บทที่ 3

เซอร์คูลันต์เมตริกซ์และโอเมกา-เซอร์คูลันต์เมตริกซ์

การศึกษาในบทนี้ เป็นการศึกษาเกี่ยวกับคุณสมบัติของเซอร์คูลันต์เมตริกซ์และโอเมกา-เซอร์คูลันเมตริกซ์

3.1 <u>คุณสมบัติของเซอร์คูลันต์เมตริกซ์</u> (Circulant matrix)

<u>นิยาม 3.1.1</u> เซอร์คูลันต์เมตริกซ์หรือไซคลิกเมตริกซ์

ให้ A เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn ซึ่งมี $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นสมาชิกในแถวที่ 1 ของเมตริกซ์ A ดังนั้น

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & & & & \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $a_1, a_2, \ldots, a_n \in C$ เรียก A ว่าเป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

<u>ตัวอย่าง 3.1.1</u> ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 2i & -3 \\ -3 & 2i \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>ทฤษฎีนำ 3.1.1</u> ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก F เป็นฟิลด์ที่ประกอบด้วยรากที่ n ของ 1 ที่เป็นพริมิทีฟ แทนด้วย w_n สำหรับ $r = 1,2,\ldots,n$ และ $s = 1,2,\ldots,n$ ให้ $\delta_{rs} = 1$ เมื่อ $r = s$ และ $\delta_{rs} = 0$ เมื่อ $r \neq s$ แล้ว $1/n \sum_{j=1}^{n} w_n^{(j-1)(s-r)} = \delta_{rs}$

<u>พิสูจน์</u> 1. สำหรับ $r \neq s$

พิจารณา $(w_n^{s-r})^n = (w_n^n)^{s-r} = 1^{s-r} = 1$

ดังนั้น $1/n \sum_{j=1}^{n} w_n^{(j-1)(s-r)} = 1/n \sum_{j=1}^{n} (w_n^{s-r})^{(j-1)}$

$= 1/n\,[1 + w_n^{s-r} + w_n^{s-r} + \ldots + w_n^{n(s-r)}]$

$$= [\ 1 - (w_n^{s-r})^n\ ]/n[1 - w_n^{s-r}]$$

$$= 1\ [\ \ 1 - 1\ \ ]/n[1 - w_n^{s-r}]$$

$$= 0$$

2. สำหรับ $r = s$

ดังนั้น
$$1/n \sum_{j=1}^{n} w_n^{(j-1)(s-r)} = 1/n \sum_{j=1}^{n} w_n^{(j-1)(0)}$$
$$= 1/n \sum_{j=1}^{n} w_n^{0}$$
$$= 1/n\ \underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n \text{ พจน์}}$$
$$= n/n\ = 1$$

นั่นคือ
$$\delta_{rs} = 1/n \sum_{j=1}^{n} w_n^{(j-1)(s-r)}$$

<u>ทฤษฎีนำ 3.1.2</u> ถ้า L_n เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn ที่มีสมาชิกในแถวที่ r และหลักที่ s เป็น λ_{rs} ซึ่ง $\lambda_{rs} = 1/n\ w_n^{-(r-1)(s-1)}$ และ M_n เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn ที่มีสมาชิกในแถวที่ r และหลักที่ s เป็น μ_{rs} ซึ่ง $\mu_{rs} = w_n^{(r-1)(s-1)}$ สำหรับ $r = 1,2,\ldots,n$ และ $s = 1,2,\ldots,n$ แล้ว $L_n M_n = I_n$

<u>พิสูจน์</u> พิจารณาสมาชิกของ $L_n M_n$ คือ

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{rj}\,\mu_{js} = \sum_{j=1}^{n} (1/n\ w_n^{-(r-1)(j-1)})(w_n^{(j-1)(s-1)})$$
$$= 1/n \sum_{j=1}^{n} w_n^{-(r-1)(j-1)+(j-1)(s-1)}$$
$$= 1/n\ \ w_n^{(j-1)(s-r)}$$
$$= \delta_{rs}$$

โดยทฤษฎีนำ 3.1.1 จะได้ว่า $L_n M_n = I_n$ และ $L_n = M_n^{-1}$

ตัวอย่าง 3.1.2 จงสร้าง M_3

ให้ w_3 เป็นรากที่ 3 ของ 1 ที่เป็นพริมิทีฟ

ดังนั้น $w_3 = -1/2 + \sqrt{3}\, i/2$

$w_3^2 = -1/2 - \sqrt{3}\, i/2$

สมาชิกในแถวที่ r และหลักที่ s ของ M_3 คือ $\mu_{rs} = w_3^{(r-1)(s-1)}$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_3 & w_3^2 \\ 1 & w_3^2 & w_3 \end{bmatrix}$$

สร้าง L_3

สมาชิกในแถวที่ r และหลักที่ s ของ L_3 คือ $\lambda_{rs} = 1/3 \ w_3^{-(r-1)(s-1)}$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3w_3 & 1/3w_3^2 \\ 1/3 & 1/3w_3^2 & 1/3w_3 \end{bmatrix}$$

$$M_3L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_3 & w_3^2 \\ 1 & w_3^2 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3w_3 & 1/3w_3^2 \\ 1/3 & 1/3w_3^2 & 1/3w_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I_3$$

นั่นคือ $M_3L_3 = I_3$ ดังนั้น $L_3 = M_3^{-1}$

<u>ตัวอย่าง 3.1.3</u> จงสร้าง M_4

ให้ w_4 เป็นรากที่ 4 ของ i ที่เป็นพริมิทีฟ

$\therefore \; w_4 = i$

โดยที่ $i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^6 = -1,\ i^9 = i$

μ_{rs} เป็นสมาชิกในแถวที่ r และหลักที่ s ของ M_4 โดยที่

$\mu_{rs} = w_4^{(r-1)(s-1)}$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

สร้าง L_4

λ_{rs} เป็นสมาชิกในแถวที่ r และหลักที่ s ของ L_4 โดยที่

$\lambda_{rs} = 1/4 \; w_4^{-(r-1)(s-1)}$

$$L_4 = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4i & -1/4 & -1/4i \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4i & -1/4 & 1/4i \end{bmatrix}$$

$$M_4L_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4i & -1/4 & -1/4i \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4i & -1/4 & 1/4i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I_4$$

นั่นคือ $M_4 L_4 = I_4$ ดังนั้น $M_4^{-1} = L_4$

<u>ทฤษฎีบท 3.1.1</u> กำหนดให้ A และ D เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn บนฟิลด์ F โดยที่ $AM_n = M_n D$ แล้วจะได้ว่า A เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ ก็ต่อเมื่อ D เป็นเมตริกซ์ทแยง

<u>พิสูจน์</u> ให้ a_{rs} เป็นสมาชิกในแถวที่ r และหลักที่ s ของเมตริกซ์ A และ d_{rs} เป็นสมาชิกในแถวที่ r และหลักที่ s ของเมตริกซ์ D

(1) ให้ A เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ จะแสดงว่า D เป็นเมตริกซ์ทแยง

จาก $AM_n = M_n D$ จะได้ว่า $D = M_n^{-1} AM_n$

พิจารณา $d_{rs} = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_{rj})(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \mu_{ks})$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\lambda_{rj})(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} w_n^{(k-1)(s-1)})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_{rj} \sum_{k=j}^{n+j-1} a_{jk} w_n^{(k-1)(s-1)}$$

$$= 1/n \sum_{j=1}^{n} w_n^{-(r-1)(j-1)} \sum_{k=1}^{n} a_{j,j-1+k} w_n^{(j-1+k-1)(s-1)}$$

$$= 1/n \sum_{j=1}^{n} w_n^{(j-1)(s-r)} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} w_n^{(k-1)(s-1)}$$

$$= \delta_{rs} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} w_n^{(k-1)(s-1)}$$

โดยทฤษฎีนำ 3.1.1 จะได้ว่า $\delta_{rs} = 0$ เมื่อ $r \neq s$

นั่นคือ D เป็นเมตริกซ์ทแยง

(2) กำหนดให้ D เป็นเมตริกซ์ทแยงจะแสดงว่า A เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

จาก $AM_n = M_nD$ จะได้ว่า $A = M_nDM_n^{-1}$

ให้ d_{rs} เป็นสมาชิกแถวที่ r และหลักที่ s ของ D โดยที่

$$d_{rs} = d_{rr}\delta_{rs}$$

พิจารณา $a_{rs} = \sum_{j=1}^{n} \mu_{rj} \sum_{k=1}^{n} d_{jj} \delta_{jk} \lambda_{ks}$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \mu_{rj} d_{jj} \delta_{jk} \lambda_{ks}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mu_{rj} d_{jj} \lambda_{js}$$

$$= 1/n \sum_{j=1}^{n} w_n^{(r-1)(j-1)} d_{jj} w_n^{-(j-1)(s-1)}$$

$$= 1/n \sum_{j=1}^{n} d_{jj} w_n^{(j-1)(r-s)}$$

a_{rs} เป็นสมาชิกในแถวที่ r และหลักที่ s ของ A

และ $a_{r's'}$ เป็นสมาชิกในแถวที่ r' และหลักที่ s' ของ A

จะได้ว่า $a_{r's'} = 1/n \sum_{j=1}^{n} d_{jj} w_n^{(j-1)(r'-s')}$

ดังนั้น $a_{rs} = a_{r's'}$ ก็ต่อเมื่อ $(r-s) = (r'-s') \pmod{n}$

จะได้ว่า A เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ โดยที่ $a_{rs} = 1/n \sum_{j=1}^{n} d_{jj} w_n^{(j-1)(r-s)}$

<u>ตัวอย่าง 3.1.4</u> ให้ A เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ที่มีขนาด 3x3 และ $AM_3 = M_3D$

โดยที่ $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ จะต้องแสดงว่า D เป็นเมตริกซ์ทแยง

จาก $AM_3 = M_3D$

จะได้ว่า $M_3^{-1}AM_3 = D$

$$M_3^{-1}AM_3 = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3w_3 & 1/3w_3^2 \\ 1/3 & 1/3w_3^2 & 1/3w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_3 & w_3^2 \\ 1 & w_3^2 & w_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3w_3 & 1/3w_3^2 \\ 1/3 & 1/3w_3^2 & 1/3w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 3+4w_3+2w_3^2 & 3+4w_3^2+2w_3 \\ 9 & 2+3w_3+4w_3^2 & 2+3w_3^2+4w_3 \\ 9 & 4+2w_3+3w_3^2 & 4+2w_3^2+3w_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9\sqrt{3}i & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}i \end{bmatrix} = D$$

ดังนั้น D เป็นเมตริกซ์ทแยง

<u>ทฤษฎีบท 3.1.2</u> เซตของเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ขนาด nxn บนฟิลด์ F จะเป็นริงสลับที่ภายใต้การบวกและการคูณเมตริกซ์ ซึ่งถอดแบบกับริงของเซตของเมตริกซ์ทแยงขนาด nxn บนฟิลด์ F

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ $\mathscr{A}$ เป็นเซตของเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ขนาด nxn

$\mathscr{D}$ เป็นเซตของเมตริกซ์ทแยงขนาด nxn

จะต้องพิสูจน์ว่า 1. $\mathscr{A}$ เป็นริงสลับที่

2. $\mathscr{A} \cong \mathscr{D}$

1. ต้องการพิสูจน์ว่า $\mathscr{A}$ เป็นริงสลับที่

1.1 แสดงคุณสมบัติปิดสำหรับการบวก

ให้ $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_2 & b_3 & \cdots & b_1 \end{bmatrix}$

$$A+B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_n & b_1 & \cdots & b_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_2 & b_3 & \cdots & b_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n+b_n \\ a_n+b_n & a_1+b_1 & \cdots & a_{n-1}+b_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_2+b_2 & a_3+b_3 & \cdots & a_1+b_1 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $A, B \in \mathscr{A}$ จะได้ว่า $A+B \in \mathscr{A}$

1.2 มีเอกลักษณ์สำหรับการบวกคือ เมตริกซ์ [O] ขนาด nxn $\in \mathcal{A}$

1.3 สำหรับทุก ๆ $A \in \mathcal{A}$ จะมี $-A \in \mathcal{A}$ ซึ่ง

$$A + (-A) = (-A) + A = [O]$$

นั่นคือ
$$-A = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ -a_n & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

1.4 แสดงคุณสมบัติปิดสำหรับการคูณ

พิจารณาผลคูณ A และ B

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_n & b_1 & \cdots & b_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_2 & b_3 & \cdots & b_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1b_1+\cdots+a_nb_2 & a_1b_2+\cdots+a_nb_3 & \cdots & a_1b_n+\cdots+a_nb_1 \\ a_1b_n+\cdots+a_nb_1 & a_1b_1+\cdots+a_nb_2 & \cdots & a_1b_2+\cdots+a_nb_3 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1b_2+\cdots+a_nb_3 & a_1b_3+\cdots+a_2b_2 & \cdots & a_1b_1+\cdots+a_nb_2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $AB \in \mathcal{A}$

1.5 มี I_n เป็นเอกลักษณ์สำหรับการคูณ

1.6 สำหรับทุก ๆ $A, B \in \mathcal{A}$, $AB = BA$

จากข้อ 1,2,3,4,5,6 จะได้ว่า $\mathcal{A}$ เป็นริงสลับที่

2. ต้องการพิสูจน์ว่า $\mathcal{A} \cong \mathcal{D}$

ให้ $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{D}$ โดยที่

$f(A) = M_n^{-1}AM_n$ สำหรับทุก ๆ $A \in \mathcal{A}$

2.1 จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันที่นิยามดีแล้ว

กำหนดให้ $A,B \in \mathcal{A}$ และ $A = B$

ดังนั้นจะได้ว่า $M_n^{-1}AM_n = M_n^{-1}BM$

$f(A) = f(B)$

2.2 จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

กำหนดให้ $A, B \in \mathcal{A}$ ซึ่ง $f(A) = f(B)$

จะได้ว่า $M_n^{-1}AM_n = M_n^{-1}BM_n$

$\therefore A = B$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2.3 จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathcal{A}$ ไปบน $\mathcal{D}$

ให้ $D \in \mathcal{D}$ โดยทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ว่า $M_n^{-1}DM_n \in \mathcal{A}$

ให้ $M_n^{-1}DM_n = A$

จาก $f(A) = M_n^{-1}AM_n$

$= M_n^{-1}(M_nDM_n^{-1})M_n$

$= (M_n^{-1}M_n)D(M_n^{-1}M_n)$

$= I_nDI_n = D$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathcal{A}$ ไปบน $\mathcal{D}$

2.4 จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ

ให้ $A,B \in \mathcal{A}$ จะต้องแสดงว่า $f(A+B) = f(A) + f(B)$

พิจารณา $f(A+B) = M_n^{-1}(A+B)M_n$

$= (M_n^{-1}A + M_n^{-1}B)M_n$

$= (M_n^{-1}A\,M_n) + (M_n^{-1}BM_n)$

$= f(A) + f(B)$

จะต้องแสดงว่า $f(AB) = f(A)\,f(B)$

พิจารณา $f(AB) = M_n^{-1}(AB)M_n$

$= (M_n^{-1}A)(BM_n)$

$= (M_n^{-1}A)I_n\,(BM_n)$

$= (M_n^{-1}A)M_n\,M_n^{-1}(BM_n)$

$= (M_n^{-1}AM_n)(M_n^{-1}BM_n)$

$= f(A)\,f(B)$

จากข้อ 1,2,3,4 จะได้ว่า $\mathscr{A} \cong \mathscr{D}$

<u>ทฤษฎีบท 3.1.3</u> ให้ A เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn บนฟิลด์ F เมตริกซ์ A จะเป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ ก็ต่อเมื่อทุก ๆ เวกเตอร์หลักของ M_n เป็นไอเก็นเวกเตอร์ของ A

<u>พิสูจน์</u> (1) ให้ A เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

และ $D = M_n^{-1}AM_n$

โดยทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ว่า D เป็นเมตริกซ์ทแยง

$$\text{ให้}\quad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

$D = M_n^{-1} AM_n$ จะได้ว่า A เป็นเมตริกซ์ที่คล้ายกับเมตริกซ์ D

ดังนั้น จะได้ว่า $d_1, d_2, \ldots, d_n$ เป็นค่าไอเก็นของ A

เนื่องจาก $D = M_n^{-1} AM_n$ จะได้ว่า $AM_n = M_nD$

ถ้าให้ X_j, $j = 1,2,\ldots,n$ เป็นเวกเตอร์หลักของ M_n

โดยทฤษฎีบท 2.2.2 จะได้ว่า AX_j เป็นหลักที่ j ของ AM_n

โดยทฤษฎีบท 2.2.3 จะได้ว่า d_jX_j เป็นหลักที่ j ของ M_nD

จาก $AM_n = M_nD$

จะได้ว่า $AX_j = d_jX_j$

นั่นคือ X_j เป็นไอเก็นเวกเตอร์ของ A ที่สอดคล้องกับค่าไอเก็น d_j

ดังนั้นทุก ๆ เวกเตอร์หลักของ M_n เป็นไอเก็นเวกเตอร์ของ A

2. ให้ X_j, $j = 1,2,\ldots,n$ เป็นเวกเตอร์หลักของ M_n และเป็นไอเก็นเวกเตอร์ของ A

และ λ_j, $j = 1,2,\ldots,n$ เป็นค่าไอเก็นของ A ที่สอดคล้องกับไอเก็นเวกเตอร์ X_j

จะได้ว่า $AX_j = \lambda_jX_j$

แต่ $\lambda_jX_j = X_j\lambda_j$ เพราะว่า λ_j เป็นสเกลาร์

ดังนั้น $AX_j = X_j\lambda_j$

$$\text{ให้ } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้ว่า $AM_n = M_nD$

โดยทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ว่า A เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

<u>ตัวอย่าง 3.1.5</u> ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาค่าไอเก็นของ A และ

จงแสดงว่าไอเก็นเวกเตอร์ของ A จะเป็นเวกเตอร์หลักของ M_2

<u>วิธีทำ</u> สมการคาแรคเตอริสติกของ A คือ $\det(\lambda I_2 - A) = 0$

$$\det(\lambda I_2 - A) = \det \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

จะได้ว่า $(\lambda - 1)^2 - 4 = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4 = 0$$

$$(\lambda+1)(\lambda-3) = 0$$

$$\lambda = 3, -1$$

ค่าไอเก็นของ A คือ 3, -1

ต้องการหาไอเก็นเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเก็น 3

ให้ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ เป็นไอเก็นเวกเตอร์ของ A

จาก $AX = \lambda X$, λ เป็นค่าไอเก็นของ A

$$AX - \lambda X = \underline{0}$$

$$(A - \lambda I_2)X = \underline{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2x_1 + 2x_2 = 0$$

$$2x_1 - 2x_2 = 0$$

จะได้ว่า $x_1 = 1$, $x_2 = 1$

ไอเก็นเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเก็น 3 คือ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ถ้าแทน $\lambda = -1$ ใน $(A - \lambda I_2)X = \underline{0}$

จะได้ว่า $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$2x_1 + 2x_2 = 0$$

$$x_1 = -x_2$$

ถ้า $x_1 = 1,\ x_2 = -1$

ดังนั้นค่าไอเก็นเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่าไอเก็น -1 คือ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

เพราะว่า $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

นั่นคือ เวกเตอร์หลักของ M_2 จะเป็นไอเก็นเวกเตอร์ของ A

<u>ทฤษฎีบท 3.1.4</u> ให้ A เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ให้ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เป็นค่าไอเก็นของ A ซึ่ง $f_s = \sum_{k=1}^{n} a_k w_n^{(k-1)(s-1)}$

สำหรับ $s = 1,2,\ldots,n$

ดังนั้นจะได้ว่า $\det A = f_1 . f_2 . f_3 . \ldots f_n$

<u>พิสูจน์</u> จากทฤษฎีบท 3.1.1

$$d_{rs} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{rj} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} w_n^{(k-1)(s-1)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_{rj} \sum_{k=j}^{n+j-1} a_{jk} w_n^{(k-1)(s-1)}$$

$$= 1/n \sum_{j=1}^{n} w_n^{-(r-1)(j-1)} \sum_{k=1}^{n} a_{j,j-1+k} w_n^{(j-1+k-1)(s-1)}$$

$$= \delta_{rs} \sum_{k=1}^{n} a_k w_n^{(k-1)(s-1)}$$

$$= \delta_{rs} \cdot f_s$$

ถ้า $r = s$

ดังนั้น $d_{ss} = f_s$

แต่ $\det D = \prod_{s=1}^{n} d_{ss}$

$$= \prod_{s=1}^{n} f_s$$

$$= f_1 f_2 \ldots f_n$$

แต่ $\det D = \det A$ เพราะว่า $A = M_n D M_n^{-1}$

ดังนั้น $\det A = \prod_{s=1}^{n} f_s$

<u>ตัวอย่าง 3.1.6</u> กำหนดให้ A เป็นเมตริกซ์ขนาด 3x3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

จงหาค่าไอเก็นของ A และหา $\det A$

<u>วิธีทำ</u> จากที่กำหนดให้ $a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 0$

ค่าไอเก็นของ A คือ $f_s = \sum_{k=1}^{n} a_k w_n^{(k-1)(s-1)}$, $s = 1,2,3$

โดยที่ $w_3 = -1/2 + \sqrt{3}\, i/2$

ดังนั้น $f_m = a_1 w_3^{0(m-1)} + a_2 w_3^{1(m-1)} + a_3 w_3^{2(m-1)}$

$f_1 = 2.1 + 4.1 + 0 = 6$

$f_2 = 2 + 1 + 4.w_3 + 0 = 2 + 4w_3$

$f_3 = 2.1 + 4.w_3 + 0 = 2 + 4w_3$

$\det A = f_1 . f_2 . f_3 = (6)(2+4w_3)(2+4w_3)$

$= (6)(2-2+2\ 3i)(2-2-2\ 3i)$

$= (6)(2\ 3i)(-2\ 3i\ )$

$= 72$

หา det A โดยใช้นิยาม 2.1.22

จะได้ว่า $\det A = (2)(2)(2) + (4)(4)(4)$

$= 8 + 64$

$= 72$

<u>ทฤษฎีบท 3.1.5</u> ถ้า A เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ แล้ว

$$\det(XI_n - A) = \prod_{s=1}^{n} \left(X - \sum_{k=1}^{n} a_k w_n^{(k-1)(s-1)}\right)$$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก $(XI_n - A)$ คล้ายกับ $M_n^{-1}(XI_n - A)M_n$

ดังนั้น $\det(XI_n - A) = \det[M_n^{-1}(XI_n - A)M_n]$

$= \det[(M_n^{-1}(XI_n) - M_n^{-1}A)M_n]$

$= \det[M_n^{-1}(XI_n)M_n - M_n^{-1}AM_n]$

$= \det[XI_n(M_n^{-1}M_n) - M_n^{-1}AM_n]$

$= \det(XI_n - M_n^{-1}AM_n)$

$$= \det(XI_n - D)$$

$$= \prod_{s=1}^{n} (X - f_s)$$

$$\det(XI_n - A) = \prod_{s=1}^{n} \left(X - \sum_{k=1}^{n} a_k w_n^{(k-1)(s-1)}\right), \quad s = 1,2,\ldots,n$$

<u>ทฤษฎีบท 3.1.6</u> กำหนดให้ $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ และ $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ เป็นแถวแรกของเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ขนาด nxn A และ B บนฟิลด์ F ตามลำดับ ดังนั้น A และ B จะมีคาแรกเตอริสติกโพลิโนเมียลเดียวกัน ก็ต่อเมื่อมี P เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชันขนาด nxn ซึ่ง

$$[b_1, b_2, \ldots, b_n] = [a_1, a_2, \ldots, a_n]M_n P M_n^{-1}$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] = [a_1, a_2, \ldots, a_n]M_n$

และ $[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n] = [b_1, b_2, \ldots, b_n]M_n$

$$\det(\lambda I_n - A) = \prod_{s=1}^{n} (\lambda - \alpha_s)$$

และ $\det(\lambda I_n - B) = \prod_{s=1}^{n} (\lambda - \beta_s)$

จะได้ว่า A และ B มีคาแรกเตอริสติกเหมือนกัน ดังนั้น จะมีเมตริกซ์ P ขนาด nxn ซึ่ง

$$[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]P$$

$$[b_1, b_2, \ldots, b_n]M_n = [a_1, a_2, \ldots, a_n]M_n P$$

$$[b_1, b_2, \ldots, b_n] = [a_1, a_2, \ldots, a_n]M_n P M_n^{-1}$$

นั่นคือ ถ้า A และ B มีคาแรกเตอริสติกโพลิโนเมียลเดียวกันแล้ว มี P เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน ซึ่ง

$$[b_1, b_2, \ldots, b_n] = [a_1, a_2, \ldots, a_n]M_n P M_n^{-1}$$

ถ้ามี P เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชันขนาด nxn ซึ่ง

$$[b_1, b_2, \ldots, b_n] = [a_1, a_2, \ldots, a_n]M_n P M_n^{-1}$$

ดังนั้น $[b_1, b_2, \ldots, b_n]M_n = [a_1, a_2, \ldots, a_n]M_n P$

$$[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]P$$

ค่าไอเก็นของ B จะเท่ากับค่าไอเก็นของ A

นั่นคือ คาแรกเตอริสติกโพลิโนเมียลของ B จะเท่ากับคาแรกเตอริสติกโพลิโนเมียลของ A

<u>ทฤษฎีบท 3.1.7</u> กำหนดให้ A เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ขนาด nxn บนฟิลด์ F ดังนั้น B จะเป็นเมตริกซ์ขนาด nxn บน F ที่เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ โดยที่

$$\det(\lambda I_n - B) = \det(\lambda I_n - A)$$

ก็ต่อเมื่อมี P เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน ซึ่ง $B = (M_n P^T M_n^{-1})A(M_n P M_n^{-1})$

<u>พิสูจน์</u> (1) สมมุติว่า B เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

และ $\det(\lambda I_n - B) = \det(\lambda I_n - A)$

ดังนั้นค่าไอเก็นของ B เท่ากับค่าไอเก็นของ A

ให้ $D = M_n^{-1} A M_n$ และ $E = M_n^{-1} B M_n$

ดังนั้นค่าไอเก็นของ D เท่ากับค่าไอเก็นของ E ด้วย

โดยทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ว่า D และ E เป็นเมตริกซ์ทแยง

ดังนั้น จะมี P เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชันขนาด $n \times n$ ซึ่ง

$$E = P^{-1}DP$$

$$= P^{T}DP \qquad (P^{T} = P^{-1})$$

$$= P^{T}(M_n^{-1}AM_n)P$$

แต่ $E = M_n^{-1}BM_n$

$$\therefore \quad M_n^{-1}BM_n = P^{T}(M_n^{-1}AM_n)P$$

$$BM_n = (M_nP^{T}M_n^{-1})A(M_nP)$$

$$B = (M_nP^{T}M_n \quad)A(M_nPM_n^{-1})$$

(2) สมมุติว่า P เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชันขนาด $n \times n$ ซึ่ง

$$B = (M_nP^{T}M_n^{-1})A(M_nPM_n^{-1})$$

ดังนั้น $M_n^{-1}BM_n = P^{T}M_n^{-1}AM_nP = (M_nP)^{-1}A(M_nP)$

แต่ A เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ โดยทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ว่า

$M_n^{-1}BM_n$ เป็นเมตริกซ์ทแยง

โดยทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ว่า B เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

ดังนั้น $\det(\lambda I_n - B) = \det(\lambda I_n - M_n^{-1}BM_n)$

$$= \det(\lambda I_n - P^{T}M_n^{-1}AM_nP)$$

$$= \det(\lambda I_n - (M_nP)^{-1}A(M_nP)]$$

$$= \det(\lambda I_n - A)$$

<u>ทฤษฎีนำ 3.1.3</u> ให้ $R_n = 1/n\ M_n^{2}$ ดังนั้นสมาชิกในแถวที่ r และหลักที่ s ของ R_n คือ $1/n \sum_{j=1}^{n} w_n^{(j-1)(r+s-2)}$

<u>พิสูจน์</u> ให้ μ^2_{rs} เป็นสมาชิกในแถวที่ r และหลักที่ s ของ M_n^2

โดยที่ $\mu_{rs} = w_n^{(r-1)(s-1)}$, $r = 1,2,\ldots,n$ และ $s = 1,2,\ldots,n$

$$\mu^2_{rs} = \sum_{j=1}^{n} \mu_{rj}\mu_{js}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} w_n^{(r-1)(j-1)} \cdot w_n^{(j-1)(s-1)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} w_n^{(j-1)(r+s-2)}$$

$$1/n\,\mu^2_{rs} = 1/n \sum_{j=1}^{n} w_n^{(j-1)(r+s-2)}$$

ดังนั้นสมาชิกในตำแหน่งแถวที่ r และหลักที่ s ของ R_n คือ

$$1/n \sum_{j=1}^{n} w_n^{(j-1)(r+s-2)}$$

<u>ตัวอย่าง 3.1.7</u> จงหา R_3

<u>วิธีทำ</u> $R_3 = 1/3 \ M^2$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_3 & w_3^2 \\ 1 & w_3^2 & w_3 \end{bmatrix}$$

$$M_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_3 & w_3^2 \\ 1 & w_3^2 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_3 & w_3^2 \\ 1 & w_3^2 & w_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad R_3 = 1/3\ M_3 = 1/3 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น R_3 เป็นเมตริกซ์สมมาตร และเมตริกซ์เพอมิวเทชัน

ยังสามารถหา R_3 ได้โดยการสลับแถวหรือหลักของ I_3 ก็ได้

โดยสลับแถวที่ 2 กับแถวที่ 3+2-2 = 3

$$\text{จาก} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อสลับที่แถวที่ 2 กับแถวที่ 3 จะได้

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.1.8</u> จงหา R_4

<u>วิธีทำ</u> $R_4 = 1/4 \; M_4$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore R_4 = 1/4 \; M_4 = 1/4 \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น R_4 เป็นเมตริกซ์สมมาตร และเมตริกซ์เพอมิวเทชันด้วย

สามารถหา R_4 ได้โดยการสลับที่ของแถวที่ 2 กับแถวที่ 4+2-2 = 4 ได้

$$\text{จาก } I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อสลับที่แถวที่ 2 กับ แถวที่ 4 แล้วจะได้

$$R_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>ทฤษฎีนำ 3.1.4</u> R_n เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน และเป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

<u>พิสูจน์</u> ให้ r_{rs} เป็นสมาชิกในแถวที่ r และหลักที่ s ของ R_n

โดยทฤษฎีนำ 3.1.3 จะได้ว่า $r_{rs} = 1/n \sum_{j=1}^{n} w_n^{(j-1)(r+s-2)}$

1. จะต้องแสดงว่า ถ้า n หาร $r+s-2$ ลงตัว แล้ว $r_{rs} = 1$

   ถ้า n หาร $r+s-2$ ลงตัว จะมี $m \in I$ ซึ่ง $r+s-2 = mn$

   $$\begin{aligned} \text{พิจารณา } r_{rs} &= 1/n \sum_{j=1}^{n} w_n^{(j-1)(mn)} \\ &= 1/n \sum_{j=1}^{n} (w_n^n)^{m(j-1)} \\ &= 1/n \sum_{j=1}^{n} 1 \\ &= n/n = 1 \end{aligned}$$

2. จะต้องแสดงว่า ถ้า n หาร $r+s-2$ ไม่ลงตัว แล้ว $r_{rs} = 0$

   ถ้า n หาร $r+s-2$ ไม่ลงตัว

ให้ $w_n^{r+s-2} = p$

พิจารณา $r_{rs} = 1/n \quad w_n^{(j-1)(r+s-2)}$

$= 1/n \quad P^{j-1}$

$= 1/n \, (1+P+P^2 + \ldots + P^{n-1})$

$= (1-P^n)/n(1-p)$

$= 1/n \, (0) = 0$

นั่นคือ สมาชิกของ R_n มีเฉพาะ 0 และ 1 เท่านั้น

3. จะต้องแสดงว่า ในแต่ละแถว และแต่ละหลักมี 1 เพียงตัวเดียว

สมมุติว่า $r_{rs} = 1$ และ $r_{rs'} = 1$

ถ้า n หาร $r+s-2$ ลงตัว แล้ว $r_{rs} = 1$

ดังนั้น จะมี $m_1 \in I$ ซึ่ง $r+s-2 = m_1 n$ ---------(1)

ถ้า n หาร $r+s'-2$ ลงตัวแล้ว $r_{rs} = 1$

ดังนั้นจะมี $m_2 \in I$ ซึ่ง $r+s'-2 = m_2 n$ ---------(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า

$$(r+s-2)/m_1 = (r+s'-2)/m_2$$

ถ้า $m_1 = m_2$, $r+s-2 = r+s'-2$

$$s = s'$$

ถ้า $m_1 \neq m_2$

(1)-(2) , $(r+s-2)-(r+s'-2) = m_1 n - m_2 n$

$$s-s' = (m_1-m_2)n$$

ให้ $m_1-m_2 = p$

จะได้ว่า $s-s' = pn$, $1 \leq s, s' \leq n$

ถ้า $p > 0$, $s = pn + s' > n$ ขัดแย้ง

ถ้า $p < 0$, $-p > 0$

จาก $s-s' = pn$

$s' = s-pn$

$= s+(-pn) > n$ ขัดแย้ง

นั่นคือ $p = 0$ จะได้ว่า $s = s'$

นั่นคือ ในแต่ละแถวมี 1 เพียงตัวเดียว

พิสูจน์ ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า ในแต่ละหลักมี 1 เพียงตัวเดียว

นั่นคือ R_n เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน

4. จะแสดงว่า R_n เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

ให้ r_{mn} เป็นสมาชิกในแถวที่ m และหลักที่ n ของ R_n

และ $r_{m'n'}$ เป็นสมาชิกในแถวที่ m และหลักที่ n ของ R_n

จะได้ว่า $r_{m'n'} = 1/n \sum_{j=1}^{n} w_n^{(j-1)(m'+n'-2)}$

ดังนั้น $r_{mn} = r_{m'n'}$ ก็ต่อเมื่อ $(m-n) = (m'-n')(\text{mod } n)$

จะได้ว่า R_n เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

<u>ทฤษฎีนำ 3.1.5</u> $R_n^2 = I_n$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก R_n เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน

ดังนั้น $R_n^T = R_n^{-1}$

แต่ $R_n = R_n^T$

ดังนั้น $R_n = R_n^{-1}$

$R_n^2 = R_n^{-1}R_n$

$= I_n$

<u>ทฤษฎีบท 3.1.8</u> 1. $M_n^4 = n^2 I_n$

2. $M_n^{-1} = 1/n^2 \; M_n^3$

<u>พิสูจน์</u> (1) โดยทฤษฎีนำ 3.1.3 $R_n = 1/n \; M_n$

และโดยทฤษฎีนำ 3.1.5 $R_n^2 = I_n$

พิจารณา $R_n = 1/n \; M_n^2$

$$R_n^2 = 1/n^2 \; M_n^4$$

$$M_n^4 = n^2 R_n$$

$$= n^2 I_n$$

(2) โดยทฤษฎีนำ 3.1.3

$$R_n = 1/n \; M_n^2$$

$$R_n^2 = 1/n^2 \; M_n^4$$

โดยทฤษฎีนำ 3.1.5

$$I_n = 1/n^2 \; M_n^3 . M_n$$

$$M_n^{-1} M_n = 1/n^2 \; M_n^3 M_n$$

$$M_n^{-1} = 1/n^2 \; M_n^3$$

<u>ทฤษฎีบท 3.1.9</u> ถ้า A เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ขนาด nxn และสำหรับ j = 2,3,...,n แล้ว A^T คือ เมตริกซ์ที่ได้จากการเปลี่ยนแถวที่ j กับแถวที่ n+2-j ของ A แล้วเปลี่ยนหลักที่ j กับหลักที่ n+2-j ของเมตริกซ์ที่เปลี่ยนแถวในครั้งแรก

<u>พิสูจน์</u> ให้ $A = [a_{rs}]$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdot & & & \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$$

สำหรับ $j = 2,3,\ldots,n$ ให้ A' คือ เมตริกซ์ที่ได้จากการเปลี่ยนแถวที่ j กับแถวที่ $n+2-j$ ของ A

$$\text{ดังนั้น } A' = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \\ \cdot & & & \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

สำหรับ $j = 2,3,\ldots,n$ เปลี่ยนหลักที่ j กับหลักที่ $n+2-j$ ของ A'

$$A'' = \begin{bmatrix} a_1 & a_n & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_1 & \cdots & a_3 \\ \cdot & & & \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$$

$$= A^T = [a_{sr}]$$

<u>บทแทรก 3.1.1</u> ถ้า A เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ขนาด $n \times n$ แล้ว $A^T = R_n A R_n$ และ A^T เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก A^T เกิดจากการสลับที่ระหว่างแถวที่ j กับแถวที่ $n+2-j$, $j = 2,3,\ldots,n$ และสลับที่ระหว่างหลักที่ j กับหลักที่ $n+2-j$, $j = 2,3,\ldots,n$ ของเมตริกซ์ที่ได้

โดยทฤษฎีนำ 3.1.4 จะได้ว่า R_n เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน และเป็นเซอร์คูลันเมตริกซ์ โดยทฤษฎีนำ 3.1.3 $R_n = 1/n\, M_n^2$

ดังนั้น $R_n \neq I_n$

R_nA เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ และ R_n เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน

R_n จึงเกิดการเรียงสับเปลี่ยนแถวหรือหลักของเมตริกซ์ I_n

ดังนั้น R_nA เป็นเมตริกซ์ที่เกิดจากการสลับที่ระหว่างแถวที่ j กับแถวที่ $n+2-j$ และ $(R_nA)R_n$ เป็นเมตริกซ์ที่เกิดจากการสลับที่ระหว่างหลักที่ j กับหลักที่ $n+2-j$ ของเมตริกซ์ R_nA

ดังนั้น $A^T = R_nAR_n$

จะแสดงว่า A^T เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

โดยนิยาม 3.1.1 เขียน A ในรูปเมตริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & a_4 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$$

ให้ α_{rs} เป็นสมาชิกในแถวที่ r และหลักที่ s ของ A จะเป็นสมาชิกในแถวที่ s หลักที่ r ของ A^T

จะเห็นได้ว่า A^T ยังคงสอดคล้องตามนิยาม 3.1.1

ดังนั้น A^T เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

<u>ตัวอย่าง 3.1.9</u> กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา A^T

<u>วิธีทำ</u> $A = [a_{ij}]$, $A^T = [a_{ji}]$

$$\text{ดังนั้น } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

หรือจะหา A^T ได้โดยที่ $A^T = R_n A R_n$

$$R_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_nAR_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $A^T = R_nAR_n$

<u>ทฤษฎีบท 3.1.10</u> กำหนดให้ P และ Q เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn ที่สอดคล้องกับ $Q = R_nPR_n$

ดังนั้น 1. Q เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ ก็ต่อเมื่อ P เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

2. Q เป็นเมตริกซ์ทแยง ก็ต่อเมื่อ P เป็นเมตริกซ์ทแยง

3. Q เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน ก็ต่อเมื่อ P เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน

<u>พิสูจน์</u> (1) ให้ Q เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ จะต้องแสดงว่า P เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน

โดยบทแทรก 3.1.1 จะได้ว่า $Q^T = R_n Q R_n$

จากกำหนดให้ $Q = R_n P R_n$

$$Q^T = R_n Q R_n = R_n (R_n P R_n) R_n = R_n P R_n$$

โดยทฤษฎีนำ 3.1.5 จะได้ว่า $Q^T = I_n P I_n = P$

โดยบทแทรก 3.1.1 จะได้ว่า Q^T เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

ดังนั้น P เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

ให้ P เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ จะต้องแสดงว่า Q เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

ถ้า P เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ ดังนั้น P^T เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

จากกำหนดให้ $Q = R_n P R_n$

โดยบทแทรก 3.1.1 จะได้ว่า $P^T = R_n P R_n$

$\therefore \quad P^T = Q$

ดังนั้น Q เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

(2) ให้ Q เป็นเมตริกซ์ทแยง จะต้องแสดงว่า P เป็นเมตริกซ์ทแยง

ถ้า Q เป็นเมตริกซ์ทแยง ซึ่ง $Q = R_n P R_n$ จะได้ว่า $R_n Q R_n = P$

โดยบทแทรก 3.1.1 จะได้ว่า $Q^T = R_n Q R_n$

เนื่องจาก Q เป็นเมตริกซ์ทแยง จะได้ว่า Q^T เป็นเมตริกซ์ทแยง

ดังนั้น P เป็นเมตริกซ์ทแยง

ให้ P เป็นเมตริกซ์ทแยง จะต้องแสดงว่า Q เป็นเมตริกซ์ทแยง

ถ้า P เป็นเมตริกซ์ทแยง และ $Q = R_n P R_n$

โดยบทแทรก 3.1.1 จะได้ว่า $P^T = R_n P R_n$

เนื่องจาก P เป็นเมตริกซ์ทแยง จะได้ว่า P^T เป็นเมตริกซ์ทแยง

ดังนั้น Q เป็นเมตริกซ์ทแยง

(3) ให้ Q เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน จะต้องแสดงว่า P เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน

ถ้า Q เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน

โดยทฤษฎีบท 2.1.2 จะได้ว่า R_nQR_n เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน

แต่ $P = R_nQR_n$ เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน

ดังนั้น P เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน

ให้ P เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน จะต้องแสดงว่า Q เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน

ถ้า P เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน

ดังนั้น R_nPR_n เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน

แต่ $Q = R_nPR_n$

ดังนั้น Q เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน

<u>ทฤษฎีบท 3.1.11</u> ให้ P และ Q เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn ที่สอดคล้องกับ $Q = R_nPR_n$ ดังนั้น

1. $M_nPM_n^{-1} = M_n^{-1}QM_n$
2. $M_nP^TM_n^{-1} = M_n^{-1}Q^TM_n$

<u>พิสูจน์</u> (1) กำหนดให้ $Q = R_nPR_n$

$$R_nP = QR_n$$

$$(1/n\ M_n^2)P = Q(1/n\ M_n^2)$$

$$M_nP = M_n^{-1}QM_n$$

$$M_nPM_n^{-1} = M_n^{-1}QM_n$$

(2) กำหนดให้ $R_nPR_n = Q$

โดยบทแทรก 3.1.1 จะได้ว่า $P^T = R_nPR_n$ และ $Q^T = R_nQR_n$

ดังนั้น $P^T = Q = R_nQ^TR_n$

$$R_nP^T = Q^TR_n$$

$$(1/n\ M_n^2)\ P^T = Q^T(1/n\ M_n^2)$$

$$M_n^2P^T = Q^TM_n^2$$

$$M_nP = M_n^{-1}Q^TM_n$$

$$M_nP^TM_n^{-1} = M_n\ Q^TM_n$$

<u>ทฤษฎีบท 3.1.12</u> ให้ A และ D เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn บนฟิลด์ F โดยที่ $AM_n = M_nD$ ดังนั้น A เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ ก็ต่อเมื่อ D เป็นเมตริกซ์ทแยง และ D เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ ก็ต่อเมื่อ A เป็นเมตริกซ์ทแยง

<u>พิสูจน์</u> (1) กำหนดให้ $AM_n = M_nD$

โดยทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ว่า A เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ ก็ต่อเมื่อ D เป็นเมตริกซ์ทแยง

(2) จะต้องพิสูจน์ว่า D เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ ก็ต่อเมื่อ A เป็นเมตริกซ์ทแยง

จาก $AM_n = M_nD$

ดังนั้น $M_nAM_n = M_n^2D$

$$M_nA = M_n^2DM_n^{-1}$$

$$M_nA = M_nD(1/n^2\ M_n^3)$$

$$M_nA = (1/n\ M_n^2)D(1/n\ M_n^2\ M_n)$$

$$M_nA = (R_nDR_n)M_n$$

$$M_nAM_n^{-1} \quad = \quad R_nDR_n \quad = \quad D^T$$

ถ้า D เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ ดังนั้น D^T เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

ดังนั้น $M_nAM_n^{-1}$ เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

โดยทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ว่า $M_n^{-1}(M_nAM_n^{-1})M_n$ เป็นเมตริกซ์ทแยง

แต่ $(M_n^{-1}M_n)A(M_n^{-1}M_n) \quad = \quad A$

นั่นคือ A เป็นเมตริกซ์ทแยง

ถ้า A เป็นเมตริกซ์ทแยง

กำหนดให้ $\quad AM_n \quad = \quad M_nD$

$$\begin{aligned} A &= M_nDM_n^{-1} \\ &= M_nD(1/n^2 \quad M_n^3) \\ &= (1/n\ M_n^2)D(1/n\ M_n^2) \\ &= R_nDR_n \quad = \quad D^T \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ว่า D เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

<u>นิยาม 3.1.2</u> โมนิคโพลิโนเมียล (Monic Polynomial)

ให้ C เป็นริง โมนิคโพลิโนเมียลใน X บน C กับสัมประสิทธิ์ใน C คือ นิพจน์ในรูป $f(x) = x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \dots + c_n$

เมื่อ $c_i \in C,\ i = 1,2,\dots,n$

และเรียก f(x) ว่าเป็นโมนิคโพลิโนเมียลกำลัง n บน C

<u>ทฤษฎีบท 3.1.13</u> ถ้า f(x) เป็นโมนิคโพลิโนเมียลที่มีกำลัง $n \geq 1$ บนเซตของจำนวนเชิงซ้อน C f(x) จะเป็นคาแรกเตอริสติกโพลิโนเมียลของบางเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ขนาด nxn บน C

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า $f(x)$ เป็นโมนิคโพลิโนเมียลบน C

ดังนั้นจะมี $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ บน C ซึ่ง

$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots (x-\alpha_n)$

ให้ D เป็นเมตริกซ์ทแยงขนาด $n \times n$ โดยที่ $d_{ss} = \alpha_s$

ให้ $A = M_n D M_n^{-1}$

โดยทฤษฎีบท 3.1.12 จะได้ว่า A เป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์บน C

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \det[M_n^{-1}(XI_n - A)M_n] \\
&= \det(M_n^{-1} XI_n M_n - M_n^{-1} A M_n) \\
&= \det(XI_n M_n^{-1} M_n - M_n^{-1} A M_n) \\
&= \det(XI_n - D) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

นั่นคือ $f(x)$ เป็นคาแรกเตอริสติกโพลิโนเมียลของ A บน C

<u>ทฤษฎีบท 3.1.14</u> ให้ N_n เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ซึ่ง $N_n = 1/\sqrt{n}\ M_n$

จะได้ว่า 1. $\overline{N}_n = N_n^{-1}$

2. $N_n^T = N_n$

3. $(\overline{N}_n)^T = N_n^{-1}$

4. N_n เป็นเมตริกซ์สมมาตร

5. N_n เป็นเมตริกซ์ยูนิทารี

<u>พิสูจน์</u> ให้ α_{rs} เป็นสมาชิกในแถวที่ r และหลักที่ s ของ N_n

เนื่องจาก $N_n = 1/\sqrt{n}\ M_n$

ดังนั้นให้ μ_{rs} เป็นสมาชิกในแถวที่ r และหลักที่ s ของ M_n

โดยที่ $\mu_{rs} = w_n^{(r-1)(s-1)}$

ดังนั้น $\alpha_{rs} = 1/\sqrt{n}\ w_n^{(r-1)(s-1)}$

เนื่องจากสมาชิกของ $\bar{N}_n$ คือ สมาชิกที่เป็นคอนจูเกตกับสมาชิกในตำแหน่งที่สมนัยกันของ M_n

ดังนั้นคอนจูเกตของ $\alpha_{rs} = 1/\sqrt{n}\ w_n^{-(r-1)(s-1)}$

เพราะว่า $N_n^{-1} = (1/\sqrt{n}\ M_n)^{-1} = \sqrt{n}\ M_n^{-1}$

สมาชิกในแถวที่ r และหลักที่ s ของ M_n^{-1} คือ

$$\lambda_{rs} = 1/n\ w_n^{-(r-1)(s-1)}$$

ดังนั้นสมาชิกในแถวที่ r และหลักที่ s ของ N_n^{-1} คือ

$$\sqrt{n}\ .\ 1/n\ w_n^{-(r-1)(s-1)} = 1/\sqrt{n}\ w_n^{-(r-1)(s-1)}$$

ดังนั้น จะได้ว่า $\bar{N}_n = N_n^{-1}$

(2) ให้ α_{rs} เป็นสมาชิกในแถวที่ r และหลักที่ s ของ N_n

และ μ_{rs} เป็นสมาชิกในแถวที่ r และหลักที่ s ของ M_n

ดังนั้น N_n^T ก็จะมีสมาชิกในแถวที่ s และหลักที่ r คือ α_{sr}

เนื่องจาก $N_n = 1/\sqrt{n}\ M_n$

$$\therefore \quad \alpha_{sr} = 1/\sqrt{n}\ \mu_{sr}$$

เนื่องจาก $\mu_{rs} = w_n^{(r-1)(s-1)}$

และ $\mu_{sr} = w_n^{(s-1)(r-1)}$

$$\therefore \quad \mu_{rs} = \mu_{sr}$$

$$\alpha_{sr} = 1/\sqrt{n}\ \mu_{sr} = 1/\sqrt{n}\ \mu_{rs} = \alpha_{rs}$$

นั่นคือ $N_n^T = N_n$

(3) ให้ $\bar{\alpha}_{rs}$ เป็นสมาชิกในแถวที่ r และหลักที่ s ของ $\bar{N}_n$

ดังนั้น $\bar{\alpha}_{rs} = 1/\sqrt{n}\ w_n^{-(r-1)(s-1)}$

และ $\bar{\alpha}_{sr} = 1/\sqrt{n}\ w_n^{-(r-1)(s-1)}$

แต่ $\bar{\alpha}_{sr}$ เป็นสมาชิกในแถวที่ r และหลักที่ s ของ $\bar{N}_n^T$

และ $\bar{\alpha}_{rs} = \bar{\alpha}_{sr}$

นั่นคือ $\bar{N}_n^T = \bar{N}_n = N_n^{-1}$

(4) จากข้อ 2 จะได้ว่า $N_n = N_n^T$

นั่นคือ N_n เป็นเมตริกซ์สมมาตร

(5) จากข้อ 3 $\bar{N}_n^T = N_n^{-1}$

ดังนั้น N_n เป็นเมตริกซ์ยูนิทารี

<u>ทฤษฎีบท 3.1.15</u> เมื่อ $n \geq 3$ แล้ว N_n จะเป็นตัวกำเนิดของกรุ๊ปวัฏจักร ที่มีอันดับ 4

<u>พิสูจน์</u> โดยทฤษฎีบท 3.1.14 จะได้ว่า $N_n = 1/\sqrt{n}\ M_n$

ดังนั้น $N_n^2 = (1/\sqrt{n}\ M_n)^2 = 1/n\ M_n^2 = R_n$

$N_n^2 N_n^2 = I_n$

$N_n^{-1} N_n^2 N_n^2 = N_n^{-1} I_n$

$N_n^3 = N_n^{-1}$

ดังนั้น $\{N_n, N_n^2, N_n^3, I_n\}$ เป็นกรุ๊ปที่ N_n เป็นตัวกำเนิด

<u>บทแทรก 3.1.2</u> สำหรับแต่ละขนาด nxn เมตริกซ์ ซึ่งเป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชันจะได้ว่า

$$M_n P M_n^{-1} = N_n P N_n^{-1}$$

<u>พิสูจน์</u> พิจารณา $M_n P M_n^{-1} = (\sqrt{n}\ N_n)P(1/\sqrt{n}\ \ N_n^{-1})$ เพราะว่า $N_n = 1/\sqrt{n}\ M_n$

$$= N_n P N_n^{-1}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.1.10</u> จงหา N_3 และ $\overline{N}_3$

<u>วิธีทำ</u> จาก $N_3 = 1/\sqrt{3}\ M_3$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_3 & w_3^2 \\ 1 & w_3^2 & w_3 \end{bmatrix}$$

$$N_3 = 1/\sqrt{3}\ M_3 = 1/\sqrt{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & N_3 & w_3^2 \\ 1 & w_3^2 & w_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \overline{N}_3 = 1/\sqrt{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_3^2 & w_3 \\ 1 & w_3 & w_3^2 \end{bmatrix} = \overline{N}_3^{T} = N_3^{-1}$$

ดังนั้น N_3 เป็นเมตริกซ์สมมาตรและเมตริกซ์ยูนิทารี

<u>ตัวอย่างที่ 3.1.10</u> จงหา N_4 และ $\overline{N}_4$

<u>วิธีทำ</u>

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

$$N_4 = 1/\sqrt{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} = 1/2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

$$N_4 = 1/2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} = \overline{N}_4^{T} = N_4^{-1}$$

ดังนั้น N_4 เป็นเมตริกซ์สมมาตร และเมตริกซ์ยูนิทารี

<u>ตัวอย่าง 3.1.12</u> จงแสดงว่า N_4 เป็นตัวกำเนิดกรุ๊ปวัฏจักรที่มีอันดับ 4

<u>วิธีทำ</u>

$$N_4 = 1/2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

$$N_4^2 = 1/4 \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_4 . N_4^2 = N_4^3 = 1/2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 1/2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$$

$$N_4^4 = N_4^2 \cdot N_4^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $(\{N_4, N_4^2, N_4^3, I_4\})$ เป็นกรุ๊ปที่มี N_4 เป็นตัวกำเนิด

<u>ทฤษฎีบท 3.1.16</u> ให้ S_n เป็นกรุ๊ปสมมาตร และ S เป็นเซตของ $M_nPM_n^{-1}$ โดยที่ P เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชันขนาด nxn แล้ว $(S, \cdot)$ จะเป็นกรุ๊ปสำหรับการคูณและถอดแบบกับ S_n

<u>พิสูจน์</u> ให้ P_i, P_j เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชันขนาด nxn

1. จะแสดงคุณสมบัติปิดสำหรับการคูณ

ให้ $M_nP_iM_n^{-1}$, $M_nP_jM_n^{-1} \in S$

$$(M_nP_iM_n^{-1})(M_nP_jM_n^{-1}) = (M_nP_i)(M_n^{-1}M_n)(P_jM_n^{-1})$$
$$= M_nP_iP_jM_n^{-1}$$

ดังนั้น $M_nP_iP_jM_n^{-1} \in S$

นั่นคือ S มีคุณสมบัติปิดสำหรับการคูณ

2. จะแสดงคุณสมบัติการจัดหมู่

ให้ P_i, P_j, P_k เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชันขนาด nxn

และ $M_nP_iM_n^{-1}$, $M_nP_jM_n^{-1}$, $M_nP_kM_n^{-1} \in S$

$$[(M_nP_iM_n^{-1})(M_nP_jM_n^{-1})](M_nP_kM_n^{-1})$$
$$= (M_nP_iP_jM_n^{-1})(M_nP_kM_n^{-1})$$
$$= M_n(P_iP_j)P_kM_n^{-1}$$
$$= M_nP_i(P_jP_k)M_n^{-1}$$
$$= (M_nP_iM_n^{-1})(M_n(P_jP_k)M_n^{-1})$$
$$= (M_nP_iM_n^{-1})[(M_nP_jM_n^{-1})(M_nP_kM_n^{-1})]$$

ดังนั้น S มีคุณสมบัติการจัดหมู่

(3) I_n เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชันขนาด nxn

$M_n I_n M_n^{-1} \in S$

แต่ $M_n I_n M_n^{-1} = I_n$

ดังนั้น มี $M_n I_n M_n^{-1}$ เป็นเอกลักษณ์

(4) ให้ $M_n P_1 M_n^{-1} \in S$

ดังนั้น $(M_n P_1 M_n^{-1})^{-1} = M_n^{-1} P_1^{-1} M_n$

$= M_n^{-1} P_1^{T} M_n \quad (P_1^{T} = P_1^{-1})$

นั่นคือ $(M_n P_1 M_n^{-1})^{-1} = M_n^{-1} P_1^{T} M_n \in S$

จากข้อ 1, 2, 3, 4 จะได้ว่า (S, .) เป็นกรุ๊ป

จะต้องพิสูจน์ว่า $S \cong S_n$

ให้ $\mathcal{P} = \{P | P$ เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชันขนาด nxn$\}$

โดยทฤษฎีบท 2.5.1 จะได้ว่า $S_n \cong \mathcal{P}$

ดังนั้นจะต้องพิสูจน์ว่า $S \cong \mathcal{P}$

ให้ $\theta : \mathcal{P} \dashrightarrow S$ ซึ่งกำหนดโดย

$\theta(P_1) = M_n P_1 M_n^{-1}$ เมื่อ $P_1 \in \mathcal{P}$

1. จะแสดงว่า θ เป็นฟังก์ชันที่นิยามดีแล้ว

ให้ $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ และ $P_1 = P_2$

จะได้ว่า $M_n P_1 = M_n P_2$

$M_n P_1 M_n^{-1} = M_n P_2 M_n^{-1}$

$\theta(P_1) = \theta(P_2)$

2. จะแสดงว่า θ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ ซึ่ง $\theta(P_1) = \theta(P_2)$

จะได้ว่า $M_n P_1 M_n^{-1} = M_n P_2 M_n^{-1}$

$$P_1 = P_2$$

นั่นคือ θ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

3. จะแสดงว่า θ เป็นฟังก์ชันไปบน

ให้ $s \in S$, $M_n^{-1} s M_n$

ให้ $P = M_n^{-1} s M_n$

จาก $\theta(P) = M_n P M_n^{-1}$

$$= M_n (M_n^{-1} s M_n) M_n^{-1} = s$$

ดังนั้น θ เป็นฟังก์ชันจาก $\mathcal{P}$ ไปบน S

4. θ เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ +, .

ให้ $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ จะต้องพิสูจน์ว่า

1. $\theta(P_1 + P_2) = \theta(P_1) + \theta(P_2)$

พิจารณา $\theta(P_1+P_2) = M_n(P_1+P_2)M_n^{-1}$

$$= (M_n P_1 + M_n P_2) M_n^{-1}$$

$$= M_n P_1 M_n^{-1} + M_n P_2 M_n^{-1}$$

$$= \theta(P_1) + \theta(P_2)$$

2. $\theta(P_1 P_2) = \theta(P_1)\theta(P_2)$

พิจารณา $\theta(P_1 P_2) = M_n (P_1 P_2) M_n^{-1}$

$$= (M_n P_1)(P_2 M_n^{-1})$$

$$= (M_n P_1 M_n^{-1})(M_n P_2 M_n^{-1})$$

$$= \theta(P_1)\theta(P_2)$$

จากข้อ 1, 2, 3, 4 จะได้ว่า $\mathcal{P} \cong S$

นั่นคือ $S_n \cong S$

<u>ตัวอย่าง 3.1.13</u> สำหรับ $n = 3$, $w_3 = -1/2 + \sqrt{3}i/2$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_3 & w_3^2 \\ 1 & w_3^2 & w_3 \end{bmatrix}, \quad M_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3w_3 & 1/3w_3^2 \\ 1/3 & 1/3w_3^2 & 1/3w_3 \end{bmatrix}$$

จงหาเมตริกซ์ขนาด 2x2 ที่ได้จากการตัดแถวที่ 1 และหลักที่ 1 ของ $M_3PM_3^{-1}$ ซึ่งจะเป็นสมาชิกของกรุ๊ปที่ถอดแบบกับ S_3

<u>วิธีทำ</u> ให้ P เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชัน ขนาด 3x3 พบว่าจะมีได้ 3! เมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จะได้ $M_3PM_3^{-1}$ ทั้งหมด 3! เช่นเดียวกัน

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \\ 0 & w_3^2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w_3 & 0 \\ 0 & 0 & w_3^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_3^2 \\ 0 & w_3 & 0 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ขนาด 2x2 ที่เกิดจากการตัดแถวที่ 1 และหลักที่ 1 ของ $M_3PM_3^{-1}$ คือ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & w_3 \\ w_3^2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_3^2 & 0 \\ 0 & w_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_3 & 0 \\ 0 & w_3^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & w_3^2 \\ w_3 & 0 \end{bmatrix}$$

เซตของเมตริกซ์ดังกล่าวจะเป็นกรุ๊ปสำหรับการคูณและถอดแบบกับ S_3

__ทฤษฎีบท 3.1.17__ ถ้า P เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชันแล้ว สมาชิกในตำแหน่งแถวที่ 1 หลักที่ 1 ของ $M_nPM_n^{-1}$ เท่ากับ 1 และสมาชิกในตำแหน่งอื่นของแถวที่ 1 หรือหลักที่ 1 เท่ากับ 0

__พิสูจน์__ ให้ $P = [\pi_{rs}]$

และให้ $M_nPM_n^{-1} = [\alpha_{rs}]$

จะได้ว่า $\alpha_{rs} = 1/n \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} w_n^{(r-1)(j-1)} \cdot \pi_{jk} w_n^{-(k-1)(s-1)}$

ดังนั้น $\alpha_{1s} = 1/n \sum_{k=1}^{n} w_n^{(k-1)(s-1)} \cdot \sum_{j=1}^{n} \pi_{jk}$

$= \delta_{s1} \cdot 1$ เพราะว่า $\sum_{j=1}^{n} \pi_{jk} = 1$

$= \delta_{s1}$

ในทำนองเดียวกัน $\delta_{r1} = 1/n \sum_{j=1}^{n} w_n^{(r-1)(s-1)} \cdot \sum_{k=1}^{n} \pi_{jk}$

$= \delta_{1r} \cdot 1$

$= \delta_{1r}$

ถ้า $r = s = 1$

จะได้ว่า $\sum_{k=1}^{n} w_n^{(k-1)(s-1)} = \sum_{j=1}^{n} w_n^{(r-1)(j-1)} = n$

ดังนั้น $\alpha_{11} = 1 = \delta_{11}$

สมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 1 ของ $M_nPM_n^{-1} = 1$

ถ้า r และ s ไม่เท่ากับ 1 แล้ว $\delta_{s1} = \delta_{r1} = 0$

ดังนั้น $\alpha_{1s} = \alpha_{r1} = 0$

นั่นคือ สมาชิกในตำแหน่งอื่นของแถวที่ 1 และหลักที่ 1 ของ $M_nPM_n^{-1}$ เท่ากับ 0

<u>ทฤษฎีบท 3.1.18</u> สำหรับ $n \geq 2$ ให้ P เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชันขนาด nxn ดังนั้นเซตของเมตริกซ์ที่มีขนาด (n-1)x(n-1) ซึ่งได้จากการตัดแถวที่ 1 และหลักที่ 1 จากแต่ละเมตริกซ์ $M_nPM_n^{-1}$ จะทำให้เกิดกรุ๊ปสำหรับการคูณ ซึ่งถอดแบบกับ S_n

<u>พิสูจน์</u> โดยทฤษฎีบท 3.1.17 เมตริกซ์ $M_nPM_n^{-1}$ มีสมาชิกในตำแหน่งแถวที่ 1 และหลักที่ 1 เป็น 1

สมาชิกตัวอื่น ๆ ของแถวที่ 1 เท่ากับ 0 และสมาชิกตัวอื่น ๆ ของหลักที่ 1 เท่ากับ 0 ถ้าตัดแถวที่ 1 และหลักที่ 1 ของ $M_nPM_n^{-1}$ ออกจะทำให้ได้เซตของเมตริกซ์ที่มีขนาด (n-1)x(n-1) เซตนี้จะมีสมาชิกทั้งหมด n! และเป็นกรุ๊ปสำหรับการคูณ

โดยทฤษฎีบท 3.1.16 จะได้ว่า เซตของ $M_nPM_n^{-1}$ ซึ่งเกิดจากการตัดแถวที่ 1 และหลักที่ 1 จะถอดแบบกับ S_n

3.2 <u>คุณสมบัติของโอเมกา-เซอร์คูลันต์เมตริกซ์</u> (ω-circulant matrix)

<u>นิยาม 3.2.1</u> A เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn และเป็นออร์โธโกนัลเมตริกซ์ จะเรียก A ว่าเป็นโอเมกา-เซอร์คูลันต์เมตริกซ์ ก็ต่อเมื่อ แถวที่ i ของ A คือ $\omega a_{n-i+2}, \omega a_{n-i+3}, \ldots, \omega a_n, a_1, a_2, \ldots, a_{n-i+1}$

โดยที่ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นแถวที่ 1 ของ A และ w_n เป็นรากที่ n ของ 1 ที่เป็นพริมิทีฟ

<u>ตัวอย่าง 3.2.1</u> กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

จงตรวจสอบว่า A เป็นโอเมกา-เซอร์คูลันต์เมตริกซ์หรือไม่

A เป็นเมตริกซ์ออร์ธอโกนัล เพราะว่า $A^T = A^{-1}$

รากที่ 2 ของ 1 ที่เป็นพริมิทีฟ คือ -1

แถวแรกของเมตริกซ์ A คือ $1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}$

แถวที่สองของเมตริกซ์ A คือ $1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}$

ดังนั้นเมตริกซ์ A เป็นโอเมกา-เซอร์คูลันต์เมตริกซ์

<u>ตัวอย่าง 3.2.2</u> กำหนด $B = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

จงตรวจสอบว่า B เป็นโอเมกา-เซอร์คูลันต์เมตริกซ์หรือไม่

B เป็นเมตริกซ์ออร์ธอโกนัล เพราะว่า $B^T = B^{-1}$

รากที่ 3 ของ 1 ที่เป็นพริมิทีฟ คือ $w_3 = -1/2 + \sqrt{3}i/2$

แถวที่ 1 ของ B คือ $1/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3}$

แถวที่ 2 ของ B คือ $1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}$

ดังนั้นเมตริกซ์ B ไม่เป็นโอเมกา-เซอร์คูลันต์เมตริกซ์

ถ้าจะเป็นโอเมกา-เซอร์คูลันต์เมตริกซ์ได้ แถวที่ 2 คือ $w_3\ 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$

<u>คุณสมบัติ 3.2.1</u> กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ w_2 a_2 & a_1 \end{bmatrix}$ เป็นโอเมกา-เซอร์คูลันต์เมตริกซ์ขนาด 2x2 ซึ่ง $a_1 \neq a_2$ แล้วจะมี D เป็นเมตริกซ์ทแยง ซึ่งคล้ายกับเมตริกซ์ A โดยมีเมตริกซ์ R ซึ่ง AR = RD และแต่ละ X_j ซึ่งเป็นเวกเตอร์หลักของเมตริกซ์ R จะเป็นไอเก็นเวกเตอร์ของ A ที่สอดคล้องกับค่าไอเก็น λ_j , j = 1,2, และ $\{X_j \mid j = 1,2\}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

กำหนดให้ A เป็นโอเมกา-เซอร์คูลันต์เมตริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ w_2 a_2 & a_1 \end{bmatrix} \quad , \; w_2 = -1$$

หาค่าไอเก็นของเมตริกซ์ A จาก

$$\det(\lambda I_2 - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - a_1 & -a_2 \\ -w_2 a_2 & \lambda - a_1 \end{bmatrix} = 0$$

$$= (\lambda - a_1)^2 - w_2 a_2^2 = 0$$

$$\therefore (\lambda - a_1)^2 = w_2 a_2^2$$

$$\lambda - a_1 = \pm\sqrt{w_2 a_2^2}$$

$$= a_1 \pm a_2 i, \; a_2 \neq 0$$

ได้ค่าไอเก็น 2 ค่าที่แตกต่างกันคือ $\lambda_1 = a_1 + a_2 i$ และ $\lambda_2 = a_1 - a_2 i$

จะหาไอเก็นเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่า λ_1, λ_2 ได้ดังนี้

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x_1 \neq 0 \, , \; x_2 \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ w_2 a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (a_1+a_2 i) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = (a_1+a_2 i)x_1 \quad \text{---------(1)}$$

$$w_2 a_2 x_1 + a_1 x_2 = (a_1+a_2 i)x_2 \quad \text{---------(2)}$$

จาก (1) $\quad x_2 = ix_1 \quad$ ---------(3)

จาก (2) $\quad x_1 = -ix_2 \quad$ --------(4)

จะเห็นว่า (3) และ (4) เป็นสมการเดียวกัน

ให้ $\quad X_2 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \; y_1 \neq 0, \; y_2 \neq 0$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ w_2 a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = (a_1-a_2 i) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 = (a_1-a_2 i)y_1 \quad \text{----------------(5)}$$

$$w_2 a_2 y_1 + a_1 y_2 = (a_1-a_2 i)y_2 \quad \text{----------------(6)}$$

จาก (5) $\quad y_2 = -iy_1 \quad$ ----------------(7)

จาก (6) $\quad y_1 = iy_2 \quad$ ----------------(8)

จะเห็นว่า (7) และ (8) เป็นสมการเดียวกัน

นั่นคือ จะได้ว่า $\begin{bmatrix} x_1 \\ ix_1 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} iy_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ เป็นไอเก็นเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับ

λ_1, λ_2 ตามลำดับ

เลือก $x_1 = 1$ และ $y_2 = 1$ จะได้ $R = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$

ให้ $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ $X_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$

จะตรวจสอบว่า $\{X_1, X_2\}$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

ให้ m, n เป็นค่าคงที่ ซึ่ง

$$mX_1 + nX_2 = \underline{0}$$

$$m + ni = 0 \quad \text{-----------------(1)}$$

$$mi + n = 0 \quad \text{-----------------(2)}$$

$$m = \frac{\det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}}, \quad \det\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$= 0$$

$$n = \frac{\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 0 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}}$$

$$= 0$$

จะได้ว่า $m = n = 0$

นั่นคือ $\{X_1, X_2\}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

ตรวจสอบว่า $AR = RD$ หรือไม่

$$AR = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ w_2a_2 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2i & a_2+a_1i \\ w_2a_2+a_1i & a_1+w_2a_2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2i & a_2+a_1i \\ -a_2+a_1i & a_1-a_2i \end{bmatrix}$$

$$RD = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1+a_2i & 0 \\ 0 & a_1-a_2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2i & a_2+a_1i \\ -a_2+a_1i & a_1-a_2i \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $AR = RD$

นั่นคือ เมื่อกำหนด A เป็นโอเมกา-เซอร์คูลันต์เมตริกซ์ขนาด 2x2

หาค่าไอเก็นของเมตริกซ์ A จากสมการ $\det(\lambda I_2 - A) = 0$ ได้ค่า

$\lambda = a_1 \pm a_2 i,\ a_2 \neq 0$ และมีเมตริกซ์ $R = [X_1, X_2]$ โดยที่

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix},\quad X_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

และพบว่าหลักของเมตริกซ์ R เป็นอิสระเชิงเส้น .

นอกจากนี้ พบว่า AR = RD เมื่อ $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

ดังนั้นเมื่อ A เป็นโอเมกา-เซอร์คูลันต์เมตริกซ์ขนาด 2x2

จะได้ว่า มีเมตริกซ์ทแยง D ซึ่งเมตริกซ์ A คล้ายกับเมตริกซ์ D

<u>ตัวอย่าง 3.2.3</u> กำหนด $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ เป็นโอเมกา-เซอร์คูลันต์เมตริกซ์

จงแสดงว่ามีเมตริกซ์ R โดยที่หลักของ R เป็นอิสระเชิงเส้น

และสอดคล้องกับ AR = RD เมื่อ D เป็นเมตริกซ์ทแยง ซึ่งเมตริกซ์ A

คล้ายกับเมตริกซ์ D

<u>วิธีทำ</u> $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ เป็นโอเมกา-เซอร์คูลันต์เมตริกซ์

หาค่าไอเก็นของ A จากสมการ $\det(\lambda I_2 - A) = 0$

$$\det(\lambda I_2 - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda+1 & 1 \\ -1 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda+1)^2+1$$

$$= \lambda^2+2\lambda+1+1$$

$$= \lambda^2+2\lambda+2 = 0$$

$$\therefore \quad \lambda = (-2 \pm \sqrt{4-4(2)})/2$$

$$= -1 \pm i$$

จะได้ $\lambda_1 = -1+i$, $\lambda_2 = -1-i$ เป็นค่าที่แตกต่างกัน

หาไอเก็นเวกเตอร์ของ A ที่สอดคล้องกับ λ_1 และ λ_2

ให้ $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ ที่ทำให้

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (-1+i) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$-x_1 - x_2 = (-1+i)x_1$ -------------------(1)

$x_1 - x_2 = (-1+i)x_2$ -------------------(2)

จาก (1) , $-x_2 = ix_1$ -------------------(3)

จาก (2) , $x_1 = ix_2$ -------------------(4)

จะเห็นว่า (3) และ (4) เป็นสมการเดียวกัน

ให้ $X_2 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = (-1-i) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$-y_1 - y_2 = (-1-i)y_1$ -------------------(5)

$$y_1 - y_2 = (-1-i)y_2 \quad \text{------------------(6)}$$

จาก (5), $\quad -y_2 = iy_1$

$$y_2 = iy_1 \quad \text{------------------(7)}$$

จาก (6), $\quad y_1 = -iy_2 \quad$ ------------------(8)

จะเห็นว่า (7) และ (8) เป็นสมการเดียวกัน

ให้ $R = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$

ตรวจสอบว่า AR = RD เมื่อ $D = \begin{bmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{bmatrix}$

$$AR = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-i & -1-i \\ -1+i & 1-i \end{bmatrix}$$

$$RD = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-i & -1-i \\ -1+i & 1-i \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า AR = RD

<u>คุณสมบัติ 3.2.2</u> กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ w_3 a_3 & a_1 & a_2 \\ w_3 a_2 & w_3 a_3 & a_1 \end{bmatrix}$ เป็นโอเมกา-เซอร์คูลันต์

เมตริกซ์ขนาด 3x3 ซึ่ง a_2, a_3 ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และ $a_2 \neq \sqrt[3]{w_3}\, a_3$

แล้วจะมี D เป็นเมตริกซ์ทแยง ซึ่งคล้าย

กับเมตริกซ์ A และมีเมตริกซ์ R ซึ่ง AR = RD และแต่ละ X_j ที่เป็นเวกเตอร์หลักของเมตริกซ์ R จะเป็นไอเก็นเวกเตอร์ของ A ที่สอดคล้องกับค่าไอเก็น $\lambda_j, j = 1, 2, 3$ และ $\{x_j \mid j=1,2,3\}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

กำหนด $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ w_3a_3 & a_1 & a_2 \\ w_3a_2 & w_3a_3 & a_1 \end{bmatrix}$ เป็นโอเมกา-เซอร์คูลันต์เมตริกซ์

หาค่าไอเก็นของ A จากสมการ $\det(\lambda I_3 - A) = 0$

$$\det(\lambda I_3 - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda-a_1 & -a_2 & -a_3 \\ -w_3a_3 & \lambda-a_1 & -a_2 \\ -w_3a_2 & -w_3a_3 & \lambda-a_1 \end{bmatrix} = 0$$

$$= (\lambda-a_1)^3 - w_3a_2^3 - w_3^2a_3^3 - 3w_3a_2a_3(\lambda-a_1) = 0$$

$$= (\lambda-a_1)^3 + (-3w_3a_2a_3)(\lambda-a_1)+(-w_3a_2^3-w_3^2a_3^3)$$

$$= 0 \quad \text{-----------------------------------(1)}$$

ให้ $y = \lambda - a_1 \quad \therefore \quad \lambda = y + a_1$

$a = -3w_3a_2a_3, \quad b = -w_3a_2^3 - w_3^2a_3^3$

จาก (1) จะได้ว่า $y^3 + ay + b = 0$ --------(2)

ให้ $A_0 = \sqrt[3]{-b/2 + \sqrt{(a/3)^3 + (b/2)^2}}$

$$= \sqrt[3]{-(w_3a_2^3-w_3^2a_3^3)/2 + \sqrt{(-3w_3a_2a_3/3)^3 + [(-w_3a_2^3-w_3^2a_3^3)/2]^2}}$$

$$= \sqrt[3]{(w_3a_2^3+w_3^2a_3^3)/2 + \sqrt{(-w_3a_2a_3)^3 + 1/4(w_3^2a_3^6+2a_2^3a_3^3+w_3a_3^6)}}$$

$$= \sqrt[3]{(w_3a_2^3+w_3^2a_3^3)/2 + \sqrt{-w_3^3a_2^3a_3^3 + 1/4(w_3^2a_3^6+2a_2a_3+w_3a_3^6)}}$$

$$= \sqrt[3]{(w_3a_2^3+w_3^2a_3^3)/2 + 1/2\sqrt{-4a_2^3a_3^3+w_3^2a_3^6+2a_2^3a_3^3+w_3a_3^6}}$$

$$= \sqrt[3]{(w_3a_2^3+w_3^2a_3^3)/2 + 1/2\sqrt{w_3^2a_3^6-2a_2^3a_3^3+w_3a_3^6}}$$

$$= \sqrt[3]{1/2(w_3a_2^3+w_3^2a_3^3 + \sqrt{w_3^2a_3^6-2a_2^3a_3^3+w_3a_3^6})}$$

$$B_0 = \sqrt[3]{-b/2 - \sqrt{(a/3)^3 + (b/2)^2}}$$

$$= \sqrt[3]{1/2(w_3a_2^3 + w_3^2a_3^3 - \sqrt{w_3^2a_3^6 - 2a_2^3a_3^3 + w_3a_3^6})}$$

จากสูตรของการ์ดานจะได้คำตอบของสมการ $y^3 + ay + b = 0$ คือ

$$y_1 = A_0+B_0,\ y_2 = w_3A_0 + w_3^2B_0,\ y_3 = w_3^2A_0 + w_3^2B_0$$

แต่ $\lambda = y+a_1$

ดังนั้น $\lambda_1 = A_0+B_0+a_1,\quad \lambda_2 = w_3A_0 + w_3B_0 + a_1$

$$\lambda_3 = w_3A_0 + w_3B_0 + a_1$$

เงื่อนไขในการพิจารณาคำตอบของสมการ $y^3 + ay + b = 0$

โดยพิจารณาจากค่าของ $-4a^3 - 27b^2$

จากสมการ (1), $a = -3w_3a_2a_3$, $b = -w_3a_2^3 - w_3^2a_3^3$

$$\therefore\ -4a^3 - 27b^2 = -4(-3w_3a_2a_3)^3 - 27(-w_3a_2^3-w_3^2a_3^3)^2$$

$$= 108a_2^3a_3^3-27[(-w_3a_2^3)^2-2(-w_3a_2^3)(w_3^2a_3^3)+(w_3^2a_3^3)^2]$$

$$= 108a_2^3a_3^3-27[w_3^2a_2^6+2a_2^3a_3^3+w_3a_3^6]$$

$$= 108a_2^3a_3^3-27w_3^2a_2^6-54a_2^3a_3^3-27w_3a_3^6$$

$$= -27w_3^2a_2^6+54a_2^3a_3^3-27w_3a_3^6$$

$$= -27(w_3^2a_2^6-2a_2^3a_3^3+w_3a_3^6) = -27(w_3a_2-w_3^2a_3)^2$$

การพิจารณาคำตอบของสมการ (2) พบว่า $-4a^3 - 27b^2 \neq 0$ จึงทำให้สมการ (2) ได้คำตอบที่แตกต่างกัน

จาก $-27(w_3a_2^3-w_3^2a_3^2)^2 \neq 0$ ก็ต่อเมื่อ $(w_3a_2^3-w_3^2a_3^3)^2 \neq 0$

พิจารณา $(w_3a_2^3-w_3^2a_3^3)^2 \neq 0$

ก็ต่อเมื่อ $w_3a_2^3 \neq w_3^2a_3^3$

$a_2^3 \neq w_3a_3^3$

มีผลให้ $a_2 \neq \sqrt[3]{w_3}\, a_3$

ซึ่งตรงตามสิ่งที่กำหนดให้

จะได้ค่าไอเก็น 3 ค่าที่แตกต่างกันคือ λ_1, λ_2, λ_3

หาไอเก็นเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่า λ_1, λ_2, λ_3

ให้ $X_1 = \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{bmatrix}$, $p_1 \neq 0$, $q_1 \neq 0$, $r_1 \neq 0$ ที่ทำให้

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ w_3a_3 & a_1 & a_2 \\ w_3a_2 & w_3a_3 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{bmatrix} = (A_0+B_0+a_1) \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{bmatrix}$$

$$a_1p_1 + a_2q_1 + a_3r_1 = (A_0+B_0+a_1)p_1 \quad \text{---------(1)}$$

$$w_3a_3p_1 + a_1q_1 + a_2r_1 = (A_0+B_0+a_1)q_1 \quad \text{---------(2)}$$

$$w_3a_2p_1 + w_3a_3q_1 + a_1r_1 = (A_0+B_0+a_1)r_1 \quad \text{---------(3)}$$

จาก (1) $p_1 = (a_2q_1 + a_3r_1)/(A_0+B_0)$

จาก (2) $q_1 = (w_3a_3p_1 + a_2r_1)/(A_0+B_0)$

จาก (3) $r_1 = (w_3a_2p_1 + w_3a_3q_1)/(A_0+B_0)$

ให้ $X_2 = \begin{bmatrix} p_2 \\ q_2 \\ r_2 \end{bmatrix}$, $p_2 \neq 0$, $q_2 \neq 0$, $r_2 \neq 0$ ที่ทำให้

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ w_3a_3 & a_1 & a_2 \\ w_3a_2 & w_3a_3 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ q_2 \\ r_2 \end{bmatrix} = (w_3A_0+w_3^2B_0+a_1) \begin{bmatrix} p_2 \\ q_2 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

$$a_1p_2 + a_2q_2 + a_3r_2 = (w_3A_0 + w_3^2B_0 + a_1)p_2 \quad \text{---------------(4)}$$

$$w_3a_3p_2+a_1q_2+a_2r_2 = (w_3A_0 + w_3^2B_0 + a_1)q_2 \quad \text{---------------(5)}$$

$$w_3a_2p_2+w_3a_3+a_1r_2 = (w_3A_0 + w_3^2B_0 + a_1)r_2 \quad \text{---------------(6)}$$

จาก (4) $p_2 = (a_2q_2 + a_3r_2)/(w_3A_0 + w_3^2B_0)$

จาก (5) $q_2 = (w_3a_3p_2 + a_2r_2)/(w_3A_0 + w_3^2B_0)$

จาก (6) $r_2 = (w_3a_2p_2 + w_3a_3q_2)/(w_3A_0 + w_3^2B_0)$

ให้ $X_3 = \begin{bmatrix} p_3 \\ q_3 \\ r_3 \end{bmatrix}$, $p_3 \neq 0$, $q_3 \neq 0$, $r_3 \neq 0$ ที่ทำให้

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ w_3a_3 & a_1 & a_2 \\ w_3a_2 & w_3a_3 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ q_3 \\ r_3 \end{bmatrix} = (w_3^2A_0 + w_3^2B_0 + a_1) \begin{bmatrix} p_3 \\ q_3 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$a_1p_3 + a_2q_3 + a_3r_3 = (w_3^2A_0 + w_3^2B_0 + a_1)p_3 \quad ---(7)$$

$$w_3a_3p_3 + a_1q_3 + a_2r_3 = (w_3^2A_0 + w_3^2B_0 + a_1)q_3 \quad ---(8)$$

$$w_3a_2p_3 + w_3a_3q_2 + a_1r_3 = (w_3^2A_0 + w_3^2B_0 + a_1)r_3 \quad ---(9)$$

จาก (7) $p_3 = (a_2q_3 + a_3r_3)/(w_3^2A_0 + w_3^2B_0)$

จาก (8) $q_3 = (w_3a_3p_3 + a_2r_3)/(w_3^2A_0 + w_3^2B_0)$

จาก (9) $r_3 = (w_3a_2p_3 + w_3a_3q_2)/(w_3^2A_0 + w_3^2B_0)$

จากสมการ (1) ถึง (9) จะมีเมตริกซ์ R

$$R = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & (a_2q_3 + a_3r_3)/(w_3^2A_0 + w_3^2B_0) \\ q_1 & (w_3a_3p_2 + a_2r_2)/(w_3A_0 + w_3^2B_0) & q_3 \\ (w_3a_2p_1 + w_3a_3q_1)/(A_0 + B_0) & r_2 & r_3 \end{bmatrix}$$

ถ้าให้ $p_1 = 1$, $q_1 = -1$, $p_2 = -1$, $r_2 = -1$, $q_3 = 1$, $r_3 = 1$

จะได้เมตริกซ์ R

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & (a_2+a_3)/(w_3^2A_o+w_3^2B_o) \\ -1 & (-w_3a_3-a_2)/(w_3A_o+w_3^2B_o) & 1 \\ (w_3a_2-w_3a_3)/(A_o+B_o) & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

จะตรวจสอบว่าเมตริกซ์ $R = [X_1, X_2, X_3]$ ว่า $\{X_1, X_2, X_3\}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

ให้ b_1, b_2, b_3 เป็นค่าคงที่ ซึ่ง

$$b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 = 0$$

$$b_1 - b_2 + [(a_2+a_3)/(w_3^2A_o+w_2^2B_o)]b_3 = 0$$

$$-b_1 + [(-w_3a_3-a_2)/(w_3A_o+w_3^2B_o)b_2 + b_3 = 0$$

$$[(w_3a_2-w_3a_3)/(A_o+B_o)]b_1 - b_2 + b_3 = 0$$

$$\text{ให้ } B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & (a_2+a_3)/(w_3^2A_o+w_3^2B_o) \\ 0 & (-w_3a_3-a_2)/(w_3A_o+w_3^2B_o) & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det B_1 = 0$

$$\text{ให้ } B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (a_2+a_3)/(w_3^2A_o+w_3^2B_o) \\ -1 & 0 & 1 \\ (w_3a_2-w_3a_3)/(A_o+B_o) & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det B_2 = 0$

$$\text{ให้ } B_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & (-w_3a_3-a_2)/(w_3A_o+w_3^2B_o) & 0 \\ (w_3a_2-w_3a_3)/(A_o+B_o) & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det B_3 = 0$

$$\det R = (-w_3a_3-a_2)/(w_3A_0+w_3^2B_0) + (a_2+a_3)/(w_3^2A_0+w_3^2B_0) -$$

$$(w_3a_2-w_3a_3)/(A_0+B_0)$$

$$- [(w_3a_2-w_3a_3)/(A_0+B_0)][(-w_3a_3-a_2)/(w_3A_0+w_3B_0)][(a_2+a_3)/(w_3^2A_0+w_3^2B_0)]$$

$$= [(-w_3a_3-a_2)/(w_3A_0+w_3^2B_0)] + [(2a_2)/(w_3^2A_0+w_3^2B_0)] +$$

$$[(a_2^2-a_3^2)/(w_3^2A_0+w_3^2B_0)^2][(w_3a_3+a_2)/(w_3A_0+w_3^2B_0)$$

เนื่องจาก $w_3A_0+w_3B_0$, $w_3^2A_0+w_3^2B_0$ เป็นคำตอบของสมการ (1) ทั้งสองค่าไม่เท่ากับศูนย์ และ $a_2 \neq a_3$ ดังนั้น $a_2^2 - a_3^2 \neq 0$

ดังนั้น $\det R \neq 0$

ดังนั้น $b_1 = (\det B_1)/(\det R) = 0$

$b_2 = (\det B_2)/(\det R) = 0$

$b_3 = (\det B_3)/(\det R) = 0$

นั่นคือ $b_1 = b_2 = b_3 = 0$

จะได้ว่า $\{X_1, X_2, X_3\}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

นั่นคือ เมื่อกำหนด A เป็นโอเมกา-เซอร์คูลันต์เมตริกซ์ขนาด 3x3 หาค่าไอเก็นของเมตริกซ์ A จากสมการ $\det(\lambda I_3-A) = 0$ ได้ค่า

$\lambda_1 = A_0+B_0+a_1$, $\lambda_2 = w_3A_0+w_3^2B_0+a_1$, $\lambda_3 = w_3^2A_0+w_3^2B_0+a_1$ โดยที่

$$A_0 = \sqrt[3]{1/2(w_3a_2^3+w_3^2a_3^3 + \sqrt{w_3^2a_3^6-2a_2^3a_3^3+w_3a_3^6})}$$

และ $B_0 = \sqrt[3]{1/2(w_3a_2^3+w_3^2a_3^3 - \sqrt{w_3^2a_3^6-2a_2^3a_3^3+w_3a_3^6})}$

และมีเมตริกซ์ $R = [X_1, X_2, X_3]$ โดยที่

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ (w_3a_2-w_3a_3)/(A+B) \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ (-w_3a_3-a_2)/(w_3^2A+w_3^2B) \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} (a_2+a_3)/(w_3A+w_3^2B) \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

และหลักของเมตริกซ์ R เป็นอิสระเชิงเส้น

นอกจากนี้ $AR = RD$ เมื่อ $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$

<u>ตัวอย่าง 3.24</u> กำหนด $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & i \\ w_3 i & -1 & 1 \\ w_3 & w_3 i & -1 \end{bmatrix}$ เป็นโอเมกา-เซอร์คูลันต์เมตริกซ์

จงแสดงว่ามีเมตริกซ์ R โดยที่เวกเตอร์หลักของ R เป็นอิสระเชิงเส้น และสอดคล้องกับ $AR = RD$ เมื่อ D เป็นเมตริกซ์ทแยง ซึ่งเมตริกซ์ A คล้ายกับเมตริกซ์ D และสมาชิกในแนวทแยงของ D คือ ไอเกนของ A

<u>วิธีทำ</u> $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & i \\ w_3 i & -1 & 1 \\ w_3 & w_3 i & -1 \end{bmatrix}$ เป็นโอเมกา-เซอร์คูลันต์เมตริกซ์

หาค่าไอเก็นของ A จากสมการ $\det(\lambda I_3 - A) = 0$

$$\det(\lambda I_3 - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & -i \\ -w_3 i & \lambda+1 & -1 \\ -w_3 & -w_3 i & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda+1)^3 - w_3 + w_2 i - 3w_3 i(\lambda+1)$$

$$= (\lambda+1)^3 + (-3w_3 i)(\lambda+1) + w_3 i - w_3 = 0 \text{ --(1)}$$

ให้ $y = \lambda + 1$ $\therefore \lambda = y - 1$

จาก (1) จะได้ $(\lambda+1)^3 + (-3w_3 i)(\lambda+1) + w_3^2 i - w_3$

$$= y^3 + (-3w_3 i)y + w_3^2 i - w_3 = 0 \text{ ---------(2)}$$

ให้ $a = -3w_3 i$, $b = w_3^2 i - w_3$

จะได้คำตอบของ (2) ดังต่อไปนี้

ให้ y_1, y_2, y_3 เป็นคำตอบของ (2)

ให้ $A_0 = \sqrt[3]{-b/2 + \sqrt{(a/3)^3 + (b/2)^2}}$

$B_0 = \sqrt[3]{-b/2 - \sqrt{(a/3)^3 + (b/2)^2}}$

$y_1 = A_0 + B_0$, $y_2 = w_3 A_0 + w_3^2 B_0$, $y_3 = w_3^2 A_0 + w_3^2 B_0$

แต่ $\lambda = y - 1$

$\therefore$ $\lambda_1 = A_0 + B_0 - 1$; $\lambda_2 = w_3 A_0 + w_3^2 B_0 - 1$, $\lambda_3 = w_3^2 A_0 + w_3^2 B_0 - 1$,

จะได้ค่าไอเก้น 3 ค่าที่แตกต่างกัน คือ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

หาไอเก้นเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับค่า $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

ให้ $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_3 \neq 0$ ที่ทำให้

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & i \\ w_3 i & -1 & 1 \\ w_3 & w_3 i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = (A_o+B_o-1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$-x_1 + x_2 + ix_3 \quad = \quad (A_o+B_o-1)x_1$ ----------------(1)

$w_3 ix_1 - x_2 + x_3 \quad = \quad (A_o+B_o-1)x_2$ ----------------(2)

$w_3 x_1 + w_3 ix_2 - x_3 \quad = \quad (A_o+B_o-1)x_3$ ----------------(3)

จาก (1) $\quad x_1 \quad = \quad (x_2 + ix_3)/(A_o+B_o)$

จาก (2) $\quad x_2 \quad = \quad (w_3 ix_1+x_3)/(A_o+B_o)$

$\quad = \quad [1/2(-\ 3\ -i)x_1+x_3]/(A_o+B_o)$

จาก (3) $\quad x_3 \quad = \quad (w_3x_1+w_3ix_2)/(A_o+B_o)$

$\quad = \quad [-1/2(x_1+x_2) + \sqrt{3}/2\ (-x_2+x_1)]/(A_o+B_o)$

ให้ $X_2 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$, $y_3 \neq 0$ ที่ทำให้

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & i \\ w_3 i & -1 & 1 \\ w_3 & w_3 i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = (w_3A_o+w_3^2B_o-1) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$-y_1 + y_2 + iy_3 \quad = \quad (w_3A_o+w_2^2B_o-1)y_1$ -------------(4)

$w_3iy_1 - y_2 + y_3 \quad = \quad (w_3A_o+w_3^2B_o-1)y2$ -------------(5)

$w_3y_1+w_3+w_3iy_2-y_3 \quad = \quad (w_3A_o+w_3^2B_o-1)y_3$ -------------(6)

จาก (4) $\quad y_1 \quad = \quad (y_2+iy_3)/(w_3A_o+w_3^2B_o)$

$\quad = \quad (y_2+iy_3)/(-1/2(A_o+B_o)+\sqrt{3}i/2(A_o-B_o)$

จาก (5) $y_2 = ((w_3 i y_1)+y_3)/(w_3A+w_3^2B)$

$= [(-\sqrt{3}/2 - 1/2\ i)y_1 + y_3] \ /[-1/2(A_o+B_o)+\sqrt{3}i/2(A_o-B_o)$

จาก (6) $y_3 = (w_3y_1+w_3iy_2)/(w_3A_o+w_3^2B_o)$

$= [(-1/2+\sqrt{3}i/2)y_1+(-\sqrt{3}/2 - 1/2\ i)y_2/[-1/2(A_o+B_o)$

$+ \sqrt{3}i/2\ (A_o-B_o)]$

$= [-1/2(-y_1-iy_2) + \sqrt{3}/2\ (-y_2+iy_1)]/[-1/2(A_o+B_o) +$

$\sqrt{3}i/2(A_o-B_o)$

ให้ $X_3 = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$, $z_1 \neq 0,\ z_2 \neq 0,\ z_3 \neq 0$ ที่ทำให้

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & i \\ w_3 i & -1 & 1 \\ w_3 & w_3 i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = (w_3^2A_o+w_3^2B_o-1) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$-z_1 + z_2 + iz_3 = (w_3^2A_o+w_3^2B_o-1)z_1$ ------------------------(7)

$w_3iz_1 - z_2 + z_3 = (w_3^2A_o+w_3^2B_o-1)z_2$ ------------------------(8)

$w_3z_1+w_3iz_2-z_3 = (w_3^2A_o+w_3^2B_o-1)z_3$ ------------------------(9)

จาก (7) $z_1 = (z_2+iz_3)/(w_3^2A_o+w_3^2B_o)$

$= (z_2+iz_3)/(w_3^2(A_o+B_o))$

$= (z_2+iz_3)/[(-1/2 - \sqrt{3}i/2)(A_o+B_o)]$

จาก (8) $z_2 = (w_3iz_1+z_3)/(w_3^2A_o+w_3^2B_o)$

$= [(-\sqrt{3}/2 - 1/2\ i)z_1+z_3/[(-1/2 - \sqrt{3}i/2)(A_o+B_o)]$

จาก (9) $z_3 = (w_3z_1+w_3iz_2)/(w_3^2A_o+w_3^2B_o)$

$= (-1/2(z_1+z_2 i)+\sqrt{3}/2(-z_2+iz_1)/(-1/2-\sqrt{3}i/2)(A_o+B_o)$

จาก $A_0 = \sqrt[3]{-b/2+\sqrt{(a/3)^3+(b/2)^2}}$, $a = -3w_3 i$, $b = w_3^2 i - w_3$

$$= \sqrt[3]{-(w_3^2 i-w_3)/2+\sqrt{(-3w_3 i/3)^3+(w_3^2 i-w_3/2)^2}}$$

$$= \sqrt[3]{w_3-w_3^2 i/2+\sqrt{-w_3^3 i^3+1/4(w_3^4 i^2-2w_3^2 i w_3+w_3^2)}}$$

$$= \sqrt[3]{1/2(-1/2+\sqrt{3}i/2)+\sqrt{i+1/i(-w_3-2i+w_3)}}$$

$$= \sqrt[3]{1/2[(-1/2+1/2i)+(-\sqrt{3}/2+\sqrt{3}i/2)]+\sqrt{1/4(-w_3+2i+w_3^2)}}$$

$$= \sqrt[3]{1/2(1/2(-1+i)+3/2(-1+i)]+\sqrt{1/4(1/2-\sqrt{3}i/+2i-1/2-\sqrt{3}i/2}}$$

$$= \sqrt[3]{1/2[(-1+i)(1+\sqrt{3})/2]+1/2\sqrt{(2-\sqrt{3})i}}$$

$$= \sqrt[3]{1/4(-1+i)(1+\sqrt{3})+1/2\sqrt{(2-\sqrt{3})i}}$$

จาก $B = \sqrt[3]{-b/2-\sqrt{(a/3)^3+(b/2)^2}}$

$$= \sqrt{1/4(-1+i)(1+\sqrt{3})-1/2\sqrt{(2-\sqrt{3})i}}$$

$$A+B = \sqrt[3]{1/4(-1+i)(1+\sqrt{3})+1/2\sqrt{(2-\sqrt{3})i}}+\sqrt[3]{1/4(-1+i)(1+\sqrt{3})-1/2\sqrt{(2-\sqrt{3})i}}$$

$$A-B = \sqrt[3]{1/4(-1+i)(1+\sqrt{3})+1/2\sqrt{(2-\sqrt{3})i}}-\sqrt[3]{1/4(-1+i)(1+\sqrt{3})-1/2\sqrt{(2-\sqrt{3})i}}$$

จากสมการ (1) ถึง (9) จะได้ว่ามี R

$$R = \begin{bmatrix} X_1 & y_1 & \dfrac{z_2+iz_3}{[(-1/2-\sqrt{3}i/2)(A_0+B_0)]} \\ X_2 & \dfrac{(-\sqrt{3}/2-1/2\,i)y_1+y_3}{-1/2(A_0+B_0)+\sqrt{3}i/2(A_0-B_0)} & z_2 \\ \dfrac{-1/2(x_1+x_2)+\sqrt{3}/2(-x_2+x_1)}{A_0+B_0} & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

ถ้าให้ $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $y_1 = -1$, $y_3 = -1$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1$

จะได้เมตริกซ์ R

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & (1+i)/[(-1/2-\sqrt{3}i/2)(A_o+B_o)] \\ -1 & (\sqrt{3}-2+i)/-(A_o+B_o)+\sqrt{3}i(A_o-B_o) & 1 \\ \sqrt{3}/(A_o+B_o) & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

จะตรวจสอบว่า $\{X_1, X_2, X_3\}$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

ให้ m_1, m_2, m_3 เป็นค่าคงที่ซึ่ง

$$m_1X_1 + m_2X_2 + m_3X_3 = 0$$

$$m_1-m_2 + [(1+i)/((-1/2 - \sqrt{3}i/2)(A_o+B_o))]m_3 = 0$$

$$-m_1 + [(\sqrt{3}-2i)/(-(A_o+B_o)+\sqrt{3}i(A_o-B_o))]m_2 + m_3 = 0$$

$$(\sqrt{3}/A_o+B_o)m_1 - m_2 + m_3 = 0$$

ให้ $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & (1+i)/[(-1/2-\sqrt{3}/2i)(A_o+B_o)] \\ 0 & (\sqrt{3}-2+i)/[-(A_o+B_o)+(\sqrt{3}i(A_o-B_o)] & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\det A_1 = 0$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (1+i)/[(-1/2-\sqrt{3}i/2)(A_o+B_o)] \\ -1 & 0 & 1 \\ \sqrt{3}/(A_o+B_o) & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det A_2 = 0$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & (\sqrt{3}-2+i)/[(A_o+B_o)+(\sqrt{3}i(A_o+B_o)] & 0 \\ \sqrt{3}/(A_o+B_o) & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det A_3 = 0$

$$\det R = (\sqrt{3}-2+i)/[-(A_0+B_0)+\sqrt{3}i(A_0-B_0)]+(1+i)/[(-1/2-\sqrt{3}i/2)(A_0+B_0)]-\sqrt{3}/(A_0+B_0)$$

$$-(\sqrt{3}/(A_0+B_0))(\sqrt{3}-2+i)/-(A_0+B_0)+\sqrt{3}i(A_0-B_0))((1+i)/(-1/2-\sqrt{3}/2i)(A_0+B_0))$$

เนื่องจาก $A_0+B_0 \neq 0$ และ $A_0 - B_0 \neq 0$

ดังนั้น $\det R \neq 0$

$$m_1 = \det A_1/\det R = 0$$

$$m_2 = \det A_2/\det R = 0$$

$$m_3 = \det A_3/\det R = 0$$

นั่นคือ $m_1 = m_2 = m_3 = 0$

จะได้ว่า $\{X_1, X_2, X_3\}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

<u>ทฤษฎีบท 3.2.1</u> กำหนดให้ A เป็นเอเมกา-เซอร์คูลันต์เมตริกซ์และ D เป็นเมตริกซ์ทแยง

ถ้าเมตริกซ์ A คล้ายกับเมตริกซ์ D แล้ว เมตริกซ์ทั้งสองนี้มีสมการคาแรกเตอริสติกเหมือนกัน

<u>พิสูจน์</u> เมตริกซ์ A คล้ายกับเมตริกซ์ D

ดังนั้น $D = M_n^{-1} A M_n$

$\det(\lambda I_n - A) = 0$ เป็นสมการคาแรกเตอริสติกของเมตริกซ์ A

พิจารณา
$$\begin{aligned}\det(\lambda I_n - A) &= \det[M_n^{-1} M_n (\lambda I_n - A)] \\ &= \det[M_n^{-1} (\lambda I_n - A) M_n] \\ &= \det(M_n^{-1} \lambda I_n M_n - M_n^{-1} A M_n) \\ &= \det(\lambda I_n - M_n^{-1} A M_n) = \det(\lambda I_n - D)\end{aligned}$$

นั่นคือ ถ้าเมตริกซ์ A คล้ายกับเมตริกซ์ D แล้ว เมตริกซ์ทั้งสองมีสมการคาแรกเตอริสติกเหมือนกัน

<u>ทฤษฎีนำ 3.2.1</u> ถ้า D เป็นเมตริกซ์ทแยง ขนาด nxn แล้ว คำตอบของสมการคาแรกเตอริสติกโพลิโนเมียลคือ สมาชิกในแนวทแยงมุม

<u>พิสูจน์</u> ให้ D เป็นเมตริกซ์ทแยงขนาด nxn

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

สมการคาแรกเตอริสติกของ D ก็คือ $\det(XI_n - D) = 0$

พิจารณา
$$XI_n - D = X\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}X & 0 & \cdots & 0\\ 0 & X & \cdots & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & X\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}X-\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & X-\lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & X-\lambda_n\end{bmatrix}$$

$\therefore \det(XI_n - D) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_n) = 0$

จะได้คำตอบของสมการคือ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

นั่นคือ คำตอบของสมการคาแรกเตอริสติกเป็นสมาชิกในแนวทแยงมุมของ D

<u>ทฤษฎีบท 3.2.2</u> ถ้าเมตริกซ์ A เป็นโอเมกา-เซอร์คูลันต์เมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ซึ่งคล้ายกับเมตริกซ์ทแยง D แล้วคำตอบของสมการคาแรกเตอริสติกของเมตริกซ์ A จะเป็นสมาชิกในแนวทแยงมุมของเมตริกซ์ D

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจากเมตริกซ์ A คล้ายกับเมตริกซ์ D

โดยทฤษฎีบท 3.2.2 จะได้ว่า $\det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda I_n - D)$

เมตริกซ์ D เป็นเมตริกซ์ทแยงขนาด $n \times n$

โดยทฤษฎีนำ 3.2.1 จะได้ว่าคำตอบของสมการ $\det(\lambda I_n - D)$

เป็นสมาชิกในแนวทแยงมุมของ D

แต่ $\det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda I_n - D)$

ดังนั้น สมาชิกในแนวทแยงมุมของ D จึงเป็นคำตอบของสมการ $\det(\lambda I_n - A)$ ด้วย

นั่นคือ ถ้าเมตริกซ์ A คล้ายกับเมตริกซ์ D แล้วคำตอบของสมการคาแรกเตอริสติกของเมตริกซ์ A จะเป็นสมาชิกในแนวทแยงของเมตริกซ์ D