บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

ความรู้พื้นฐานที่นำมากล่าวในบทนี้ เป็นนิยาม ทฤษฎีบท และคุณสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับ เมตริกซ์ (Matrix) และดีเทอร์มินันต์ (Determinant) ค่าไอเก็น (Eigenvalue) และไอเก็นเวกเตอร์ (Eigenvector) การหารากที่ n ของ 1 (n^{th} root of unity) ฟังก์ชันถ่ายแบบ (Homomorphism) และฟังก์ชันถอดแบบ (Isomorphism) ซึ่งจำเป็นที่จะนำไปใช้อ้างอิงในบทที่ 3 และ 4 ต่อไป

2.1 <u>เมตริกซ์และดีเทอร์มินันต์</u> (Matrix and Determinant)

<u>นิยาม 2.1.1</u> ทรานสโพสของเมตริกซ์ (Transpose matrix)

ถ้า $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด mxn ซึ่ง a_{ij} เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว ทรานสโพสของ A คือ เมตริกซ์ซึ่งเขียนแทนด้วย A^T โดยที่ $A^T = [a_{ji}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด nxm

<u>ตัวอย่าง 2.1.1</u> กำหนด A จงหา A^T

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$ เป็นทรานสโพสของเมตริกซ์ A

<u>นิยาม 2.1.2</u> เมตริกซ์สมมาตร (Symmetric matrix)

เรียกเมตริกซ์ A ว่า เมตริกซ์สมมาตร ก็ต่อเมื่อ $A^T = A$

<u>ตัวอย่าง 2.1.2</u> กำหนด A จงแสดงว่า A เป็นเมตริกซ์สมมาตร

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $A = A^T$ นั่นคือ A เป็นเมตริกซ์สมมาตร

<u>นิยาม 2.1.3</u> การบวกเมตริกซ์ (Addition of Matrices)

ให้ $A = [a_{ij}]$ และ $B = [b_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ซึ่งมีขนาดเป็น $m \times n$ ผลบวกของเมตริกซ์ A และ B เขียนแทนด้วย $A+B$ กำหนดโดย $A + B = C = [c_{ij}]$ โดยที่ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ เมื่อ $i = 1,2,\ldots,m$ และ $j = 1,2,\ldots,n$

<u>ตัวอย่าง 2.1.3</u> กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 7 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

จงหา $A + B$

$$\text{ดังนั้น } A+B=C = \begin{bmatrix} 3+1 & 3+2 & (-1)+(-4) \\ 7+3 & (-1)+3 & 6+(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -5 \\ 10 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>นิยาม 2.1.4</u> การคูณเมตริกซ์ด้วยสเกลาร์ (The Scalar Multiplication)

ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด mxn และให้ λ เป็นสเกลาร์ (Scalar) ใด ๆ ผลคูณของเมตริกซ์ A และ λ เขียนแทนด้วย λA กำหนดโดย $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$ เมื่อ $i = 1,2,\ldots,m$ และ $j = 1,2,\ldots,n$

<u>ตัวอย่าง 2.1.4</u> กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $\lambda = 4$ จงหา λA

ดังนั้น $\lambda A = \begin{bmatrix} 4(1) & 4(2) \\ 4(0) & 4(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

<u>นิยาม 2.1.5</u> การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์ (The Multiplication of Matrices)

ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด mxn และ $B = [b_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด nxr ผลคูณของเมตริกซ์ A และ B คือเมตริกซ์ที่เขียนแทนด้วย AB เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด nxr ซึ่ง $AB = C = [c_{ij}]$

โดยที่ $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$

เมื่อ $i = 1,2,\ldots,n$ และ $j = 1,2,\ldots,r$

<u>ตัวอย่าง 2.1.5</u> กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

จงหา AB

$$\text{ดังนั้น} \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1x4) + (3x5) \\ (2x4) + (4x5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 28 \end{bmatrix}$$

<u>นิยาม 2.1.6</u> เมตริกซ์ทแยง (Diagonal matrix)

ให้ $D = [d_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn เรียกเมตริกซ์ D ว่าเมตริกซ์ทแยง ก็ต่อเมื่อ $d_{ij} = 0$ เมื่อ $i \neq j$

<u>ตัวอย่าง 2.1.6</u> $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i+2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ทแยง

<u>นิยาม 2.1.7</u> เมตริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix)

ให้ $I = [\delta_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn จะเรียก I ว่า เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ ก็ต่อเมื่อเมตริกซ์ I เป็นเมตริกซ์ทแยง และ $\delta_{ij} = 1$ เมื่อ $i = j$ เมตริกซ์ I เขียนแทนด้วย I_n

<u>ตัวอย่าง 2.1.7</u> $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3x3

<u>นิยาม 2.1.8</u> อินเวอร์สของเมตริกซ์ (Inverse of a Matrix)

ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn ถ้ามีเมตริกซ์ B เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn ซึ่งทำให้ $AB = BA = I_n$ แล้ว จะเรียก B ว่าเป็นอินเวอร์สของเมตริกซ์ A และจะเขียนแทนด้วย A^{-1}

นั่นคือ $B = A^{-1}$ ดังนั้น $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

<u>ตัวอย่าง 2.1.8</u> กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

จงแสดงว่าเมตริกซ์ B เป็นอินเวอร์สของเมตริกซ์ A

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

นั่นคือ เมตริกซ์ B เป็นอินเวอร์สของเมตริกซ์ A

<u>นิยาม 2.1.9</u> เมตริกซ์คอนจูเกต (Conjugate matrix)

ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn เรียกเมตริกซ์ A ว่าเมตริกซ์คอนจูเกต ซึ่งเขียนแทนด้วย $\bar{A}$ โดยที่ $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]$ เมื่อ $\bar{a}_{ij}$ คือคอนจูเกตของ a_{ij}

a_{ij} เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่เขียนแทนด้วย $a + bi$

คอนจูเกตของ a_{ij} เขียนแทนด้วย $a - bi$

<u>ตัวอย่าง 2.1.9</u> กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} i & 3-i \\ 2+i & 1+2i \end{bmatrix}$ จงหา $\bar{A}$

ดังนั้น $A = \begin{bmatrix} -i & 3+i \\ 2-i & 1-2i \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์คอนจูเกต

<u>นิยาม 2.1.10</u> เมตริกซ์ยูนิทารี (Unitary matrix)

ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $n\times n$ จะเรียกเมตริกซ์ A ว่าเป็นเมตริกซ์ยูนิทารี ก็ต่อเมื่อ $A^{-1} = (\bar{A})^T$

<u>ตัวอย่าง 2.1.10</u> กำหนดให้ $A = 1/5 \begin{bmatrix} -1+2i & -4-2i \\ 2-4i & -2-i \end{bmatrix}$

จงแสดงว่าเมตริกซ์ A เป็นยูนิทารีเมตริกซ์

$$A^{-1} = 1/5 \begin{bmatrix} -1-2i & 2+4i \\ -4+2i & -2+i \end{bmatrix}$$

$$A = 1/5\begin{bmatrix} -1-2i & -4+2i \\ 2+4i & -2+i \end{bmatrix}, \quad (A)^T = 1/5\begin{bmatrix} -1-2i & 2+4i \\ -4+2i & -2+i \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $AA^{-1} = A(A)^T = I_2$

<u>นิยาม 2.1.11</u> เมตริกซ์ออร์ธอโกนัล (Orthogonal matrix)

ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn เรียกเมตริกซ์ A ว่าเมตริกซ์ออร์ธอโกนัล ก็ต่อเมื่อ $A^T = A^{-1}$

<u>ตัวอย่าง 2.1.11</u> $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า A เป็นเมตริกซ์ออร์ธอโกนัล

$$A^T = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$A.A^T = 1/2\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} 1/2\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A.A^T = I_n$

นั่นคือ $A^T = A^{-1}$

<u>นิยาม 2.1.12</u> เมตริกซ์เพอมิวเทชัน (Permutation matrix)

ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn เรียกเมตริกซ์ A ว่าเป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน ก็ต่อเมื่อ A ได้จากเมตริกซ์ I_n โดยวิธีเรียงสับเปลี่ยนของแถวหรือหลักของเมตริกซ์ I_n

<u>ตัวอย่าง 2.1.12</u> เมตริกซ์เพอมิวเทชัน ขนาด 3x3 ทั้งหมด ได้แก่

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>ทฤษฎีบท 2.1.1</u> ถ้า P เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน แล้ว P^T เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน

<u>พิสูจน์</u> ให้ $P = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน

ดังนั้นในแต่ละแถวและแต่ละหลักมี 1 เพียงตัวเดียว

$$a_{ij} = 1$$

$$a_{ik} = 0, \quad \forall k \neq j$$

จาก $P = [a_{ij}]$

ดังนั้น $P^T = [a_{ji}]$ สมาชิกของแต่ละแถวและแต่ละหลักมี 1 เพียงตัวเดียว

จะได้ว่า $a_{ji} = 1$

$a_{hi} = 0, \quad \forall h \neq j$

นั่นคือ P^T เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน

<u>ทฤษฎีบท 2.1.2</u> ถ้า P_1, P_2 เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชันแล้ว P_1P_2 เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน

<u>พิสูจน์</u> ให้ $P_1 = [a_{ij}]$, $P_2 = [b_{ij}]$

และ $P_1P_2 = [c_{ij}]$

พิจารณา $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, $i = 1,2,\ldots,n$ และ $j = 1,2,\ldots,n$

$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$

แต่สมาชิกในแต่ละแถวและแต่ละหลักมี 1 เพียงตัวเดียว

นั่นคือ ถ้า $c_{rj} = 1$ แล้ว $c_{sj} = 0$ สำหรับ $r \neq s$

นั่นคือ $P_1P_2 = [c_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน

<u>ทฤษฎีบท 2.1.3</u> ถ้า P เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน แล้ว $PP^T = I_n$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $P = [a_{rs}]$

และ $P^T = [b_{rs}]$

$PP^T = [c_{rs}]$

พิจารณา $c_{rs} = \sum_{j=1}^{n} a_{rj}b_{js}$, $r = 1,2,\ldots,n$ และ $s = 1,2,\ldots,r$

แต่ $a_{rs} = b_{sr}$

ถ้า $r = s$

$c_{rr} = \sum_{j=1}^{n} a_{rj}b_{jr}$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{rj}a_{rj}$$

$$= a_{r1}a_{r1} + a_{r2}a_{r2} + \dots + a_{rn}a_{rn}$$

แต่สมาชิกในตำแหน่งแถวที่ r มีเพียงตำแหน่งเดียวเท่ากับ 1

จึงทำให้ $c_{rr} = 1$ ---------------------------(1)

ถ้า $r \neq s$

$$c_{rs} = \sum_{j=1}^{n} a_{rj}b_{js}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{rj}a_{sj}$$

$$= a_{r1}a_{s1} + a_{r2}a_{s2} + \dots + a_{rn}a_{sn}$$

แต่สมาชิกในหลักที่ j จะเท่ากับ 1 เพียงตัวเดียว

นั่นคือ ถ้า $a_{rj} = 1$ แล้ว $a_{sj} = 0$

จะได้ว่า $c_{rs} = 0$ ---------------------(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า

$$c_{rs} = \begin{cases} 1 & , r = s \\ 0 & , r \neq s \end{cases}$$

นั่นคือ $PP^T = I_n$

<u>ทฤษฎีบท 2.1.4</u> ถ้า P เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน แล้ว $P^T = P^{-1}$

<u>พิสูจน์</u> โดยทฤษฎีบท 2.1.3 $PP^T = I_n$

แต่ $PP^{-1} = I_n$

ดังนั้น $PP^{-1} = PP^T$

$$P^{-1}(PP^{-1}) = P^{-1}(PP^T)$$

นั่นคือ $P^{-1} = P^T$

<u>นิยาม 2.1.13</u> การกระทำเบื้องต้นกับแถว (Elementary Row Operation)

การกระทำเบื้องต้นกับแถว ของเมตริกซ์ A คือ การกระทำแบบใดแบบหนึ่งดังต่อไปนี้

1. การสลับที่ระหว่างสองแถวใด ๆ แทนการสลับที่ระหว่างแถวที่ i และแถวที่ j ด้วย $R_i \dashrightarrow R_j$
2. การคูณแถวใดแถวหนึ่งด้วยสเกลาร์ $\lambda \neq 0$ (เขียนแทนด้วย λR_i)
3. การคูณแถวใดแถวหนึ่งด้วยสเกลาร์ λ แล้วนำไปบวกกับอีกแถวหนึ่ง (เขียนแทนด้วย $\lambda R_i + R_j$, $i \neq j$)

<u>หมายเหตุ</u> ถ้าแทนแถวที่ i ของเมตริกซ์ A ด้วย R_i

และแทนแถวที่ i ของเมตริกซ์ใหม่ด้วย R_i'

<u>ตัวอย่าง 2.1.13</u>

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ และ $\lambda = 2$

ดังนั้นเมตริกซ์ B, C, D เกิดจากการกระทำเบื้องต้นกับแถวของ A ต่อไปนี้คือ

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} R_1' = R_2 \\ R_2' = R_1 \end{matrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_2' = 2R_2$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_2' = 2R_1 + R_2$$

<u>นิยาม 2.1.14</u> การกระทำเบื้องต้นกับหลัก (Elementary Column Operation)

การกระทำเบื้องต้นกับหลักของเมตริกซ์ A คือ การกระทำแบบใดแบบหนึ่งดังต่อไปนี้

1. การสลับที่ระหว่างสองหลักใด ๆ แทนการสลับที่ระหว่างหลักที่ i และหลักที่ j ด้วย $C_i \longleftrightarrow C_j$
2. การคูณหลักใดหลักหนึ่งด้วยสเกลาร์ $\lambda \neq 0$ (เขียนแทนด้วย λC_i)
3. การคูณหลักใดหลักหนึ่งด้วยสเกลาร์ λ แล้วนำไปบวกกับอีกหลักหนึ่ง (เขียนแทนด้วย $\lambda C_i + C_j$, $i \neq j$)

<u>หมายเหตุ</u> ถ้าแทนแถวที่ i ของเมตริกซ์ A ด้วย C_i

และแทนแถวที่ i ของเมตริกซ์ใหม่ด้วย C_i'

<u>ข้อตกลง</u> การกระทำเบื้องต้น (Elementary Operation) คือ การกระทำเบื้องต้นกับแถวหรือหลัก

<u>นิยาม 2.1.15</u> การสมมูลของเมตริกซ์ (Equivalence of Matrices)

เมตริกซ์ A สมมูลกับเมตริกซ์ B ก็ต่อเมื่อ เมตริกซ์ B เกิดจากการกระทำเบื้องต้นกับเมตริกซ์ A หนึ่งครั้ง หรือหลายครั้งก็ได้ เป็นจำนวนจำกัด เขียนแทน เมตริกซ์ A สมมูลกับเมตริกซ์ B ด้วย $A \cong B$

<u>ตัวอย่าง 2.1.15</u> กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

จะพิจารณาว่า A สมมูลกับ B หรือไม่

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad R_2' = 2R_3 + R_2$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad R_1' = R_1 \longleftrightarrow R_3$$

$A_2 = B$

นั่นคือ เมตริกซ์ A สมมูลกับเมตริกซ์ B

<u>นิยาม 2.1.16</u> เมตริกซ์เบื้องต้น (Elementary matrix)

เมตริกซ์เบื้องต้นคือ เมตริกซ์ที่เกิดจากการกระทำเบื้องต้นกับเมตริกซ์เอกลักษณ์หนึ่งครั้ง

<u>ตัวอย่าง 2.1.16</u> กำหนด $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาเมตริกซ์เบื้องต้น

ดังนั้น $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $R_2' = 3R_2$

E_1 เกิดจากการกระทำเบื้องต้นหนึ่งครั้งกับ I_3 จะได้ว่า E_1 เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น

<u>นิยาม 2.1.17</u> เมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ (Nonsingular matrix)

ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด nxn เรียกเมตริกซ์ A ว่า เมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ ก็ต่อเมื่อ A มีอินเวอร์ส

<u>ทฤษฎีบท 2.1.5</u> ให้ A เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn จะได้ A เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ ก็ต่อเมื่อ A สมมูลกับ I_n

<u>นิยาม 2.1.18</u> การจัดลำดับ (Permutations)

ให้ $S = \{1,2,3,\ldots,n\}$ เรียกฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one to one) จาก S ไปบน (onto) S ว่าการจัดลำดับของ S

ถ้า σ เป็นการจัดลำดับของ S แล้ว $\sigma : S \xrightarrow[onto]{1-1} S$

ซึ่งกำหนดโดย $\sigma(i) = j_i$, $i = 1,2,\ldots,n$

เซตของการจัดลำดับทั้งหมดของ S แทนด้วย S_n

ตัวอย่าง 2.1.18 กำหนด $S = \{1,2,3\}$ เซตของการจัดลำดับทั้งหมดของ S คือ

$$S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

นิยาม 2.1.19 ให้ a,b เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $a \neq b$ เรียกคู่อันดับ (a,b) ว่าเป็นอินเวอร์ชัน (Inversion) ก็ต่อเมื่อ $a > b$
และเรียกคู่อันดับ (a,b) ว่า ไม่เป็นอินเวอร์ชัน ก็ต่อเมื่อ $a < b$

นิยาม 2.1.20 กำหนดให้การจัดลำดับ $\sigma = j_1 j_2 \ldots j_n$ ของ $S = \{1,2,\ldots,n\}$
ให้ $Q_\sigma = \{(j_r, j_k) \mid r,k \in S,\ r < k\}$
เรียกจำนวนอินเวอร์ชันใน Q_σ ว่า จำนวนอินเวอร์ชันในการจัดลำดับ σ

ตัวอย่าง 2.1.20 จงหาจำนวนอินเวอร์ชันในการจัดลำดับ 213
จาก $Q_\sigma = \{(2,1),(2,3)(1,3)\}$
นับจำนวนอินเวอร์ชันใน Q_σ จะเห็นว่ามีจำนวนอินเวอร์ชันอยู่ 1 จำนวน คือ คู่อันดับ (2,1) ดังนั้นจำนวนอินเวอร์ชันของ 213 เท่ากับ 1

นิยาม 2.1.21 การจัดลำดับคู่ และการจัดลำดับคี่ (Even and Odd Permutations) จะเรียกการจัดลำดับซึ่งมีจำนวนอินเวอร์ชันทั้งหมดเป็นจำนวนคู่ว่า การจัดลำดับคู่ และจะเรียกการจัดลำดับซึ่งมีจำนวนอินเวอร์ชันทั้งหมดเป็นจำนวนคี่ว่า การจัดลำดับคี่

<u>ตัวอย่าง 2.1.20</u> พิจารณาการจัดลำดับใน S_3 = {123, 132,231,213,312,321}

123 เป็นการจัดลำดับคู่ เพราะมีจำนวนอินเวอร์ชันทั้งหมดเท่ากับ 0

231 เป็นการจัดลำดับคู่ เพราะมีจำนวนอินเวอร์ชันทั้งหมดเท่ากับ 2

312 เป็นการจัดลำดับคู่ เพราะมีจำนวนอินเวอร์ชันทั้งหมดเท่ากับ 2

132 เป็นการจัดลำดับคี่ เพราะมีจำนวนอินเวอร์ชันทั้งหมดเท่ากับ 1

213 เป็นการจัดลำดับคี่ เพราะมีจำนวนอินเวอร์ชันทั้งหมดเท่ากับ 1

321 เป็นการจัดลำดับคี่ เพราะมีจำนวนอินเวอร์ชันทั้งหมดเท่ากับ 3

<u>นิยาม 2.1.22</u> ดีเทอร์มินันต์ (Determinant)

ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn $\sigma \in S_n$ โดยที่ $\sigma = j_1\ j_2 \cdots j_n$ และ $\operatorname{sgn}\sigma = +1$ เมื่อ σ เป็นการจัดลำดับคู่ $\operatorname{sgn}\sigma = -1$ เมื่อ σ เป็นการจัดลำดับคี่ แล้ว ดีเทอร์มินันต์ของเมตริกซ์ A เขียนแทนด้วย det A หรือ |A|

โดยที่ $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{1\sigma(1)}\ a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

<u>ตัวอย่าง 2.1.21</u> ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด 2x2

สมาชิกของ S_2 มี 12, 21

12 เป็นการจัดลำดับคู่ ดังนั้นเทอม $a_{11}a_{22}$ จะมีเครื่องหมายเป็นบวก

21 เป็นการจัดลำดับคี่ ดังนั้นเทอม $a_{12}a_{21}$ จะมีเครื่องหมายเป็นลบ

ดังนั้น $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

<u>การกระจายโดยโคแฟกเตอร์</u>

<u>นิยาม 2.1.23</u> ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn และให้ M_{ij} เป็นเมตริกซ์ย่อยของ A ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของเมตริกซ์ A ออก ดังนั้น M_{ij} จะมีขนาด $(n-1) \times (n-1)$ และเราจะเรียก $\det M_{ij}$ ว่าไมเนอร์ของ a_{ij} และจะเรียก $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ ว่าโคแฟกเตอร์ของ a_{ij}

<u>ทฤษฎีบท 2.1.6</u> ถ้า $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn ดังนั้น

$$\det A = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

(det A เมื่อกระจายตามแถวที่ i ของ A)

หรือ $$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

(det A เมื่อกระจายตามหลักที่ j ของ A)

<u>ทฤษฎีบท 2.1.7</u> ถ้า $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn แล้ว $\det A = \det A^T$

<u>ทฤษฎีบท 2.1.8</u> ถ้า $D = [d_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ทแยงขนาด nxn แล้ว

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}$$ โดยที่ $\prod$ คือ สัญลักษณ์แทนผลคูณ

<u>ทฤษฎีบท 2.1.9</u> ถ้า A เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ $\det A^{-1} = 1/\det A$

<u>นิยาม 2.1.24</u> เมตริกซ์คล้าย (Similar Matrix)

ให้ A และ B เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn เมตริกซ์ A คล้ายกับเมตริกซ์ B ก็ต่อเมื่อมีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ P

โดยที่ $A = P^{-1}BP$ หรือ $PA = BP$ ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $A \sim B$

<u>ตัวอย่าง 2.1.24</u>

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

จงแสดงว่าเมตริกซ์ A คล้ายกับเมตริกซ์ B

มี $P = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ และ $P^{-1} = \begin{bmatrix} -3/12 & 1/12 \\ 0 & 2/12 \end{bmatrix}$ ซึ่ง

$$P^{-1}BP = 1/12 \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = A$$

ดังนั้น เมตริกซ์ A คล้ายกับเมตริกซ์ B

<u>ทฤษฎีบท 2.1.10</u> ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ที่คล้ายกันแล้ว det A = det B

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า เมตริกซ์ A คล้ายกับเมตริกซ์ B ดังนั้นจะมีเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ P โดยที่ $A = P^{-1}BP$

$$\begin{aligned} \therefore \det A &= \det P^{-1}BP \\ &= \det P^{-1} \det B \det P \\ &= \det(P^{-1}P) \det B \\ &= \det I_n \det B \\ &= \det B \end{aligned}$$

2.2 <u>ค่าไอเก็น และไอเก็นเวกเตอร์</u> (Eigenvalue and Eigenvector)

<u>นิยาม 2.2.1</u> ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn บนฟิลด์ F และ $\lambda \in F$ แล้วจะเรียก $X \neq \underline{0}$ ว่าไอเก็นเวกเตอร์ ของเมตริกซ์ A ก็ต่อเมื่อมีสเกลาร์ λ โดยที่ $AX = \lambda X$ และจะเรียก λ ว่าค่าไอเก็นของเมตริกซ์ A โดยที่ $\underline{0}$ แทนเวกเตอร์ศูนย์

<u>ตัวอย่าง 2.2.1</u> จงหาค่าไอเก็นและไอเก็นเวกเตอร์ของ A ถ้ากำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

จะต้องหา λ และ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$

ที่ทำให้ $AX = \lambda X$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $x_1 + 2x_2 = \lambda x_1$ $\quad (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0$

หรือ

$2x_1 + x_2 = \lambda x_2$ $\quad 2x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0$

ระบบสมการนี้ จะมีรากที่ไม่เป็นศูนย์ก็ต่อเมื่อ

$$\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

หรือ $(1-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda-3)(\lambda+1) = 0$$

$$\lambda = 3, -1$$

แสดงว่า $\lambda = -1$ และ 3 เป็นค่าไอเก็นของ A

จะต้องหาไอเก็นเวกเตอร์

ถ้า $\lambda = -1$, $2x_1 + 2x_2 = 0$

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$\therefore \quad x_1 = -x_2$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ไอเก็นเวกเตอร์ของ A ที่เกี่ยวข้องกับ -1 คือ $x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

เมื่อ x_2 มีค่าใด ๆ

ถ้า $\lambda = 3$ ดังนั้น $-2x_1 + 2x_2 = 0$

$$-x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ไอเก็นเวกเตอร์ของ A ที่เกี่ยวข้องกับ 3 คือ $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

เมื่อ x_1 มีค่าใด ๆ

<u>นิยาม 2.2.2</u> ให้ A เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ บนฟิลด์ F คาแรคเตอริสติกโพลิโนเมียลของ A คือ $\det(\lambda I_n - A)$ และเรียกสมการ $\det(\lambda I_n - A) = 0$ ว่าเป็นสมการคาแรกเตอริสติกของ A

<u>ทฤษฎีบท 2.2.1</u> ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ จะทำ A ให้เป็นเมตริกซ์ทแยงได้ก็ต่อเมื่อเมตริกซ์ A คล้ายกับเมตริกซ์ทแยง

<u>ทฤษฎีบท 2.2.2</u> ถ้าให้ $B = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ โดยที่ b_j , $j = 1,2,\ldots,n$ เป็นหลักที่ j ของ B แล้ว สำหรับเมตริกซ์ A ขนาด $n \times n$

$$AB = A[b_1, b_2, \ldots, b_n] = [Ab_1, Ab_2, \ldots, Ab_n]$$

<u>ตัวอย่าง 2.2.2</u>

กำหนด $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

B จะมีเวกเตอร์หลัก คือ $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right]$

<u>ทฤษฎีบท 2.2.3</u> ถ้า B เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn โดยที่ $B = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ และให้ $c_1, c_2, \dots, c_n$ แทนสเกลาร์แล้ว

$$[c_1b_1\ c_2b_2, \dots, c_nb_n] = [b_1, b_2, \dots, b_n]\begin{bmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่าง 2.2.3</u> กำหนด $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ $c_1 = 2$, $c_2 = -3$ จะได้ว่า

$$[c_1b_1, c_2b_2] = \begin{bmatrix} 2 & -15 \\ 6 & -27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

<u>ทฤษฎีบท 2.2.4</u> ถ้า A เป็นเมตริกซ์สมมาตรขนาด nxn และค่าไอเก็นของ A แตกต่างทุกตัวแล้ว สามารถเปลี่ยน A เป็นเมตริกซ์ทแยงได้

<u>ทฤษฎีบท 2.2.5</u> ถ้า A เป็นเมตริกซ์สมมาตร จะมี P เป็นเมตริกซ์ออร์ธอโกนัล ที่ทำให้ $D = P^{-1}AP = P^{T}AP$ เป็นเมตริกซ์ทแยง และค่าไอเก็นของ A จะอยู่บนเส้นทแยงมุมหลักของ D

2.3 <u>รากที่ n ของ 1</u> (n^{th} root of unity)

<u>นิยาม 2.3.1</u> ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก และ C เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน แล้วจะมี $w_n \in C$ โดยที่ $w_n^n = 1$ เรียก w_n ว่ารากที่ n ของ 1

<u>นิยาม 2.3.2</u> เซตของรากที่ n ของ 1 คือ เซตของรากของสมการ $x^n - 1 = 0$

<u>การหารากที่ n ของ 1</u>

1. สามารถเขียนในรูปจำนวนเชิงซ้อน จะได้ $1 + 0i$

$$1 + 0i = r\cos\theta + i\sin\theta \quad \text{เมื่อ } r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \theta = 0$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

$$= \cos 0 + i\sin 0$$

$$= \cos(0 + 2k\pi) + i\sin(0 + 2k\pi), \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

ให้ $p(\cos\phi + i\sin\phi)$ เป็นรากที่ n ของ 1

$$p^n(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos(0 + 2k\pi) + i\sin(0 + 2k\pi)$$

จะได้ว่า $p = 1$ และ $n\phi = 2k\pi$

$$\phi = 2k\pi/n$$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $w_n = \cos 2\pi/n + i\sin 2\pi/n$

และพบว่า $1, w_n, w_n^2, w_n^3, \ldots, w_n^{n-1}$ จะเป็นรากที่ n ของ 1 ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด เรียก w_n ว่าเป็นรากที่ n ของ 1 ที่เป็นพริมิทิฟ

<u>ตัวอย่าง 2.3.1</u> จงหารากที่สามของ 1

จาก $w_3 = \cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3 = -1/2 + \sqrt{3}\, i/2$

นั่นคือ $1, -1/2 + \sqrt{3}\, i/2$, $-1/2 - \sqrt{3}\, i/2$ เป็นรากที่สามของ 1

2.4 <u>ฟังก์ชันถ่ายแบบ</u> (Homomorphism)

<u>นิยาม 2.4.1</u> ถ้า $(G, +)$ และ $(H, \oplus)$ เป็นกรุ๊ป

f เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบจาก $(G, +)$ ไปยัง $(H, +)$ ก็ต่อเมื่อ

1. $f : G \longrightarrow H$: เป็นฟังก์ชันจาก G ไปยัง H
2. ถ้า $x, y \in G$ แล้ว $f(x+y) = f(x) \oplus f(y)$

<u>นิยาม 2.4.2</u> ถ้า $(R, +, .)$ และ $(S, \oplus, \odot)$ เป็นริง

f เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบจาก $(R, +, .)$ ไปยัง $(S, +, .)$ ก็ต่อเมื่อ

1. $f : R \longrightarrow S$ เป็นฟังก์ชันจาก R ไปยัง S
2. ถ้า $x, y \in R$ แล้ว $f(x+y) = f(x) \oplus f(y)$

   และ $f(x.y) = f(x) \odot f(y)$

2.5 <u>ฟังก์ชันถอดแบบ</u> (Isomorphism)

<u>นิยาม 2.5.1</u> ถ้า $(G, +)$ และ $(H, \oplus)$ เป็นกรุ๊ป

f เป็นฟังก์ชันถอดแบบจากกรุ๊ป $(G, +)$ ไปยัง $(H, \oplus)$ ก็ต่อเมื่อ

1. $f : G \rightarrow H$: เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จาก G ไปบน H

2. ถ้า $a, b \in G$ แล้ว $f(a+b) = f(a) \oplus f(b)$

เรียก G และ H ว่าเป็นกรุ๊ปที่ถอดแบบกันได้ก็ต่อเมื่อ มี f เป็นฟังก์ชันถอดแบบ จากกรุ๊ป $(G, +)$ ไปยัง $(H, \oplus)$ และเขียนแทนด้วย $G \cong H$

<u>นิยาม 2.5.2</u> ถ้า $(G, +, .)$ และ $(H, \oplus, \odot)$ เป็นริง f เป็นฟังก์ชันถอดแบบจากริง $(G, +, .)$ ไปยัง $(H, \oplus, \odot)$ ก็ต่อเมื่อ

1. $f : G \rightarrow H$: เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก G ไปบน H

2. ถ้า $a,b \in G$ แล้ว $f(a+b) = f(a) \oplus f(b)$

   และ $f(a.b) = f(a) \odot f(b)$

เรียก G และ H ว่าเป็นริงที่ถอดแบบกันได้ ก็ต่อเมื่อมี f เป็นฟังก์ชันถอดแบบจากริง $(G, +, .)$ ไปยัง $(H, \oplus, \odot)$ เขียนแทนด้วย $G \cong H$

<u>ทฤษฎีบท 2.5.1</u> เซตของเมตริกซ์เพอมิวเทชันขนาด $n \times n$ จะทำให้เกิดกรุ๊ปสำหรับการคูณและถอดแบบกับกรุ๊ป S_n