, $\forall i = 1,2$

และ $r_1+s_1(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})+t_1(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})^2$

$= r_2+s_2(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})+t_2(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})^2$

แล้ว $r_1 = r_2$, $s_1 = s_2$ และ $t_1 = t_2$

<u>ทฤษฎีบท 4.1.7</u> ให้ a เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตที่มีอันดับเท่ากับ 3 แล้วจะได้ $a \neq a' \neq a'' \neq a$

<u>พิสูจน์</u> จาก a เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตที่มีอันดับเท่ากับ 3 และโดยนิยาม 2.3.8 และนิยาม 2.3.9 จะได้ว่า มี

$p(x) = x^3+r_1x^2+r_2x+r_3$ เมื่อ $r_1,r_2,r_3 \in Z$

เป็นโมนิคโพลิโนเมียลที่ลดทอนไม่ได้ โดยที่ a เป็นราก ของ p(x) โดยทฤษฎี 2.3.2 ทำให้ได้ว่า

$$a = -\frac{r_1}{3} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{H}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{H}}$$

$$a' = -\frac{r_1}{3} + w\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{H}} + w^2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{H}}$$

$$a'' = -\frac{r_1}{3} + w^2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{H}} + w\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{H}}$$

เมื่อ $q = r_3 - \frac{r_1 r_2}{3} + \frac{2r_1^3}{27}$, $H = \frac{1}{27}(r_2 - \frac{r_1^2}{3})^3 + \frac{q^2}{4}$

และ $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

สมมุติให้ $a = a'$

ดังนั้น $(x-a)(x-a')(x-a'') = (x-a)(x-a)(x-a'')$

$$= (x^2-2ax+a^2)(x-a'')$$

$$= x^3+(-2a-a'')x^2$$

$$+ (a^2+2aa'')x-a^2a''$$

แต่เนื่องจาก $(x-a)(x-a')(x-a'')$

$$= P(x) = x^3+r_1x^2+r_2x+r_3, r_1, r_2, r_3 \in Z$$

ดังนั้น $(x-a)(x-a')(x-a'')$

$$= x^3+(-2a-a'')x^2+(a^2+2aa'')x-a^2a''$$

นั่นคือ $x^3+r_1x^2+r_2x+r_3$

$$= x^3+(-2a-a'')x^2+(a^2+2aa'')x-a^2a''$$

โดยการเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของโพลิโนเมียลจะได้ว่า

$$-2a-a'' = r_1 \qquad (2)$$

และ $a^2+2aa'' = r_2 \qquad (3)$

จาก (2) จะได้ $a'' = -2a-r_1$

แทนค่า a'' ใน (3) จะได้

$$a^2+2a(-2a-r_1) = r_2$$

$$a^2-4a^2-2r_1a = r_2$$

$$-3a^2-2r_1a-r_2 = 0$$

ดังนั้นโดยทฤษฎี 2.3.1 จะได้ว่า

$$a = \frac{2r_1 \pm \sqrt{4r_1^2 - 12r_2}}{-6}$$

แสดงว่า a มีอันดับเท่ากับ 2

เกิดข้อขัดแย้งกับกำหนดให้

ดังนั้น $a \neq a'$

และในทำนองเดียวกันกับกรณี $a \neq a'$ จะได้ว่า $a' \neq a''$

และ $a'' \neq a$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $a \neq a' \neq a'' \neq a$ □

<u>ทฤษฎีบท 4.1.8</u> กำหนดให้ $a \in \langle \bar{Q} \rangle$ จะได้ว่า ถ้า $r,s,t,u,v \in Q$ แล้ว

1. $(r+sa+ta^2)' = r+sa'+t(a^2)'$
2. $(r+sa+ta^2)'' = r+sa''+t(a^2)''$
3. ถ้า $r+sa = u+va$
   แล้วจะได้ว่า $(r+sa)' = (u+va)'$
4. ถ้า $r+sa = u+va$
   แล้วจะได้ว่า $(r+sa)'' = (u+va)''$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $a = k + \sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}} + \sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}}$

เมื่อ $k,\ x,\ H \in Q$ และ

$\sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}} + \sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}} \notin Q^*$, $r,s,t \in Q$

1. จาก $r+sa+ta^2$

$$= (r+s(k+\sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}} + \sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}})$$

$$+ t(k+\sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}} + \sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}})^2$$

$$= r+sk+s(\sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}} + \sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}})$$

$$+ t(k^2+2k(\sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}} + \sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}})$$

$$+ (\sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}} + \sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}})^2)$$

$$= r+sk+s(\sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}} + \sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}})$$

$$+ tk^2+2tk(\sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}} + \sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}})$$

$$+ t(\sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}} + \sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}})^2$$

ดังนั้น $r+sa+ta^2 = r+sk+tk^2+(s+2tk)\left(\sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}}+\sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}}\right)$

$$+\ t\left(\sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}}+\sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}}\right)^2$$

จาก $r+sk+tk^2,\ s+2tk,\ t \in Q$

และโดยนิยาม 4.1.2 จะได้ว่า

$$(r+sa+ta^2)' = \left(r+sk+tk^2+(s+2tk)\left(\sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}}+\sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}}\right)\right.$$

$$\left.+\ t\left(\sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}}+\sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}}\right)^2\right)'$$

$$= r+sk+tk^2+(s+2tk)\left(w\sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}}+w^2\sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}}\right)$$

$$+\ t\left(w\sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}}+w^2\sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}}\right)^2$$

$$= r+sk+s\left(w\sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}}+w^2\sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}}\right)+tk^2$$

$$+\ 2tk\left(w\sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}}+w^2\sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}}\right)$$

$$+\ t\left(w\sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}}+w^2\sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}}\right)^2$$

$$= r+s\left(k+w\sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}}+w^2\sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}}\right)$$

$$+\ t\left(k+w\sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}}+w^2\sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}}\right)^2$$

ดังนั้น

$$(r+sa+ta^2)' = r+sa'+t(a')^2$$

2. พิสูจน์ทำนองเดียวกันกับ ข้อ 1 จะได้ว่า

$$(r+sa+ta^2)'' = r+sa''+t(a^2)''$$

3. ให้ $r+sa = u+va$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$(r-u) = (v-s)a \qquad (1)$$

<u>จะแสดงว่า $r = u$ และ $v = s$</u>

สมมุติให้ $r - u \neq 0$ หรือ $v - s \neq 0$, $r,u,v,s \in Q$

ดังนั้นให้ $t_1 = r-u$, $t_2 = v-s$, $t_1,t_2 \in Z-\{0\}$

จาก (1) จะได้ว่า $t_1 = t_2 a$

แต่เนื่องจาก $a \notin Q$

พิจารณา กรณี $t_2 \neq 0$ จะได้ว่า $t_2 a \notin Q$

แต่เนื่องจาก $t_1 = t_2 a$

ทำให้ $t_1 \notin Q$ ด้วย

เกิดข้อขัดแย้ง กับกำหนดให้

พิจารณา กรณี $t_2 = 0$ จะได้ว่า $t_2 a = 0$

ทำให้ $t_1 = 0$ แสดงว่า $t_1 = 0$

และ $t_2 = 0$ เกิดการขัดแย้ง

ดังนั้น $r - u = 0$ และ $v - s = 0$

นั่นคือ $r = u$ และ $v = s$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$r+s(w\sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}} + w^2\sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}})$$

$$= u+v(w\sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}} + w^2\sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}})$$

นั่นคือ $r+sa' = u+va'$

จากข้อ 1 จะได้ว่า $(r+sa)' = (u+va)'$

4. กำหนดให้ $r+sa = u+va$

พิสูจน์ทำนองเดียวกับข้อ 3 จะได้ว่า

$$(r+sa)'' = (u+va)''$$

<u>ทฤษฎีบท 4.1.9</u> กำหนดให้ $a \in \langle \bar{Q} \rangle$

จะได้ว่า ถ้า $s,t,u,v \in Q$ แล้ว

1. $(s+ta)' + (u+va)' = ((s+ta)+(u+va))'$
2. $(s+ta)'' + (u+va)'' = ((s+ta)+(u+va))''$
3. $(s+ta)'(u+va)' = ((s+ta)(u+va))'$
4. $(s+ta)''(u+va)'' = ((s+ta)(u+va))''$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $a = k + \sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}} + \sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}}$, $k, x, H \in Q$

และ $\sqrt[3]{\frac{-x}{2}+\sqrt{H}} + \sqrt[3]{\frac{-x}{2}-\sqrt{H}} \notin Q^*$

และกำหนดให้ $s, t, u, v \in Q$

1. จาก $(s+ta)' + (u+va)' = (s+ta') + (u+va')$

$= (s+u) + (t+v)a'$

แต่เนื่องจาก $s+u, \ t+v \in Q$

โดยทฤษฎีนำ 4.1.8 ข้อ 1

จะได้ว่า $(s+u)+(t+v)a' = ((s+u)+(t+v)a)'$

$= ((s+ta)+(u+va))'$

ดังนั้น $(s+ta)' + (u+va)' = ((s+ta)+(u+va))'$

2. พิสูจน์ทำนองเดียวกันกับข้อ 1 จะได้ว่า

$(s+ta)'' + (u+va)'' = ((s+ta)+(u+va))''$

3. จาก $(s+ta)'(u+va)' = (s+ta')(u+va')$

$= su + (tu+sv)a' + tv(a')^2$

แต่เนื่องจาก $su, tu+sv, tv \in Q$

และโดยทฤษฎีนำ 4.1.8 จะได้ว่า

$$su+(tu+sv)a'+tv(a')^2 = (su+(tu+sv)a+tva^2)'$$

$$= ((s+ta)(u+va))'$$

นั่นคือ $(s+ta)'(u+va)' = ((s+ta)(u+va))'$

4. พิสูจน์ทำนองเดียวกันกับข้อ 3 จะได้ว่า

$$(s+ta)''(u+va)'' = ((s+ta)(u+va))''$$

<u>ทฤษฎีนำ 4.1.10</u> ให้ $p \geq 2$, ถ้า a เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตที่มีอันดับเท่ากับ 3 และ $b, c \in Q(a)$ สอดคล้องกับสมการ $a^p + b^p = c^p$ แล้วจะได้ว่า

1. $(a')^p + (b')^p = (c')^p$
2. $(a'')^p + (b'')^p = (c'')^p$

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตที่มีอันดับเท่ากับ 3, $b, c \in Q(a)$ และ $a^p + b^p = c^p$

1. โดยทฤษฎีนำ 4.1.8 ข้อ 3 จะได้ว่า

$$(a^p + b^p)' = (c^p)'$$

โดยทฤษฎีนำ 4.1.9 ข้อ 1 จะได้ว่า

$$(a^p + b^p)' = (a^p)' + (b^p)'$$

โดยทฤษฎีนำ 4.1.9 ข้อ 3 จะได้ว่า

$$(a^p)' = (a')^p$$

$$(b^p)' = (b')^p$$

และ $(c^p)' = (c')^p$

ดังนั้น $(a')^p + (b')^p = (c')^p$

2. พิสูจน์ทำนองเดียวกันกับข้อ 1 จะได้ว่า

$$(a'')^p + (b'')^p = (c'')^p$$

$\square$

<u>ทฤษฎี 4.1.11</u> ให้ $p \geq 2$ ถ้า a เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตที่มีอันดับเท่ากับ 3 และ $b, c \in Q(a)$ โดยที่ $b \neq 0$, $c \neq 0$ **และถ้า** สอดคล้องกับสมการ $a^p + b^p = c^p$ แล้วจะมีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ $A, B, C \in M_3(Z)$ ที่ $A^p + B^p = C^p$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $p \geq 2$, a เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตที่มีอันดับเท่ากับ 3 และ $b, c \in Q(a)$ โดยที่ $b \neq 0$, $c \neq 0$ และ b,c สอดคล้องกับสมการ $a^p + b^p + c^p$

จาก $b, c \in Q(a)$

ให้ $b = s+ta, \exists s, \exists t \in Q$ (1)

และ $c = u+va, \exists u, \exists v \in Q$ (2)

ดังนั้นโดยทฤษฎีนำ 4.1.8 ข้อ 3 และ ข้อ 4 จะได้ว่า

$$b' = s+ta' \qquad (3)$$

$$c' = u+va' \qquad (4)$$

และ $$b'' = s+ta'' \qquad (5)$$

$$c'' = u+va'' \qquad (6)$$

เนื่องจาก a เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตอันดับ 3 จะได้ว่า

มี $p(x) = x^3+r_1x^2+r_2x+r_3$ โดยที่ $r_1, r_2, r_3 \in Z$

เป็น โมนิคโพลิโนเมียลที่ลดทอนไม่ได้

และ $$a = -\frac{r_1}{3} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{H}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{H}}$$

เป็นรากของ $p(x)$, โดยที่

$$q = r_3 - \frac{r_1r_2}{3} + \frac{2r_1^3}{27}, \quad H = \frac{1}{27}\left(r_2 - \frac{r_1^2}{3}\right)^3 + \frac{q^2}{4}$$

โดยนิยาม 4.1.2 จะได้ว่า

$$a' = -\frac{r_1}{3} + w\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{H}} + w^2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{H}}$$

$$a'' = -\frac{r_1}{3} + w^2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{H}} + w\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{H}}$$

โดยที่ $w = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

โดยทฤษฎี 2.3.2 จะได้ว่า a' และ a'' เป็นราก

อีก 2 รากของ $p(x)$

พิจารณาเมตริกซ์จำนวนเต็ม $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -r_3 & -r_2 & -r_1 \end{bmatrix}$

ให้ เมตริกซ์ $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a' & a'' \\ a^2 & (a')^2 & (a'')^2 \end{bmatrix}$

โดยทฤษฎีบท 4.1.7 ทราบว่า $a \neq a' \neq a'' \neq a$

ดังนั้น $(a'-a)(a''-a)(a''-a') \neq 0$

เนื่องจาก $\det S = (a'-a)(a''-a)(a''-a')$

ดังนั้นจะได้ว่า $\det S \neq 0$

โดยทฤษฎี 2.2.9 จะได้ว่า S เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

และจะได้ว่ามี S^{-1} ซึ่ง $S^{-1}S = SS^{-1} = I$

เนื่องจาก
$$S\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & a'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a' & a'' \\ a^2 & (a')^2 & (a'')^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & a'' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ a^2 & (a')^2 & (a'')^2 \\ a^3 & (a')^3 & (a'')^3 \end{bmatrix}$$

และ
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -r_3 & -r_2 & -r_1 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -r_3 & -r_2 & -r_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a' & a'' \\ a^2 & (a')^2 & (a'')^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ a^2 & (a')^2 & (a'')^2 \\ -r_3-r_2a-r_1a^2 & -r_3-r_2a'-r_1(a')^2 & -r_3-r_2a''-r_1(a'')^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ a^2 & (a')^2 & (a'')^2 \\ a^3 & (a')^3 & (a'')^3 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $s \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & a'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -r_3 & -r_2 & -r_1 \end{bmatrix} s$

ทำให้ได้ว่า $s \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & a'' \end{bmatrix} s^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -r_3 & -r_2 & -r_1 \end{bmatrix} ss^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -r_3 & -r_2 & -r_1 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $a \neq 0$, $a' \neq 0$ และ $a'' \neq 0$

ดังนั้น $aa'a'' \neq 0$

โดยทฤษฎี 2.2.9 จะได้ว่า $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & a'' \end{bmatrix}$

เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ ซึ่งมีผลทำให้ x เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

พิจารณาเมตริกซ์ $Y = S\begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & b'' \end{bmatrix} S^{-1}$

จาก (1) , (3) และ (5) จะได้ว่า

$$S\begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & b'' \end{bmatrix} S^{-1} = S\begin{bmatrix} s+ta & 0 & 0 \\ 0 & s+ta' & 0 \\ 0 & 0 & s+ta'' \end{bmatrix} S^{-1}$$

$$= S\left(\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ta & 0 & 0 \\ 0 & ta' & 0 \\ 0 & 0 & ta'' \end{bmatrix}\right) S^{-1}$$

$$= s\left(S\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} S^{-1}\right) + t\left(S\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & a'' \end{bmatrix} S^{-1}\right)$$

ดังนั้น $Y = s\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -r_3 & -r_2 & -r_1 \end{bmatrix}$

พิจารณาเมตริกซ์ $Z = S\begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c' & 0 \\ 0 & 0 & c'' \end{bmatrix}S^{-1}$

พิสูจน์ทำนองเดียวกันกับเมตริกซ์ Y จะได้ว่า

Z เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

$$\text{และ } Z = u\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -r_3 & -r_2 & -r_1 \end{bmatrix}$$

จาก $s, t, u, v \in Q$ ดังนั้นให้

k เป็น ค.ร.น. ของส่วนของ s, t, u, v

ทำให้ได้ว่า $ks, kt, ku, kv \in Z$

ให้ $A = kX,\ B = kY,\ C = kZ$

$$\text{นั่นคือ } A = kX = k\left(S\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & a'' \end{bmatrix}S^{-1}\right)$$

$$B = kY = k\left(S\begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & b'' \end{bmatrix}S^{-1}\right)$$

$$C = kZ = k\left(S\begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c' & 0 \\ 0 & 0 & c'' \end{bmatrix}S^{-1}\right)$$

จะได้ว่า A, B, C เป็นเมตริกซ์จำนวนเต็ม

จะแสดงว่า $A^p + B^p = C^p$

พิจารณา $$A^p + B^p = \left(k\left(S\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & a'' \end{bmatrix} S^{-1}\right)\right)^p + \left(k\left(S\begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & b'' \end{bmatrix} S^{-1}\right)\right)^p$$

ดังนั้น $$A^p + B^p = k^p\left(S\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & a'' \end{bmatrix} S^{-1}\right)^p + k^p\left(S\begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & b'' \end{bmatrix} S^{-1}\right)^p \qquad (7)$$

พิจารณา $$\left(S\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & a'' \end{bmatrix} S^{-1}\right)^p = S\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & a'' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & a'' \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & a'' \end{bmatrix}S^{-1}$$

$$= S\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & a'' \end{bmatrix}^{p} S^{-1} = S\begin{bmatrix} a^{p} & 0 & 0 \\ 0 & (a')^{p} & 0 \\ 0 & 0 & (a'')^{p} \end{bmatrix} S^{-1}$$

ดังนั้น $$\left(S\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & a'' \end{bmatrix} S^{-1}\right)^{p} = S\begin{bmatrix} a^{p} & 0 & 0 \\ 0 & (a')^{p} & 0 \\ 0 & 0 & (a'')^{p} \end{bmatrix} S^{-1}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$\left(S\begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & b'' \end{bmatrix} S^{-1}\right)^{p} = S\begin{bmatrix} b^{p} & 0 & 0 \\ 0 & (b')^{p} & 0 \\ 0 & 0 & (b'')^{p} \end{bmatrix} S^{-1}$$

ดังนั้นจาก (7) จะได้ว่า

$$A^{p} + B^{p} = k^{p}\left(S\begin{bmatrix} a^{p} & 0 & 0 \\ 0 & (a')^{p} & 0 \\ 0 & 0 & (a'')^{p} \end{bmatrix} S^{-1}\right)$$

$$+ k^{p}\left(S\begin{bmatrix} b^{p} & 0 & 0 \\ 0 & (b')^{p} & 0 \\ 0 & 0 & (b'')^{p} \end{bmatrix} S^{-1}\right)$$

$$= k^{p}\left(S\begin{bmatrix} a^{p}+b^{p} & 0 & 0 \\ 0 & (a')^{p}+(b')^{p} & 0 \\ 0 & 0 & (a'')^{p}+(b'')^{p} \end{bmatrix} S^{-1}\right)$$

จาก $a^p + b^p = c^p$

และทฤษฎีบท 4.1.10 จะได้ว่า

$$A^p + B^p = k^p\left(S\begin{bmatrix} c^p & 0 & 0 \\ 0 & (c')^p & 0 \\ 0 & 0 & (c'')^p \end{bmatrix} S^{-1}\right)$$

$$= \left(k\left(S\begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & (c') & 0 \\ 0 & 0 & (c'') \end{bmatrix} S^{-1}\right)\right)^p$$

ดังนั้น $A^p + B^p = C^p$

เพราะฉะนั้นแสดงว่ามีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

$A, B, C \in M_3(Z)$ ที่ $A^p + B^p = C^p$

$\square$

<u>ตัวอย่าง 4.1.3</u> พิจารณา $p = 2$, $(3\sqrt[3]{2})^2 + (4\sqrt[3]{2})^2 = (5\sqrt[3]{2})^2$

โดยทฤษฎี 4.1.11 จะสามารถหาเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

$A, B, C \in M_3(Z)$ ที่สอดคล้องกับสมการ $A^2 + B^2 = C^2$

จากกำหนดให้ จะได้ว่า

$a = 3\sqrt[3]{2}$, $b = 4\sqrt[3]{2}$, $c = 5\sqrt[3]{2}$ และ

$$a' = w(3\sqrt[3]{2})\,,\quad b' = w(4\sqrt[3]{2})\,,\quad c' = w(5\sqrt[3]{2})$$

$$a'' = w^2(3\sqrt[3]{2})\,,\quad b'' = w^2(4\sqrt[3]{2})\,,\quad c'' = w^2(5\sqrt[3]{2})$$

ซึ่ง a เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตของ $x^3 - 54$

เพราะว่า $b = 4\sqrt[3]{2} = 0 + \frac{4}{3}(3\sqrt[3]{2})$ ดังนั้น $s = \frac{0}{1}$, $t = \frac{4}{3}$

และ $c = 5\sqrt[3]{2} = 0 + \frac{5}{3}(3\sqrt[3]{2})$ ดังนั้น $u = \frac{0}{1}$, $v = \frac{5}{3}$

ให้ k เป็น ค.ร.น. ของส่วนของ s,t,u,v

จะได้ว่า $k = 3$

จะกำหนด
$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3\sqrt[3]{2} & w3\sqrt[3]{2} & w^2 3\sqrt[3]{2} \\ (3\sqrt[3]{2})^2 & (w3\sqrt[3]{2})^2 & (w^2\, 3\sqrt[3]{2})^2 \end{bmatrix}$$

และ
$$A = 3\left(S \begin{bmatrix} 3\sqrt[3]{2} & 0 & 0 \\ 0 & w3\sqrt[3]{2} & 0 \\ 0 & 0 & w^2 3\sqrt[3]{2} \end{bmatrix} S^{-1}\right)$$

จะได้ว่า
$$A = 3\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 54 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 162 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

และทำให้ $B = 3\left(S\begin{bmatrix} 4\sqrt[3]{2} & 0 & 0 \\ 0 & w4\sqrt[3]{2} & 0 \\ 0 & 0 & w^2 4\sqrt[3]{2}\end{bmatrix}S^{-1}\right)$

$$= 3\left(s\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 54 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$= 3\left(\frac{4}{3}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 54 & 0 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\\ 216 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

และ $C = 3\left(S\begin{bmatrix} 5\sqrt[3]{2} & 0 & 0 \\ 0 & w5\sqrt[3]{2} & 0 \\ 0 & 0 & w^2 5\sqrt[3]{2}\end{bmatrix}S^{-1}\right)$

$$= 3\left(u\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} + v\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 54 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$= 3\left(\frac{5}{3}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 54 & 0 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\\ 270 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

มีผลทำให้ $A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 162 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 216 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 486 & 0 & 0 \\ 0 & 486 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 864 & 0 & 0 \\ 0 & 864 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 25 \\ 1350 & 0 & 0 \\ 0 & 1350 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 270 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = C^2$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่ามีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

$A, B, C \in M_3(Z)$ ที่ $A^2 + B^2 = C^2$

<u>ตัวอย่าง 4.1.4</u> พิจารณา $p = 3,\ (\sqrt[3]{9})^3 = (-2)^3 = 1^3$

โดยทฤษฎี 4.1.11 จะสามารถหาเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

$A, B, C \in M_3(Z)$ ที่สอดคล้องกับสมการ จากกำหนดให้

จะได้ $a = \sqrt[3]{9}\ ,\ b = -2\ ,\ c = 1$

$a' = w\sqrt[3]{9},\ b = -2\ ,\ c = 1$

$a'' = w^2\sqrt[3]{9},\ b = -2,\ c = 1$

ซึ่ง a เป็นจำนวนจริงเชิงพีชคณิตของ x^3-9

เพราะว่า $b = -2 = -2+0(\sqrt[3]{9})$ ดังนั้น $s = -2,\ t = \frac{0}{1}$

และ $c = -1 = 1 + 0(\sqrt[3]{9})$ ดังนั้น $u = 1,\ v = \frac{0}{1}$

ให้ k เป็น ค.ร.น. ของส่วนของ s,t,u,v

จะได้ว่า $k = 1$

จะกำหนด $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt[3]{9} & w\sqrt[3]{9} & w^2\sqrt[3]{9} \\ (\sqrt[3]{9})^2 & (w\sqrt[3]{9})^2 & (w^2\sqrt[3]{9})^2 \end{bmatrix}$

และ $A = S\begin{bmatrix} \sqrt[3]{9} & 0 & 0 \\ 0 & w\sqrt[3]{9} & 0 \\ 0 & 0 & w^2\sqrt[3]{9} \end{bmatrix}S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

และทำให้ $B = S\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}S^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

และ $C = S\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

มีผลทำให้ $A^3 + B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^3$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $A^3 + B^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C^3$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่ามีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

$A, B, C \in M_3(Z)$ ที่ $A^3 + B^3 = C^3$

<u>ตัวอย่าง 4.1.5</u> จงหาเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ A, B, C ที่สอดคล้องกับสมการ $A^2 + B^2 = C^2$ โดยที่

1. $A, B, C \in M_4(Z)$

2. $A, B, C \in M_5(Z)$

3. $A, B, C \in M_{10}(Z)$

<u>วิธีทำ</u> จากตัวอย่าง 4.1.1 จะได้ว่า มีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ A_1 B_1, $C_1 \in M_2(Z)$ ที่ $A_1^2 + B_1^2 = C_1^2$ โดยที่

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 54 & 0 \end{bmatrix}, \; B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 72 & 0 \end{bmatrix}, \; C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 90 & 0 \end{bmatrix}$$

จากตัวอย่าง 4.1.3 จะได้ว่า มีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ A_2, B_2, $C_2 \in M_3(Z)$ ที่ $A_2^2 + B_2^2 = C_2^2$ โดยที่

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 162 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 216 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 270 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. ให้ $A = A_1 \oplus B_1$, $B = B_1 \oplus A_1$, $C = C_1 \oplus C_1$

จะได้ว่า $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_1 \end{bmatrix}$

พิจารณา $A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}^2$

$$= \begin{bmatrix} A_1^2 & 0 \\ 0 & B_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1^2 & 0 \\ 0 & A_1^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1^2+B_1^2 & 0 \\ 0 & B_1^2+A_1^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1^2 & 0 \\ 0 & C_1^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_1 \end{bmatrix}^2 = C^2$$

จะได้ว่ามีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ $A, B, C \in M_4(Z)$
ที่สอดคล้องกับสมการ $A^2 + B^2 = C^2$

2. ให้ $A = A_1 \oplus B_2$, $B = B_1 \oplus A_2$, $C = C_1 \oplus C_2$

จะได้ว่า $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 216 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 72 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 162 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 90 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 270 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

พิจารณา $A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}^2$

$$= \begin{bmatrix} A_1^2 & 0 \\ 0 & B_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1^2 & 0 \\ 0 & A_2^2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} A_1^2+B_1^2 & 0 \\ 0 & B_2^2+A_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1^2 & 0 \\ 0 & C_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}^2 = C^2$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่ามีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ $A, B, C \in M_5(Z)$ ที่สอดคล้องกับสมการ $A^2 + B^2 = C^2$

3. ให้ $A = A_1 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus A_2$

$B = B_1 \oplus B_1 \oplus B_2 \oplus B_2$

$C = C_1 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus C_2$

จะได้ว่า $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

พิจารณา $A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}^2$

$$= \begin{bmatrix} A_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1^2+B_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1^2+B_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2^2+B_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2^2+B_2^2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} C_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}^2 = C^2$$

เพราะฉะนั้นแสดงว่ามีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ $A, B, C \in M_{10}(Z)$ ที่สอดคล้องกับสมการ $A^2 + B^2 = C^2$

ในทฤษฎี 4.1.12 ต่อไปนี้ เราสามารถที่จะแสดงได้ว่า มีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ขนาด $n \times n$, $n \geq 4$ ที่สอดคล้องกับสมการ $A^p + B^p = C^p$, เมื่อกำหนด $p \geq 2$ และ $a^p + b^p = c^p$ โดยที่ a เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตที่มีอันดับเท่ากับ 2 หรือ 3 และ $b, c \in Q(a)$ มาให้ โดยจะสร้างเมตริกซ์ A, B, C ดังกล่าวจากนิยาม 3.1.3 และนิยาม 3.1.4 ดังตัวอย่าง 4.1.5 ที่ได้แสดงการหาเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ $A, B, C \in M_4(Z)$, $M_5(Z)$, $M_{10}(Z)$

<u>ทฤษฎี 4.1.12</u> ให้ $p \geq 2$ และ $a^p + b^p = c^p$ โดยที่ a เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตอันดับเท่ากับ 2 หรือ 3 และ $b, c \in Q(a) - \{0\}$ แล้วจะได้ว่าจะมีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ $A, B, C \in M_n(Z)$ ที่ $A^p + B^p = C^p$ เมื่อ $n \neq 1$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $n, p \in Z^+$ เมื่อ $n \neq 1$ และ $p \geq 2$

<u>กรณี 1 พิจารณาเมื่อ n เป็นจำนวนคู่บวก</u>

ดังนั้น $n = 2m, m \in Z^+$

โดยทฤษฎี 4.1.5 จะได้ว่า มีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ $A_o, B_o, C_o \in M_2(Z)$ ที่สอดคล้องกับสมการ $A_o^p + B_o^p = C_o^p$

ให้ A, B, C เป็นไดเรกซัม m ชุดของ A_o, B_o, C_o ตามลำดับ จะได้ว่า

$$A = \begin{bmatrix} A_o & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_o & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_o \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_o & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_o & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_o \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} C_o & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_o & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_o \end{bmatrix}$$

จาก A_o เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

ดังนั้นจะมี $A_o^{-1} \in M_2(Z)$ ที่ $A_oA_o^{-1} = I = A_o^{-1}A_o$

ให้ $M = \begin{bmatrix} A_o^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_o^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_o^{-1} \end{bmatrix}$

พิจารณา $AM = \begin{bmatrix} A_o & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_o & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_o^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_o^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_o^{-1} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} A_oA_o^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_oA_o^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_oA_o^{-1} \end{bmatrix} = I$

และ $MA = \begin{bmatrix} A_o^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_o^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_o^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_o & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_o & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_o \end{bmatrix}$

$$MA = \begin{bmatrix} A_o^{-1}A_o & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_o^{-1}A_o & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_o^{-1}A_o \end{bmatrix} = I$$

แสดงว่า A เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ ซึ่ง $A^{-1} = M$

และในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า B, C เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

พิจารณา $A^p + B^p = \begin{bmatrix} A_o & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_o & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_o \end{bmatrix}^p$

$$+ \begin{bmatrix} B_o & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_o & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_o \end{bmatrix}^p$$

$$= \begin{bmatrix} A_o^p+B_o^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_o^p+B_o^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_o^p+B_o^p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_o^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_o^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_o^p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_o & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_o & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_o \end{bmatrix}^p = C^p$$

แสดงว่ามีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ $A, B, C \in M_n(Z)$
เมื่อ n เป็นจำนวนบวก ที่สอดคล้องกับสมการ

$$A^p + B^p = C^p \qquad (*)$$

กรณี 2 พิจารณาเมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวก, $n \neq 1$

ดังนั้นให้ $n_1 = 2m + 3$, $m \in Z^+$

โดยทฤษฎี 4.1.11 จะได้ว่า มีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

$A_1, B_1, C_1 \in M_3(Z)$ ที่สอดคล้องกับสมการ

$$A_1^p + B_1^p = C_1^p \qquad (1)$$

จากกรณี 1 จะได้ว่ามีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

$A_o, B_o, C_o \in M_{2m}(Z)$ ที่สอดคล้องกับสมการ

$$A_o^p + B_o^p = C_o^p$$

ให้ $A = A_o \oplus A_1$, $B = B_o \oplus B_1$,

$C = C_o \oplus C_1$ จะได้ว่า

$$A = \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_o & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_o & 0 \\ 0 & C_1 \end{bmatrix}$$

จาก A_o , A_1 เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

ดังนั้นจะมี $A_o^{-1} \in M_{2m}(Z)$, $A_1^{-1} \in M_3(Z)$

ที่ $A_oA_o^{-1} = A_o^{-1}A_o = I$ และ $A_1^{-1}A_1 = A_1A_1^{-1} = I$

ให้ $M = \begin{bmatrix} A_o^{-1} & 0 \\ 0 & A_1^{-1} \end{bmatrix}$

พิจารณา $AM = \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_o^{-1} & 0 \\ 0 & A_1^{-1} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} A_oA_o^{-1} & 0 \\ 0 & A_1A_1^{-1} \end{bmatrix} = I$$

และ $MA = \begin{bmatrix} A_o^{-1} & 0 \\ 0 & A_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} A_o^{-1}A_o & 0 \\ 0 & A_1^{-1}A_1 \end{bmatrix} = I$$

แสดงว่า A เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ ซึ่ง $A^{-1} = M$

และในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า B, C เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ด้วย

พิจารณา $A^p + B^p = \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}^p + \begin{bmatrix} B_o & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}^p$

$$= \begin{bmatrix} A_o^p & 0 \\ 0 & A_1^p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_o^p & 0 \\ 0 & B_1^p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_o^p + B_o^p & 0 \\ 0 & A_1^p + B_1^p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_o^p & 0 \\ 0 & C_1^p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_o & 0 \\ 0 & C_1 \end{bmatrix}^p = C^p$$

แสดงว่ามีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ $A, B, C \in M_{n_1}(Z)$

ที่ $A^p + B^p = C^p$ (2)

ดังนั้นจาก (1) และ (2) จะได้ว่า มีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

$A, B, C \in M_n(Z)$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวกที่สอดคล้องกับ

สมการ $A^p + B^p = C^p$ (**)

และจาก (*) และ (**) จะได้ว่ามีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

$A, B, C \in M_n(Z)$ เมื่อ $n \neq 1$ ที่สอดคล้องกับสมการ

$A^p + B^p = C^p$

□

4.2 การหาเมตริกซ์ซิงกูลาร์ขนาด $n \times n$ ที่สอดคล้องกับสมการ $A^k + B^k = C^k$, $k \in Z^+$ และ $n \neq 1$

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงรูปทั่วไปของเมตริกซ์ซิงกูลาร์ขนาด 2x2 ที่มีคุณสมบัติเป็นเมตริกซ์ไอเดมโพเทนท์

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ไอเดมโพเทนท์ ,

โดยที่ $a, b, c, d \in Z$ จะได้ว่า $A^2 = A$

นั่นคือ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

โดยนิยาม 2.2.2 มีผลทำให้

$a^2+bc = a$ นั่นคือ $bc = a-a^2$ (1)

$ab+bd = b$ นั่นคือ $b(a+d) = b$ (2)

$ac+cd = c$ นั่นคือ $c(a+d) = c$ (3)

และ $bc+d^2 = d$ นั่นคือ $bc = d-d^2$ (4)

จาก (1) = (4) ดังนั้น $a - a^2 = d - d^2$

$a^2 - d^2 = a - d$

นั่นคือ $(a-d)(a+d) = a - d$ (*)

<u>กรณี $a-d \neq 0$</u>

จาก (*) จะได้ว่า $a + d = 1$

นั่นคือ $d = 1-a$ (5)

แทนค่า d ใน (2) จะได้ว่า $b(a+1-a) = b$ นั่นคือ $b = b$

แทนค่า d ใน (3) จะได้ว่า $c(a+1-a) = c$ นั่นคือ $c = c$

จาก (1) จะได้ว่า $bc = a-a^2$

ดังนั้นเมตริกซ์ที่มีสมาชิกสอดคล้องกับสมการ (1)-(4) คือ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{bmatrix}$

เมื่อ $b, c \in Z$ และ $bc = a-a^2$

ถ้า $a = 0$ จะได้ว่า $d = 1$ และ $bc = 0$ นั่นคือ $b = 0$

หรือ $c = 0$

ดังนั้น $A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$

โดยทฤษฎี 2.2.5 จะได้ว่า $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$

เป็นเมตริกซ์ซิงกูลาร์

ถ้า $a = 1$ จะได้ว่า $d = 0$ และ $bc = 0$ นั่นคือ $b = 0$ หรือ $c = 0$

ดังนั้น $A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$

โดยทฤษฎี 2.2.5 จะได้ว่า $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ซิงกูลาร์

<u>พิจารณาเมื่อ $a \neq 0$, $a \neq 1$</u> จะได้ว่า $a-a^2 \neq 0$

ทำให้ $bc \neq 0$, นั่นคือ $b = \dfrac{a-a^2}{c}$

ดังนั้น $A = \begin{bmatrix} a & \dfrac{a-a^2}{c} \\ c & 1-a \end{bmatrix}$, เมื่อ $a \neq 0$, $a \neq 1$

และ $\dfrac{a-a^2}{c} \in Z$

พิจารณา $\det \begin{bmatrix} a & \dfrac{a-a^2}{c} \\ c & 1-a \end{bmatrix} = a(1-a) - \dfrac{c(a-a^2)}{c} = (a-a^2)-(a-a^2)$

ดังนั้น $\det \begin{bmatrix} a & \dfrac{a-a^2}{c} \\ c & 1-a \end{bmatrix} = 0$

นั่นคือ $\begin{bmatrix} a & \dfrac{a-a^2}{c} \\ c & 1-a \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ซิงกูลาร์

<u>กรณี $a-d = 0$</u>

จะได้ว่า $d = a$ (6)

แทนค่า $d = a$ ใน (2) จะได้ $2ab = b$ (7)

แทนค่า $d = a$ ใน (3) จะได้ $2ac = c$ (8)

จาก (1) จะได้ว่า $bc = a-a^2$

ดังนั้นเมตริกซ์ที่มีสมาชิกสอดคล้อง(1)-(4) คือ $\begin{bmatrix} a & 2ab \\ 2ac & a \end{bmatrix}$ เมื่อ $bc = a-a^2$

ถ้า $a = 0$ จะได้ว่า $d = 0$ และ จาก (7) และ (8)

จะได้ $b = 0$ และ $c = 0$

ดังนั้น $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

จากทฤษฎี 2.2.5 จะได้ว่า $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ซิงกูลาร์

ถ้า $a = 1$ จะได้ว่า $d = 1$ และ จาก (7) และ (8)

$2b = b$, $2c = c$

ดังนั้น $b = 0$ และ $c = 0$ นั่นคือ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

แต่เนื่องจาก $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$

ดังนั้นโดยทฤษฎี 2.2.10 จะได้ว่า

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์

<u>พิจารณาเมื่อ $a \neq 0,\ a \neq 1$</u> จาก (7) และ (8)

จะได้ว่า $2ab = b$ และ $2ac = c$ ดังนั้น $b = 0$ และ $c = 0$

ทำให้ $bc = 0$

และจาก $a \neq 0,\ a \neq 1$ จะได้ว่า $a-a^2 \neq 0$

จาก (1) ทำให้ $bc = a-a^2$ ไม่จริง

สรุปได้ว่าเมื่อ $a \neq 0$ และ $a \neq 1$ จะไม่มีคำตอบที่สอดคล้องกับสมการ (1) - (4)

ดังนั้นเมตริกซ์ซิงกูลาร์ที่มีคุณสมบัติเป็นเมตริกซ์ไอเดมโพเทนท์คือ รูปทั่วไปของเมตริกซ์ซิงกูลาร์ขนาด 2x2 ที่เป็นเมตริกซ์จำนวนเต็มและมีคุณสมบัติเป็นเมตริกซ์ไอเดมโพเทนท์ คือ

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} a & \frac{a-a^2}{c} \\ c & 1-a \end{bmatrix}$$

เมื่อ $a, b, c \in Z$ โดยที่ $a \neq 0,1$ และ $\frac{a-a^2}{c} \in Z$

ดังนั้น $T_2(Z) = \{A / A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$

หรือ $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} a & \frac{a-a^2}{c} \\ c & 1-a \end{bmatrix}$

เมื่อ $a, b, c \in Z$ โดยที่ $a \neq 0, 1$ และ $\frac{a-a^2}{c} \in Z\}$

<u>ทฤษฎี 4.2.1</u> ให้ $T_2(Z)$ เป็นเซตของเมทริกซ์ซิงกูลาร์ขนาด 2x2 ที่เป็นเมทริกซ์จำนวนเต็มและมีคุณสมบัติเป็นเมทริกซ์ไอเดมโพเทนท์ จะได้ว่า

สำหรับ $A, B, C \in T_2(Z)$ และ $k \in Z^+$, $A^k + B^k = C^k$ ก็ต่อเมื่อ A หรือ B เป็นเมทริกซ์ศูนย์

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ $T_2(Z) = \{ X/X = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$

หรือ $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

หรือ $\begin{bmatrix} a & \frac{a-a^2}{c} \\ c & 1-a \end{bmatrix}$ เมื่อ $a, b, c \in Z$

โดยที่ $a \neq 0, 1$ และ $\frac{a-a^2}{c} \in Z \}$

($\longrightarrow$) ให้ $A, B, C \in T_2(Z)$ และ $k \in Z^+$ ซึ่ง $A^k + B^k = C^k$

จะได้ว่า $A + B = C$

สมมุติว่า A และ B ไม่เป็นเมทริกซ์ศูนย์ จะได้ว่า A, B

อยู่ในรูป $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$

หรือ $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} a & \frac{a-a^2}{c} \\ c & 1-a \end{bmatrix}$

เมื่อ $a, b, c \in Z^+$ โดยที่ $a \neq 0,1$ และ $\frac{a-a^2}{c} \in Z$

กรณี 1 $A = B$

พิจารณา $A + B$ ได้ 5 แบบ คือ

1.1 $A + B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2b \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$

1.2 $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2c & 2 \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$

1.3 $A + B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$

1.4 $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2c & 0 \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$

1.5 $A + B = \begin{bmatrix} a & \frac{a-a^2}{c} \\ c & 1-a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & \frac{a-a^2}{c} \\ c & 1-a \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2a & 2(\frac{a-a^2}{c}) \\ 2c & 2(1-a) \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

<u>กรณี 2 $A \neq B$</u> แยกพิจารณา A เป็นได้ 5 แบบ ดังนี้

2.1 เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ดังนั้น B เป็นได้ 5 แบบ และ

พิจารณา $A + B$ ดังนี้

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b+c \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 2 \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b+c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & \frac{a-a^2}{c} \\ c & 1-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b+\frac{a-a^2}{c} \\ c & 1-a \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

ทำนองเดียวกับ 2.1 จะได้ว่า

2.2 เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 2 \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b+c & 2 \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b+c & 1 \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & \frac{a-a^2}{b} \\ b & 1-a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & \frac{a-a^2}{b} \\ b+c & 2-a \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

2.3 เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b+c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & b+c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & \frac{a-a^2}{c} \\ c & 1-a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+a & b+\frac{a-a^2}{c} \\ c & 1-a \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

2.4 เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b+c & 1 \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ b+c & 0 \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & \frac{a-a^2}{b} \\ b & 1-a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+a & \frac{a-a^2}{b} \\ b+c & 1-a \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

2.5 เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a & \frac{a-a^2}{c} \\ c & 1-a \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$A + B = \begin{bmatrix} a & \frac{a-a^2}{c} \\ c & 1-a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b+\frac{a-a^2}{c} \\ c & 2-a \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a & \frac{a-a^2}{c} \\ c & 1-a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & \frac{a-a^2}{c} \\ b+c & 2-a \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a & \frac{a-a^2}{c} \\ c & 1-a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+1 & b+\frac{a-a^2}{c} \\ c & 1-a \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a & \frac{a-a^2}{c} \\ c & 1-a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+1 & \frac{a-a^2}{c} \\ b+c & 1-a \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a & \frac{a-a^2}{c} \\ c & 1-a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & \frac{d-d^2}{b} \\ b & 1-d \end{bmatrix}, \text{ เมื่อ } d \in Z^+$$

$$= \begin{bmatrix} a+d & \frac{a-a^2}{c} + \frac{d-d^2}{b} \\ b+c & 2-(a+d) \end{bmatrix} \notin T_2(Z)$$

จากกรณี 1 และ 2 จะได้ว่า

ไม่มี $C \in T_2(Z)$ ที่ $A + B = C$ เกิดการขัดแย้ง

สรุปได้ว่า A หรือ B ต้องเป็นเมตริกซ์ศูนย์

(<—) ให้ A หรือ B เป็นเมตริกซ์ศูนย์

<u>กรณี 1</u> A เป็นเมตริกซ์ศูนย์

ให้ $B = C$ ดังนั้น $A + B = C$

ทำให้ได้ว่า สำหรับ $k \in Z^+$, $A^k + B^k = C^k$

<u>กรณี 2</u> B เป็นเมตริกซ์ศูนย์

ให้ $A = C$ ดังนั้น $A + B = C$

ทำให้ได้ว่า สำหรับ $k \in Z^+$, $A^k + B^k = C^k$

จากกรณี 1 และ 2 จะได้ว่า สำหรับ $A, B, C \in T_2(Z)$

และ $k \in Z^+$, $A^k + B^k = C^k$ □

<u>ตัวอย่าง 4.2.1</u> จงหาเมตริกซ์ซิงกูลาร์ขนาด 2x2 ที่สอดคล้องกับสมการ

$$A^k + B^k = C^k, k \in Z^+ \text{ โดยที่ } A, B, C \in M_2(Z)$$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $A = C = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

พิจารณา $A^2 = C^2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4-6 & 2-3 \\ -12+18 & -6+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = C = A$$

และ $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B$

แสดงว่า A, B, C เป็นเมตริกซ์ไอเดมโพเทนท์

จาก $A = C = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ โดยนิยาม 2.2.16

จะได้ว่า $\det A = \det C = -6+6 = 0$

ดังนั้นโดยทฤษฎี 2.2.9 จะได้ว่า A, C เป็นเมตริกซ์ซิงกูลาร์

จาก $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ โดยทฤษฎี 2.2.5 จะได้ว่า

B เป็นเมตริกซ์ซิงกูลาร์

พิจารณา $A + B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+0 & -1+0 \\ 6+0 & 3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = C$

จะได้ว่า $A + B = C$ (1)

เพราะว่า A, B, C เป็นเมตริกซ์ไอเดมโพเทนท์โดยข้อสังเกต 2.2.1
จะได้ว่า

$A^k = A,\ B^k = B,\ C^k = C,\ k \in Z^+$

จาก (1) จะได้ว่า $A^k + B^k = C^k,\ k \in Z^+$

นั่นคือ $A^k + B^k = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}^k + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}^k = C^k, k \in Z^+$

แสดงว่ามีเมตริกซ์ซิงกูลาร์ขนาด 2x2 ที่สอดคล้องกับสมการ

$$A^k + B^k = C^k \ , \ k \in Z^+$$

<u>ทฤษฎี 4.2.2</u> ให้ $T_3(Z)$ เป็นเซตของเมตริกซ์ซิงกูลาร์ขนาด 3x3 ที่เป็นเมตริกซ์จำนวนเต็มและมีคุณสมบัติเป็นเมตริกซ์ไอเดมโพเทนท์ จะได้ว่ามีเมตริกซ์ $A, B, C \in T_3(Z)$ ที่ $A^k + B^k = C^k, k \in Z^+$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

โดยทฤษฎี 2.2.5 จะได้ว่า

A, B, C เป็นเมตริกซ์ซิงกูลาร์

พิจารณา $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C$$

แต่เนื่องจาก A, B, C เป็นเมตริกซ์ไอเดมโพเทนท์ขนาด 3x3

โดยข้อสังเกต 2.2.1 จะได้ว่า

$A^k = A$, $B^k = B$, $C^k = C$, $k \in Z^+$

พิจารณา $A^k + B^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = C^k$$

ดังนั้นแสดงว่ามีเมตริกซ์ซิงกูลาร์ขนาด 3x3 ที่สอดคล้องกับ

สมการ $A^k + B^k = C^k$, $k \in Z^+$ โดยที่ $A, B, C \in T_3(Z)$

□

แสดงว่า A, B, C เป็นเมตริกซ์ไอเดมโพเทนท์ขนาด 3x3

นั่นคือ $A, B, C \in T_3(Z)$

<u>ตัวอย่าง 4.2.2</u> จงหาเมตริกซ์ซิงกูลาร์ A, B, C ที่สอดคล้องกับสมการ

$A^k + B^k = C^k$, $k \in Z^+$ เมื่อ $A, B, C \in T_4(Z)$

<u>วิธีทำ</u> จากตัวอย่างที่ 4.2.1 จะได้ว่า มีเมตริกซ์ซิงกูลาร์ขนาด 2x2 ที่มีคุณสมบัติเป็นเมตริกซ์ ไอเดมโพเทนท์ ที่

$$\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 6 & 3\end{bmatrix}^k + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix}-2 & -1\\ 6 & 3\end{bmatrix}^k$$

ให้ $A_1 = \begin{bmatrix}-2 & -1\\ 6 & 3\end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $C_1 = \begin{bmatrix}-2 & -1\\ 6 & 3\end{bmatrix}$

และ $A = A_1 \oplus B_1$; $B = B_1 \oplus A_1$, $C = C_1 \oplus C_1$

จะได้ว่า $A = \begin{bmatrix}-2 & -1 & 0 & 0\\ 6 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 6 & 3\end{bmatrix}$,

$$C = \begin{bmatrix}-2 & -1 & 0 & 0\\ 6 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 6 & 3\end{bmatrix}$$

พิจารณา $A^k + B^k = \begin{bmatrix}-2 & -1 & 0 & 0\\ 6 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^k + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 6 & 3\end{bmatrix}^k$

$$A^k + B^k = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}^k & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k & \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}^k & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k & \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}^k$$

$$= C^k$$

เพราะฉะนั้นแสดงว่ามีเมตริกซ์ซิงกูลาร์ขนาด 4x4 ที่สอดคล้องกับ

สมการ $A^k + B^k = C^k$ โดยที่ $k \varepsilon Z^+$

<u>ตัวอย่าง 4.2.3</u> จงหาเมตริกซ์ซิงกูลาร์ A, B, C ที่สอดคล้องกับสมการ

$A^k + B^k = C^k$, $k \varepsilon Z^+$ โดยที่ A, B, C

เป็นเมตริกซ์ขนาด 5x5

<u>วิธีทำ</u> จากตัวอย่าง 4.2.1 จะได้ว่ามีเมตริกซ์ซิงกูลาร์ขนาด 2x2

ที่มีคุณสมบัติเป็นเมตริกซ์ไอเดมโพเทนท์ที่

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}^k + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}^k, \ k \varepsilon Z^+$$

จากทฤษฎี 4.2.2 จะได้ว่ามีเมตริกซ์ซิงกูลาร์ขนาด 3x3

ที่มีคุณสมบัติเป็นเมตริกซ์

ไอเดมโพเทนท์ที่ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k, k \varepsilon Z^+$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

และให้ $A = A_1 \oplus A_2$, $B = B_1 \oplus B_2$, $C = A_1 \oplus C_1$

จะได้ว่า $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

พิจารณา $A^k + B^k = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^k + B^k = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = C^k$$

เพราะฉะนั้นแสดงว่ามีเมตริกซ์ซิงกูลาร์ ขนาด 5x5 ที่สอดคล้องกับสมการ $A^k + B^k = C^k$ โดยที่ $k \in Z^+$

ในทำนองเดียวกันกับตัวอย่าง 4.2.2 และ 4.2.3 จะสามารถหาเมตริกซ์ซิงกูลาร์ขนาด $n \times n$, $n \geq 3$ ได้ที่สอดคล้องกับสมการ $A^k + B^k = C^k, k \in Z^+$ โดยสร้างเมตริกซ์ดังกล่าวจาก นิยาม 3.3 และนิยาม 3.4 ดังทฤษฎี 4.2.3 ต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 4.2.3</u> ให้ $T_n(Z)$ เป็นเซตของเมตริกซ์ซิงกูลาร์ขนาด $n \times n$, $n \neq 1$ ที่เป็นเมตริกซ์ จำนวนเต็มที่เป็นเมตริกซ์ไอเดมโพเทนท์ จะได้ว่ามี $A, B, C \in T_n(Z)$ ที่สอดคล้องกับสมการ

$A^k + B^k = C^k$, $k \in Z^+$

<u>พิสูจน์</u> ทำนองเดียวกันกับ ทฤษฎี 4.1.12

□