บทที่ 5

บทสรุปและข้อเสนอแนะ

จากการศึกษา ในบทที่ 3 และบทที่ 4 ทำให้ได้ข้อสรุปดังต่อไปนี้

1. คุณสมบัติเบื้องต้นของการหารแบบยูนิแทรีและการหารแบบธรรมดา คุณสมบัติเหมือนกันเกือบทั้งหมด จะมีแตกต่างกันเพียง 2 ข้อ คือ

ก. ถ้า $a, b, c \in Z^+$ โดยที่ $a/^* b$ และ $a/^* c$ และ $a \geq 2$ แล้ว จะมี $x, y \in Z^+$ ที่ทำให้ $a \not|^* (bx + cy)$ แต่สำหรับการหารธรรมดา ถ้า $a, b, c, x, y \in Z^+$ โดยที่ $a \neq 0$ และ a/b, a/c แล้ว $a/(bx + cy)$

ข. ถ้า $a, b \in Z^+$ และ $a/^* b$ แล้วจะมี $m \in Z^+$ โดยที่ $m > 1$ ที่ทำให้ $am \not|^* bm$ แต่สำหรับการหารธรรมดา ถ้า $a, b, m \in Z$ โดยที่ $a \neq 0$ และ $m \neq 0$ และ a/b แล้ว am/bm

2. สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ n จะมีจำนวนตัวหารแบบยูนิแทรีน้อยกว่าหรือเท่ากับจำนวนตัวหารแบบธรรมดา และจำนวนของตัวหารทั้ง 2 แบบ จะมีจำนวนเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ

ก. n เป็นจำนวนเฉพาะ

ข. n เป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน

3. จำนวนตัวหารแบบยูนิแทรีของจำนวนเต็มบวก n จะมี 2^k จำนวน เมื่อ k เป็นจำนวนของตัวหารที่เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมดของ n

4. สำหรับจำนวนเต็มบวก n โดยที่ $n = p^r$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ r เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว n จะมีตัวหารแบบยูนิแทรีเพียง 2 ตัว คือ 1 และ n

5. จากการวิเคราะห์นิยามของตัวหารแบบยูนิแทรีทำให้ทราบว่า

ก. จำนวนเต็มบวก n ใด ๆ จะมีตัวหารแบบยูนิแทรีอย่างน้อย 2 ตัว คือ 1 และ n

ข. ทุกตัวหารแบบยูนิแทรีของจำนวนเต็มบวก n จะเป็นตัวหารของ n แต่ตัวหารของ n ไม่จำเป็นต้องเป็นตัวหารแบบยูนิแทรีของ n ยกเว้น n จะมีเงื่อนไขเช่นเดียวกับข้อ 2

6. นิยามตัวหารแบบยูนิแทรีร่วมมากจะคล้ายกับนิยามตัวหารร่วมมาก ทำให้เกิดทฤษฎีที่คล้ายคลึงกับทฤษฎีในการหารธรรมดาคือ

ก. ถ้า $a, b \in Z^+$ แล้วจะมี $d \in Z^+$ ซึ่ง

1. $d /^* a$ และ $d /^* b$,

2. ถ้า $c \in Z^+$ โดยที่ $c /^* a$ และ $c /^* b$

แล้ว $c \leq d$

ข. ถ้า $a, b \in Z^+$ แล้ว $(a, b)^* = d$ ก็ต่อเมื่อ

1. $d /^* a$ และ $d /^* b$,

2. ถ้า $c \in Z^+$ โดยที่ $c /^* a$ และ $c /^* b$ แล้ว $c /^* d$

จากข้อ ก. และ ข. ถ้าเปลี่ยนข้อความจากตัวหารแบบยูนิแทรีเป็นตัวหารแบบธรรมดา ก็จะเป็นทฤษฎีในการหารแบบธรรมดา

7. ถ้า $a, b \in Z^+$ แล้ว $(a, b)^* \leq (a, b)$ และ $(a, b)^*$ จะมีค่าเท่ากับ (a, b) ก็ต่อเมื่อ

ก. a และ b ไม่มีตัวหารที่เป็นจำนวนเฉพาะร่วมกัน

หรือ ข. ถ้า $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ และ $b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_k^{b_k}$

โดยที่ $a_i, b_i, k \in W$ โดยที่ $i = 1, 2, \ldots, k$

และ $k > 0$ และ $p_1, p_2, \ldots, p_k$

เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน แล้วมี $m \in Z^+$ โดยที่

$1 \leq m \leq k$ ที่ทำให้ $a_m = b_m \geq 1$ และ

1. ถ้า $a_i > 0$ แล้ว $b_i = a_i$ หรือ $b_i = 0$

หรือ 2. ถ้า $b_i > 0$ แล้ว $a_i = b_i$ หรือ $a_i = 0$

8. นิยามจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์แบบยูนิแทรีจะคล้ายกับนิยามของจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ นั่นคือ ถ้าเปลี่ยนคำว่า ตัวหารแบบยูนิแทรีในนิยามจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์แบบยูนิแทรีเป็นตัวหารธรรมดา ก็จะกลายเป็นนิยามจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

9. ผลบวกของออยเลอร์ ฟาย-ฟังก์ชันของตัวหารแบบยูนิแทรีทั้งหมดของจำนวนเต็มบวก n จะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ n และจะมีค่าเท่ากับ n ก็ต่อเมื่อ

ก. n เป็นจำนวนเฉพาะ

ข. n เป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน

10. ถ้า $n = p^r$ โดยที่ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $r \in Z^+$ แล้วผลบวกของออยเลอร์ ฟาย-ฟังก์ชัน ของตัวหารแบบยูนิแทรีทั้งหมด ของ n จะมีค่าเท่ากับ $1 + (n - \frac{n}{p})$

11. จากการที่เราทราบว่า ผลบวกของออยเลอร์ ฟาย-ฟังก์ชัน ของตัวหารทั้งหมดของจำนวนเต็มบวก n มีค่าเท่ากับ n และจากข้อ 9. จึงทำให้ได้ข้อสรุปว่า ผลบวกของออยเลอร์ ฟาย-ฟังก์ชันของตัวหารแบบยูนิแทรีทั้งหมดของจำนวนเต็มบวกมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ ผลบวกของออยเลอร์ ฟาย-ฟังก์ชัน ของตัวหารทั้งหมดของ n

12. สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ $\phi^*(n) \geq \phi(n)$ และ $\phi^*(n)$ จะเท่ากับ $\phi(n)$ ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนเฉพาะ

13. ถ้า $n = p^r$ โดยที่ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $r \in Z^+$ แล้ว $\phi^*(n) = n - 1$

14. ขยายทฤษฎีของออยเลอร์-แฟร์มาต์ ซึ่งจากทฤษฎีเดิมของออยเลอร์-แฟร์มาต์กล่าวว่า

$$\text{ถ้า } a, n \in Z^+ \text{ และ } (a, n) = 1 \text{ แล้ว } a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

จากทฤษฎี 4.5.1 และ 4.5.2 สามารถขยายได้ว่า

ก. ถ้า $a, n \in Z^+$ โดยที่ $a /^* n$ แล้ว จะมี $k \in Z^+$ โดยที่ $k \geq 2$ ที่ทำให้ $a^k \equiv a \pmod{n}$

ข. ถ้า $a, n \in Z^+$ โดยที่ $0 \leq a \leq n$ และ n เป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน แล้ว จะได้

$$a^{\phi(n)+1} \equiv a \pmod{n}$$

<u>ข้อเสนอแนะ</u>

จากการศึกษาในบทที่ 3 และ 4 ทำให้เกิดแนวความคิดที่ยังเป็นปัญหา 2 ข้อ คือ

<u>ปัญหาข้อที่ 1</u> หาค่าของ $\phi^*(n)$ โดยที่ $n \in Z^+$

พิจารณา $\phi^*(n) \geq \phi(n)$

และ $\phi^*(n) \leq n - 1$

ดังนั้น $n - 1 \geq \phi^*(n) \geq \phi(n)$

และจากผลสรุปข้อ 13 ถ้า $n = p^r$ โดยที่ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $r \in Z^+$ จะได้ $\phi^*(n) = n - 1$ แต่ในกรณี n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ได้อยู่ในรูปนี้ยังไม่ได้พิสูจน์ไว้

<u>ปัญหาข้อที่ 2</u> ถ้า $n, k, \in Z^+$ $d_j/^* n$ โดยที่ $j = 1,2,\ldots,k$

แล้ว $\sum_{j=1}^{k} \phi^*(d_j) \geq n$

<u>พิจารณาจากตัวอย่าง</u>

1. ถ้า $n = 12$

d_j โดยที่ $d_j/^* n$ ได้แก่ 1, 3, 4, 12

จะได้ $\sum_{j=1}^{4} \phi^*(d_j) = \phi^*(1) + \phi^*(3) + \phi^*(4) + \phi^*(12)$

$= 14 > n$

2. ถ้า $n = 7$

d_j โดยที่ $d_j/^* n$ ได้แก่ 1, 7

จะได้ $\sum_{j=1}^{2} \phi^*(d_j) = \phi^*(1) + \phi^*(7) = 7 = n$

3. ถ้า $n = 6$

d_j โดยที่ $d_j/^* n$ ได้แก่ 1, 2, 3, 6

จะได้ $\sum_{j=1}^{n} \phi^*(d_j) = \phi^*(1) + \phi^*(2) + \phi^*(3) + \phi^*(6)$

$= 7 > n$

4. ถ้า $n = 8$

d_j โดยที่ $d_j/^* n$ ได้แก่ 1, 8

จะได้ $\sum_{j=1}^{2} \phi^*(d_j) = \phi^*(1) + \phi^*(8) = 8 = n$

จากผลสรุปในข้อ 4 จะได้ว่า ถ้า $n = p^r$ โดยที่ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $r \varepsilon Z^+$ แล้ว n จะมีตัวหารแบบยูนิแทรีเพียง 2 ตัว คือ 1 และ n และจากผลสรุปข้อ 13 จะได้ว่า $\emptyset^*(n) = n-1$ ดังนั้น จะได้

$$\sum_{n=1}^{2} \emptyset^*(n) = \emptyset^*(1) + \emptyset^*(n) = 1 + n-1 = n$$

นั่นคือ ถ้า $n = p^r$ โดยที่ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $r, k \varepsilon Z^+$ และ $d_j /^* n$ ซึ่ง $j=1, 2, \ldots, k$ แล้ว $\sum_{j=1}^{k} \emptyset^*(d_j) = n$

แต่สำหรับจำนวนเต็มบวกที่อยู่ในรูปอื่นยังไม่ได้พิสูจน์ไว้เช่นเดียวกับปัญหาในข้อที่ 1