บทที่ 4

การหาคำตอบของสมการพีชคณิต

สำหรับบทนี้ เป็นการหาคำตอบของสมการพีชคณิตโดยใช้คุณสมบัติของเซอร์คูลันเมตริกซ์

4.1 การหาคำตอบของสมการ

นิยาม 4.1.1 สมการโพลิโนเมียลอันดับ n

สมการ $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$ เป็นสมการอันดับ n ของตัวแปร x ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนคงค่า $a_0 \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก เรียกสมการดังกล่าวว่า สมการโพลิโนเมียลอันดับ n

นิยาม 4.1.2 สมการควอดราติก (Quadratic equation)

เรียกสมการโพลิโนเมียลอันดับ 2 ว่า สมการควอดราติก

ตัวอย่าง 4.1.1 $x^2 + 3x + 4 = 0$, $4x^2 + 5x + 3 = 0$ เป็นสมการควอดราติก

นิยาม 4.1.3 สมการคิวบิค (Cubic equation)

เรียกสมการโพลิโนเมียลอันดับ 3 ว่า สมการคิวบิค

ตัวอย่าง 4.1.2 $x^3 + 5x^2 + 2x + 1 = 0$, $x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 0$

เป็นสมการคิวบิค

นิยาม 4.1.4 สมการไบควอดราติก (Biquadratic equation)

เรียกสมการโพลิโนเมียลอันดับ 4 ว่า สมการไบควอดราติก

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

<u>ตัวอย่าง 4.1.4</u> $4x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 4x + 1 = 0$, $x^4 + 6x^2 + 3x + 1 = 0$

เป็นสมการไบควอดราติก

4.1.1 <u>การหาคำตอบของสมการคิวบิค</u>

ในการหาคำตอบของสมการคิวบิค โดยใช้เซอร์คูลันต์เมตริกซ์ขนาด 3x3 และสูตรของการ์ดาน ให้ F เป็นฟิลด์ และมีคุณสมบัติว่าแต่ละสมาชิก α ซึ่งอยู่ใน F สมการ $x^3 = \alpha$ มีคำตอบใน F ถ้าพิจารณาเมตริกซ์ A ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{bmatrix}$$

หาดีเทอร์มินันต์ของเมตริกซ์ A

$$\det A = x^3 + (-3yz)x + (y^3 + z^3)$$

$$= (x+y+z)(x+wy+w^2z)(x+w^2y+wz)$$

$$= \prod_{s=1}^{3} (x+w_3^{s-1}y+w_3^{2(s-1)}z) \quad \text{---------------(1)}$$

พิจารณาสมการ $x^3 + (-3yz)x + (y^3 + z^3) = 0$

ถ้าแทน y ด้วย −y และแทน z ด้วย −z จะได้

$$x^3 + (-3yz)x + (-y^3-z^3) = \prod_{s=1}^{3} (x-w_3^{s-1}y-w_3^{2(s-1)}z) \quad \text{-------(2)}$$

ให้ α และ β เป็นสมาชิกของ F

ดังนั้นคำตอบของสมการ $x^3 + \alpha x+\beta = 0$ จะเป็นคำตอบของสมการ

$x^3 + (-3yz)x + (-y^3-z^3) = 0$ โดยที่ x เป็นตัวไม่ทราบค่า

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

เมื่อ $\alpha = -3yz$ -------------(3)

และ $\beta = -y^3-z^3$ -------------(4)

ให้ $T = y^3$

จาก (3), (4) จะได้

$$\beta = -T - z^3$$

$$T + z^3 + \beta = 0$$

แทนค่า $z = -\alpha/3y$

$$T + (-\alpha/3y)^3 + \beta = 0$$

$$T + (-\alpha/3)^3(1/y^3) + \beta = 0$$

$$T + (-\alpha/3)^3(1/T) + \beta = 0$$

T คูณตลอด

$$T^2 + \beta T + (-\alpha/3)^3 = 0 \quad \text{------------------------(5)}$$

สมมุติ y_o และ z_o เป็นคำตอบของสมการ (3) และ (4)

พิจารณาคำตอบของสมการ (5) ได้ 2 กรณี

1. สมมุติว่า $\alpha \neq 0$ หรือ $\beta \neq 0$

ให้ t_o เป็นคำตอบที่ไม่เท่ากับศูนย์ของสมการ (5)

และ $z_o = -\alpha/3y_o$

ดังนั้นจะได้ว่า (y_o, z_o) เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ (3) และ (4)

นั่นคือ $x^3 + \alpha x + \beta = 0 = \prod_{s=1}^{3} (x-w_3^{s-1}y_o - w_3^{(s-1)}z_o$

จะมีคำตอบ $x_s = w_3^{s-1}y_o + w_3^{2(s-1)}z_o$, $s = 0,1,2$

2. สมมุติ $\alpha = 0, \beta = 0$

ดังนั้น จะได้ $y_o = 0, z_o = 0$

แทนค่า y, z ด้วย y_o, z_o ในสมการ (2)

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

จะได้ว่า $x^3 + \alpha x + \beta = \prod_{s=1}^{3} (x - w_3^s y_0 - w_3^{2s} z_0)$

ดังนั้นสมการ $x^3 + \alpha x + \beta = 0$ มีคำตอบ 3 คำตอบใน F คือ

x_0, x_1, x_2 โดยที่ $x_s = w_3^s y_0 + w_3^{2s} z_0$, $s = 0,1,2$

ในกรณีที่สมการที่กำหนดในรูป $\bar{x}^3 + \alpha_1\bar{x}^2 + \alpha_2\bar{x} + \alpha_3 = 0$

โดยที่ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F$ และ $\alpha_1 \neq 0$

จะแทน $\bar{x} = x - \alpha_1/3$

จะได้สมการ $x^3 + \alpha x + \beta = 0$ ซึ่งสามารถหาคำตอบได้โดยใช้สูตรการ์ดาน

นั่นคือ สมการคิวบิคมีคำตอบใน F เสมอ

4.1.2 <u>การหาคำตอบของสมการไบควอดราติก</u>

ในการหาคำตอบของสมการไบควอดราติก โดยใช้เซอร์คูลันต์เมตริกซ์ขนาด 4x4 และสูตรของการ์ดาน โดยกำหนดค่า $w_4 = i$ ถ้าพิจารณาเมตริกซ์ A ซึ่งกำหนดโดย

$$A = \begin{bmatrix} x & u & v & w \\ w & x & u & v \\ v & w & x & u \\ u & v & w & x \end{bmatrix}$$

$$\det A = x^4 + (-2v^2-4uw)x^2+(4u^2v+4vw^2)x+(-u^4+v^4-w^4-2u^2w^2-4uv^2w)$$

$$= \prod_{s=1}^{4} (x + i^{s-1}u + i^{2(s-1)}v + i^{3(s-1)}w)$$

พิจารณาสมการ

$$x^4+(-2v^2-4uw)x^2+(4u^2v+4vw^2)x+(-u^4+v^4-w^4-2u^2w^2-4uv^2w) = 0 \text{ ------(1)}$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

ถ้าแทนค่า u, v, w ด้วย $-u, -v, -w$ ตามลำดับในสมการ (1) จะได้

$$x^4+(-2v^2-4uw)x^2+(-4u^2v-4vw^2)x+(-u^4+v^4-w^4-2u^2w^2-4uv^2w) = 0$$

และจะได้ว่า $\prod_{s=1}^{4} (x - i^{s-1}u - i^{2(s-1)}r - i^{3(s-1)}w) = 0$

จากสมการที่ได้ จะหาคำตอบของสมการไบควอดราติก โดยอาศัยทฤษฎีต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีบท 4.1.1</u> ให้ $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ โดยที่ $a,b,c \in F$

ถ้า $a = b = c = 0$ แล้วจะได้ว่า $u_o = v_o = w_o = 0$

ถ้า a,b,c ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ให้ $v_o \neq 0$ เป็นคำตอบของสมการ

$$(4v^2)^3 + 2a(4v^2)^2 + (a^2 - 4c)(4v^2) - b^2 = 0$$

และให้ $u_o, w_o \in F$ เป็นคำตอบของสมการ

$$uw = -v_o^2/2 - a/4$$

และ $u^2 + w^2 = -b/4v_o$ แล้ว

สมการ $f(x)$ จะมีคำตอบคือ $x_s \in F$ โดยที่

$$x_s = i^{s-1}u_o + i^{2(s-1)}v_o + i^{3(s-1)}w_o,\ s = 1,2,3,4$$

<u>พิสูจน์</u> จะแสดงว่า (u_o, v_o, w_o) เป็นคำตอบของสมการ

$$4uw = -2v^2 - a \qquad \text{-----------------(1)}$$

$$4v(u^2+w^2) = -b \qquad \text{-----------------(2)}$$

และ $(u^2+w^2) + 8uv^2w = (a^2 - 4c)/4$ ----------------(3)

สำหรับ $a = b = c = 0$ จะได้ $u_o = v_o = w_o = 0$ เป็นคำตอบของสมการ (1), (2), (3)

สำหรับ a, b, c ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และสำหรับ $v_o \neq 0$

จากสมการ $(4v^2)^3 + 2a(4v^2)^2 + (a^2-4c)(4v^2) - b^2 = 0$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

จะได้ $4^2v^2(\ (a^2 - 4c)/4\ - 2(-2v^2-a)v^2)\ = b^2$ ----(4)

ดังนั้น $(u_o,\ v_o,\ w_o)$ เป็นคำตอบของสมการ (1), (2), (3) และ (4)

แทน (1), (2) ใน (4)

$$4^2v^2((a^2-4c)/4 - 8uv^2w) \quad = \quad 4^2v^2(u^2+w^2)^2$$

นั่นคือ ถ้า $v_o \neq 0$ จะได้ (u_o, v_o, w_o) เป็นคำตอบของ (3) ด้วย

จาก (1) จะได้ว่า $-2v^2 - 4uw \ = \ a$ ------------(5)

จาก (2) จะได้ว่า $-4u^2v - 4vw^2 = \ b$ ------------(6)

จาก (3) จะได้ว่า $-u^4+v^4-w^4-2u^2w^2-4uv^2w \ = \ c$ ---------(7)

แทนค่า $(u_o,\ v_o,\ w_o)$ ใน (1) หัวข้อ 4.1.2 และ (5), (6), (7) จะได้ว่า $x_4 + ax^2 + bx + c = \prod_{s=1}^{4}(x-i^{s-1}u_o-i^{2(s-1)}v_o-i^{3(s-1)}w_o)$

ดังนั้นจะได้ว่าคำตอบของ $f(x)$ คือ $x_s \in F$ โดยที่

$$x_s \ = \ i^{s-1}u_o + i^{2(s-1)}v_o + i^{3(s-1)}w_o,\ s = 1,2,3,4$$

<u>บทแทรก 4.1.1</u> สมมุติ $u_o,\ v_o,\ w_o$ เป็นสมาชิกของ F สอดคล้องกับสมการ

$$4uw \quad = \quad -2v^2a$$

$$4v(u^2+w^2) \quad = \quad -b$$

$$(u^2+w^2)^2+8uwv^2 \quad = \quad (a^2 - 4c)/4$$

กำหนด $r_1 \ = \ (1+i)u_o + (1-i)w_o$

$r_2 \ = \ 2v_o$

$r_3 \ = \ (1-i)u_o + (1+i)w_o$ แล้ว

$$r_1r_2r_3 \quad = \quad -b$$

และ $y^3 + 2ay^2 + (a^2-4c)y - b^2 \ = 0$ จะมีคำตอบใน F คือ

$r_1^2,\ r_2^2$ และ r_2^2

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

<u>หมายเหตุ</u> สมการ $y^3 + 2ay^2 + (a^2 - 4c)y - b^2 = 0$ ได้มาจากการแทนค่า

$y = 4v_o$ ในทฤษฎีบท 4.1.1

<u>พิสูจน์</u> จาก

$$r_1 = (1+i)u_o + (1-i)w_o$$

$$r_2 = 2v_o$$

$$r_3 = (1-i)u_o + (1+i)w_o$$

$$4uw = -2v^2 - a$$

$$4v(u^2+w^2) = -b$$

$$(u^2+w^2)^2+8uwv^2 = (a^2 - 4c)/4$$

จะได้ $(y-r_1^2)(y-r_2^2)(y-r_3^2) = (y_s-r_2^2)(y^2-8u_ow_oy+4(u_o^2+w_o^2)^2)$

$$= y^3+(-4v_o^2-8u_ow_o)y^2+(4(u_o^2+w_o^2)^2 +32u_ow_ov_o^2)y-16v_o^2(u_o^2+w_o^2)^2$$

$$= y^3 + 2ay^2 + (a^2 - 4c)y - b^2$$

ดังนั้นคำตอบของสมการ $y^3 + 2ay^2 + (a^2-4c)y - b^2 = 0$

คือ r_1^2, r_2^2, r_3^2

$$r_1r_2r_3 = [(1+i)u_o+(1-i)w_o]2v_o[(1-i)u_o+(1+i)w_o]$$

$$= (2u_o^2+2iu_ow_o-2iu_ow_o+2w_o^2)2v_o$$

$$= (2u_o^2 + 2w_o^2)2v_o$$

$$= 4v_o(u_o^2 + w_o^2)$$

$$= -b$$

นั่นคือ $r_1r_2r_3 = -b$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

<u>ทฤษฎีบท 4.1.2</u> กำหนดให้สมาชิก r_1, r_2, r_3 ของ F สอดคล้องกับสมการ

$y^3+2ay^2+(a^2-4c)y-b^2=0$ และ $r_1r_2r_3=-b$

แล้วสมการ $x^4+ax^2+bx+c=0$ มีคำตอบ 4 คำตอบใน F ซึ่งกำหนดโดย

$$x_1=(r_1+r_2+r_3)/2$$

$$x_2=(r_1-r_2-r_3)/2$$

$$x_3=(-r_1+r_2-r_3)/2$$

$$x_4=(-r_1-r_2+r_3)/2$$

<u>พิสูจน์</u> จากบทแทรก 4.1.1 r_1, r_2, r_3 จัดรูปแบบใหม่จะได้

$$4u_o = (1-i)r_1+(1+i)r_3$$

$$2v_o = r_2$$

$$4w_o = (1+i)r_1+(1-i)r_3$$

ดังนั้น $4u_ow_o+2v_o^2=(r_1+r_2+r_3)/2=-a$

$$4v_o(u_o^2+w_o^2) = r_1r_2r_3 = -b$$

$$(u_o^2+w_o^2)^2+8u_ow_ov_o^2 = (r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3)/4 = (a^2-4c)/4$$

ดังนั้น u_o, v_o, w_o เป็นคำตอบของสมการจากทฤษฎี 4.1.1

<u>ทฤษฎีบท 4.1.3</u> ดีเทอร์มินันต์ของเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

ให้ w_n เป็น รากที่ n ของ 1 ที่เป็นพริมิทีฟ และเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ A

$$A=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_n & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_3 & x_2 & \cdots & x_2 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_1 \end{bmatrix}$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

แล้ว $\det A = f_0 f_1 \ldots f_{n-1}$ โดยที่

$f_s = x_1 + w_n x_2 + w_n^{2s} x_3 + \ldots + w_n^{(n-1)s} x_n$,

สำหรับ $s = 0,1,2,\ldots,n-1$

<u>พิสูจน์</u> สำหรับ $k = 1,2,\ldots,n.$

ให้ R_k แทนแถวที่ k ของ A

$$R = R_1 + \sum_{k=2}^{n} w_n^{(n-k+1)s} R_k$$

จะได้ว่า $R = (f_s, w_n^{(n-1)s} f_s, w_n^{(n-2)s} f_s, \ldots, w_n^{s} f_s)$

ให้ B แทนเมตริกซ์ที่เกิดจากการแทนแถวที่ 1 ของเมตริกซ์ A ด้วย R

จะได้ว่า $\det B = \det A$

และ f_s หาร $\det A$ ลงตัว

ดังนั้น $f_0 f_1 \ldots f_{n-1}$ เป็นตัวประกอบของ $\det A$

จะได้ว่า $\det A = q f_0 f_1 \ldots f_{n-1}$

$$n = \deg(\det A) = \deg q + \sum_{s=0}^{n-1} \deg f_s = \deg q + n$$

และ $\deg q = 0$ ดังนั้น $\det A = f_0 f_1 \ldots f_{n-1}$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

4.2 <u>การหาคำตอบของสมการโมนิคโพลิโนเมียล เมื่อ $n = 1,2,3,4$</u>

ให้ $f(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_n$

เป็นโมนิคโพลิโนเมียลที่ $n \geq 1$ บนฟิลด์ของจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้นจะมี $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ในเซตของจำนวนเชิงซ้อนที่ทำให้เมตริกซ์ A ซึ่งเป็นเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdot & & & \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$$

มี $f(x)$ เป็นคาแรกเตอริสติกโพลิโนเมียล โดยที่ $f(x) = \det(XI-A)$ และได้พิสูจน์แล้วว่า

$$\det(XI_n - A) = \prod_{s=1}^{n} \left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k w_n^{(k-1)(s-1)}\right)$$

ซึ่งเป็นทฤษฎีบท 3.1.5

เมื่อ w_n เป็นรากที่ n ของ 1 ที่เป็นพริมิทีฟ

โดยทฤษฎีบท 3.1.4 จะได้ว่า $f_s = \sum_{k=1}^{n} a_k w_n^{(k-1)(s-1)}$, $s = 1,2,\ldots,n$

เป็นค่าไอเก็นของ A

(ก) การหาคำตอบของสมการโมนิคโพลิโนเมียล สำหรับ $n = 1$

$$f(x) = x + c_1 = 0$$

ดังนั้นจะมีเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ A ขนาด 1x1 คือ $A = [a_1]$

ซึ่งมี $f(x) = \det(xI_n - A)$

$= x - a_1$

$x - a_1 = 0$

$\therefore \quad x = a_1$

ดังนั้นคำตอบของ $f(x)$ คือ a_1

นั่นคือ $c_1 = -a_1$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

<u>ตัวอย่าง 4.2.1</u> จงหาคำตอบของ $f(x) = x + 9i = 0$ และจงเขียนเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ A ที่มีค่าไอเก็นเป็นคำตอบของ $f(x) = 0$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $f(x) = x + 9i = 0$

ดังนั้นคำตอบของสมการ $f(x) = -9i$

ให้ $A = [a_1]$

ดังนั้น $a_1 = -9i$

นั่นคือ $A = [-9i]$

(ข) การหาคำตอบของสมการโมนิคโพลิโนเมียล สำหรับ $n = 2$

จาก $f(x) = x^2 + c_1x + c_2 = 0$

ดังนั้นมี เซอร์คูลันต์เมตริกซ์ขนาด 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งมี
$$\begin{aligned}
f(x) &= \det(xI_2 - A) \\
&= \prod_{s=1}^{n} \left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k w_n^{(k-1)(s-1)}\right) \\
&= \prod_{s=1}^{2} \left(x - \sum_{k=1}^{2} a_k w_2^{(k-1)(s-1)}\right) \\
&= (x - a_1 - a_2)(x - a_1 + a_2) \\
&= (x - a_1)^2 - a_2^2 \\
&= x^2 - 2a_1x + a_1^2 - a_2^2 \\
&= x^2 - 2a_1x + (a_1^2 - a_2^2)
\end{aligned}$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ดังนั้น $x^2 + c_1x + c_2 = x^2 - 2a_1x + (a_1^2 - a_2^2)$

จะได้ $c_1 = -2a_1$

$$\therefore \; a_1 = (-c_1)/2$$

$$c_2 = a_1^2 - a_2^2$$

$$a_2^2 = a_1^2 - c_2$$

$$= (-c_1/2)^2 - c_2$$

$$= (c_1/2)^2 - c_2$$

$$a_2 = \sqrt{(c_1/2)^2 - c_2}$$

เซอร์คูลันต์เมตริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} -c_1/2 & \sqrt{(c_1/2)^2 - c_2} \\ \sqrt{(c_1/2)^2 - c_2} & -c_1/2 \end{bmatrix}$$

ค่าไอเก็นของเมตริกซ์ A คือ

$$f_m = \sum_{k=1}^{n} a_k w_n^{(k-1)(m-1)}$$

$$f_1 = a_1 + a_2$$

$$f_2 = a_1 - a_2$$

<u>ตัวอย่าง 4.2.2</u> . จงหาคำตอบของ $f(x) = x^2 - 2x + 3 = 0$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 2x + 3 = 0$

ดังนั้น $c_1 = -2$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

$$c_2 = 3$$

นั่นคือ $a_1 = -c_1/2 = 2/2 = 1$

$$a_2 = \sqrt{(c_1/2)^2 - c_2}$$

$$= \sqrt{1 - 3}$$

$$= \sqrt{-2} = 2i$$

ดังนั้นคำตอบของสมการ $f(x)$ คือ $1 + 2i$ และ $1 - 2i$

(ค) การหาคำตอบของสมการโมนิคโพลิโนเมียล สำหรับ $n = 3$

$$f(x) = x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3 = 0$$

ดังนั้นมีเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ A ขนาด 3x3

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่ง} \quad f(x) = \det(xI_3 - A)$$

$$f(x) = \det \begin{bmatrix} x-a_1 & -a_2 & -a_3 \\ -a_3 & x-a_1 & -a_2 \\ -a_2 & -a_3 & x-a_1 \end{bmatrix}$$

$$= (x-a_1)^3 - a_2^3 - a_3^3 - 3a_2a_3(x-a_1)$$

$$= (x-a_1)^3 - 3a_2a_3(x-a_1) - (a_2^3+a_3^3)$$

$$= x^3 - 3x^2a_1 + 3xa_1^2 - a_1^3 - 3a_2a_3x + 3a_2a_3a_1 - (a_2^3+a_3^3)$$

$$= x^3 - 3a_1x^2 + (3a_1^2 - 3a_2a_3)x - (a_1^3+a_2^3+a_3^3)+3a_1a_2a_3$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

และ $f(x) = x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3$

จะได้ว่า $c_1 = -3a_1$

$\therefore a_1 = -c_1/3$

เปลี่ยน $f(x)$ เป็น $g(y)$ โดยให้ $y = x - a_1$, $x = y + a_1$

$$f(y+a_1) = g(y) = y^3 + (-3a_2a_3)y - (a_2^3+a_3^3)$$

$$= y^3 + d_2y + d_3$$

โดยที่ $d_2 = -3a_2a_3$, $d_3 = -(a_2^3 + a_3^3)$

ถ้าคำตอบของ $g(y)$ หาได้ ดังนั้นคำตอบของ $f(x)$ สามารถหาได้

ให้ $T = a_2^3$

$\therefore d_3 = -(a_2^3-a_3^3) = -T - a_3^3$

จาก $d_2 = -3a_2a_3$

$\therefore a_3 = -d_2/3a_2$

นั่นคือ $d_3 = -T - a_3^3$

$= -T +(-d_2/3a_2)^3$

$$T + (-d_2/3a_2)^3 + d_3 = 0$$

$$T - (d_2/3)^3 (1/a_2^3) + d_3 = 0$$

$$T - (d_2/3)^3 (1/T) + d_3 = 0$$

$$T^2 + d_3T - (d_2/3)^3 = 0$$

ให้ t_o เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ

$\therefore T = a_2^3 = t_o$ (T มี 2 ค่า โดยที่ t_o เป็นค่าหนึ่งของสมการ)

จากสมการ $a_2^3 = t_o$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ให้ y_o เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ $a_2^3 = t_o$ (a_2 มี 3 ค่า โดยที่ y_o เป็นค่าหนึ่ง)

เนื่องจาก $d_2 = -3a_2a_3$

ดังนั้น $a_3 = -d_2/3a_2$

เพราะว่า a_2 มี 3 ค่า ดังนั้น a_3 ใน $a_3 = -d_2/3a_2$ จึงมี 3 ค่าด้วย

ให้ $a_3 = z_o = -d_2/3y_o$ ซึ่งเป็นค่าหนึ่ง

ให้ P เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชันขนาด 3x3 ซึ่งมีได้ 6 แบบที่แตกต่างกัน

เนื่องจาก $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_3 & w_3^2 \\ 1 & w_3^2 & w_3 \end{bmatrix}$ โดยที่ $w_3 = -1/2 + \sqrt{3}i/2$

ดังนั้นจะมีเมตริกซ์ $[0, y_o, z_o]M_3PM_3^{-1}$ ซึ่งเป็นเมตริกซ์ขนาด 1x3 ได้ 6 เมตริกซ์ดังนี้

$[0, y_o, z_o]$, $[0, y_ow_3, z_ow_3^2]$, $[0, y_ow_3^2, z_ow_3]$

$[0, z_o, y_o]$, $[0, z_ow_3, y_ow_3^2]$, $[0, z_ow_3^2, y_ow_3]$

สมาชิกในแต่ละเมตริกซ์แถว จะเป็นแถวแรกของเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ขนาด 3x3 ทั้ง 6 เมตริกซ์ จะมีค่าไอเก็นเป็นคำตอบของสมการ

$$g(y) = y^3 + d_2y + d_3 = 0$$

โดยสูตรของการ์ดาน จะได้คำตอบของสมการ g(y) คือ

$$y_ow_3 + z_ow_3^{2(s-1)}, \quad s = 1,2,3$$

<u>ตัวอย่าง 4.2.3</u> จงหาคำตอบของ $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

<u>วิธีทำ</u> ให้ $x = y + a_1$, $a_1 = -c_1/3$

$\therefore x = y - c_1/3$

$= y - 3/3$

$= y - 1$

ดังนั้น $g(y) = f(y-1) = (y-1)^3 + 3(y-1)^2 - 3(y-1) + 1$

$= y^3 - 3y^2 + 3y + 3y^2 - 6y + 3 - 3y + 3$

$= y^3 - 6y + 6$

นั่นคือ $d_2 = -6$, $d_3 = 6$

เมื่อ $T = a_2^3$

จะได้ $T^2 + d_3T - (d_2/3)^3 = T^2 + 6T + 8 = 0$

$(T+4)(T+2) = 0$

$T = -4, -2$

ให้ $t_0 = -2$

$\therefore a_2 = -2$

ให้ y_0 เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ

จะได้ $y_0 = \sqrt[3]{-2}$

$z_0 = -d_2/3y_0 = 6/3y_0 = 2/\sqrt[3]{-2}$

ดังนั้นคำตอบของสมการ $g(y)$ คือ $y_0 + z_0$, $y_0w_3+z_0w_3^2$, $y_0w_3^2+z_0w_3$

นั่นคือคำตอบของสมการ $f(x)$ คือ y_0+z_0-1, $y_0w_3+z_0w_3^2-1$, $y_0w_3^2+z_0w_3-1$

โดยที่ $y_0 = \sqrt[3]{-2}$, $z_0 = 2/\sqrt[3]{-2}$

(ง) การหาคำตอบของสมการโมนิคโพลิโนเมียลสำหรับ $n = 4$

$$f(x) = x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4 = 0$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

จะมีเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ A คือ $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \end{bmatrix}$

ซึ่ง $f(x) = \det(xI_4 - A)$

$$= \det \begin{bmatrix} x-a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ -a_4 & x-a_1 & -a_2 & -a_3 \\ -a_3 & -a_4 & x-a_1 & -a_2 \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & x-a_1 \end{bmatrix}$$

$$= (x-a_1)^4 + (-2a_3^2 - 4a_2a_4)(x-a_1)^2 + (-4a_2^2a_3 - 4a_3a_4^2)(x-a_1)$$
$$+ (-a_2^4 + a_3^4 - a_4^4 + 2a_2^2a_4^2 - 4a_2a_3^2a_4)$$

จะได้ $c_1 = -4a_1$

ดังนั้น $a_1 = -c_1/4$

เปลี่ยน $f(x)$ เป็น $g(y)$ โดยให้ $y = x - a_1$

ดังนั้น $f(y+a_1) = g(y) = y^4 + d_2y^2 + d_3y + d_4$

โดยที่ $d_2 = -2a_3^2 - 4a_2a_4$

$d_3 = -4a_2^2a_3 - 4a_3a_4^2$

$d_4 = -a_2^4 + a_3^4 - a_4^4 + 2a_2^2a_4^2 - 4a_2a_3^2a_4$

ถ้าคำตอบของ $g(y)$ ใน $y^4 + d_2y^2 + d_3y + d_4 = 0$ หาค่าได้

ดังนั้นคำตอบของ $f(x)$ หาได้ด้วย

ในกรณีที่ d_2, d_3, d_4 ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ดังนั้นจะมี $v_0 \neq 0$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ

$$(4a_3^2)^2 + 2d_2(4a_3^2)^2 + (d_2^2 - 4d_4)(4a_3^2) - d_3^2 = 0$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ดังนั้น $a_3 = v_o$

จาก $d_2 = -2a_3^2 - 4a_2a_4$

จะได้ว่า $a_2a_4 = -2a_3^2/4 - d_2/4$

$= -v_o^2/2 - d_2/4$

จาก $d_3 = -4a_2^2a_3 - 4a_3a_4^2$

จะได้ว่า $a_2^2a_3+a_3a_4^2 = -d_3/4$

ดังนั้น $a_3(a_2^2+a_4^2) = -d_3/4$

$a_2^2+a_4^2 = -d_3/4a_3 = -d_3/4v_o$, $(a_3 = v_o)$

ให้ u_o, w_o เป็นคำตอบของสมการ

$(4a_3^2)^3 + 2d_2(4a_3^2)^2 + (d_2^2 - 4d_4)(4a_3^2) - d_3^2 = 0$

และ $a_2a_4 = -2a_3^2/4 - d_2/4 = -v_o^2/2 - d_2/4$

จะได้ $(a_2+a_4)^2 = (-v_o^2 - d_2/2) - d_3/4v_o$

และ $(a_2-a_4)^2 = (v_o^2 + d_2/2) - d_3/4v_o$

ให้ u_o+w_o เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ

$a_2^2 + a_4^2 = -d_3/4v_o$

ดังนั้นให้ $a_2 + a_4 = u_o + w_o = \sqrt{-v_o^2 + d_2/2 - d_3/4v_o}$

ให้ $u_o - w_o$, เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ

$(a_2 - a_4)^2 = \sqrt{-(v_o^2 - d_2/2) - d_3/4v_o}$

ดังนั้นให้ $a_2 - a_4 = u_o - w_o = \sqrt{v_o^2 + d_2/2 - d_3/4v_o}$

จาก $(a_2 + a_4)^2 = (-v_o^2 - d_2/2) - d_3/4v_o$

และ $(a_2 - a_4)^2 = (v_o + d_2/2) - d_3/4v_o$

จะได้ว่า $a_2 = u_o = 1/2(\sqrt{v_o^2 + d_2/2 - d_3/4v_o} + \sqrt{-v_o^2 - d_2/2 - d_3/4v_o})$

$a_4 = w_o = 1/2(\sqrt{-v_o^2 - d_2/2 - d_3/4v_o} - \sqrt{v_o^2 + d_2/2 - d_3/4v_o})$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright © by Chiang Mai University
All rights reserved

จะได้คำตอบของสมการ $g(y)$ คือ

$y_s = i^{s-1}u_0 + i^{2(s-1)}v_0 + i^{3(s-1)}w_0$; $s = 1,2,3,4$

ในกรณีที่ $d_2 = d_3 = d_4 = 0$ จะทำให้ $a_2 = a_3 = a_4 = 0$

ซึ่งจะได้ว่า $u_0 = v_0 = w_0 = 0$

ให้ P เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชันขนาด 4x4

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} , \; i = -1$$

ให้ p เป็นเมตริกซ์เพอมิวเตชันขนาด 4x4

ดังนั้นจะได้ $[0, u_0, v_0, w_0]M_4PM_4^{-1}$ จะเป็นเมตริกซ์ขนาด 1x4 ได้

24 เมตริกซ์

$[0,u_0,v_0,w_0],[0,u_0i,v_0i^2,w_0i^3],[0,u_0i^2,v_0,w_0i^2],[0,u_0i^3,v_0i^2,w_0i]$

$[0,v_0,u_0,w_0],[0,v_0i,u_0i^2,w_0i^3],[0,v_0i^2,u_0,w_0i^2],[0,v_0i^3,u_0i^2,w_0i]$

$[0,v_0,w_0,u_0],[0,v_0i,w_0i^2,u_0i^3],[0,v_0i^2,w_0,u_0i^2],[0,v_0i^3,w_0i^2,u_0i]$

$[0,w_0,v_0,u_0],[0,w_0i,v_0i^2,u_0i^3],[0,w_0i^2,v_0,u_0i^2],[0,w_0i^3,v_0i^2,u_0i]$

$[0,w_0,u_0,v_0],[0,w_0i,u_0i^2,v_0i^3],[0,w_0i^2,u_0,v_0i^2],[0,w_0i^3,u_0i^2,v_0i]$

$[0,u_0,w_0,v_0],[0,u_0i,w_0i^2,v_0i^3],[0,u_0i^2,w_0,v_0i^2],[0,u_0i^3,w_0i^2,v_0i]$

สมาชิกในแต่ละเมตริกซ์ดังกล่าว จะเป็นแถวแรกของเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ขนาด 4x4

ซึ่งทั้ง 24 เมตริกซ์ จะมีค่าไอเก็นเป็นคำตอบของสมการ

$$g(y) = y^4 + d_2y^2 + d_3y + d_4 = 0$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

<u>ตัวอย่าง 4.2.4</u> จงหาคำตอบของ $x^4+6x^2+8x+21 = 0$

<u>วิธีทำ</u> จะได้ว่า $d_2 = 6,\ d_3 = 8,\ d_4 = 21$

จะมี $4v_o^2 \neq 0$ เป็นคำตอบของสมการ

$$y^3 + 2d_2y^2 + (d_2^2 - 4d_4)y - d_3^2 = 0$$

นั่นคือ $y^3 + 12y^2 + (36-84)y - 64 = 0$

$$y^3 + 12y^2 - 48y - 64 = 0$$

$$(y^3-64) + 12y(y-4) = 0$$

$$(y-4)(y^2+16y+16) = 0$$

จะได้ $y = 4$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ (1)

นั่นคือ $4v_o = 4$

จะได้ว่า $v_o = 1$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ

$$(4a_3^2)^3 + 2d_2(4a_3^2)^2 + (d_2^2 - 4d_4)(4a_3^2) - d_3^2 = 0$$

เพราะว่าสมการ

$$a_2a_4 = -v_o^2/2 - d_2/4 = -1/2 - 6/4 = -2 \text{ ---------(2)}$$

และ $a_2^2 + a_4^2 = -d_3/4v_o = -8/4 = -2$ --------------------(3)

จะหา u_o, w_o ที่สอดคล้องกับสมการ (2),(3) ได้ดังนี้

$$u_o = 1/2(\sqrt{v_o^2 + d_2/2 - d_3/4v_o} + \sqrt{-v_o^2 - d_2/2 - d_3/4v_o})$$

$$= 1/2(\sqrt{1+3-2} + \sqrt{-1-3-2})$$

$$= 1/2(\sqrt{2} + i\sqrt{6})$$

และ $w_o = 1/2(\sqrt{-v_o^2 - d_2/2 - d_3/4v_o} - \sqrt{v_o^2 + d_2/2 - d_3/4v_o})$

$$= 1/2(\sqrt{-1-3-2} - \sqrt{1+3-2})$$

$$= 1/2(i\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

ดังนั้นคำตอบของ $g(y)$ คือ

$$u_o i^{s-1} + v_o i^{2(s-1)} + w_o i^{3(s-1)}, \quad s = 1,2,3,4$$

โดยที่ $u_o = 1/2(\sqrt{2} + i\sqrt{6})$, $v_o = 1$, $w_o = 1/2(-\sqrt{2} + i\sqrt{6})$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved