ชม

บทที่ 5

บทสรุป

จากการศึกษาเกี่ยวกับคุณสมบัติของเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ และโอเมกา-เซอร์คูลันต์เมตริกซ์เพื่อเป็นการประยุกต์ไปใช้ในการหาคำตอบของสมการพีชคณิต สำหรับในบทนี้เป็นการเปรียบเทียบ วิธีการหาคำตอบของสมการพีชคณิตโดยทั่วไปกับการหาคำตอบโดยใช้เมตริกซ์

5.1 <u>การหาคำตอบของสมการควอดราติก</u>

สมการควอดราติก $f(x) = ax^2 + bx + c = o$, สำหรับ $a = 1$

จะได้ว่า $f(x) = x^2 + bx + c = o$

สามารถหาได้โดยใช้สูตร $x = (-b \pm b^2 - 4c)/2$

ส่วนการหาค่าคำตอบของสมการควอดราติกที่อยู่ในรูป $f(x) = x^2 + bx + c = o$

โดยใช้เซอร์คูลันต์เมตริกซ์ทำได้ดังนี้

1. กำหนดเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix}$

2. สร้างสมการคาแรกเตอริสติกโพลิโนเมียล ก็คือ $\det(\chi I_n - A) = 0$

3. ใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ของสมการคาแรกเตอริสติกโพลิโนเมียลกับสมการควอดราติกที่กำหนด

4. จะได้เมตริกซ์ A ในรูป $A = \begin{bmatrix} -b/2 & \sqrt{(b/2)^2 - c} \\ \sqrt{(b/2)^2 - c} & -b/2 \end{bmatrix}$

5. คำตอบของสมการจะอยู่ในรูป $a_1 + a_2$ และ $a_1 - a_2$

5.2 การหาคำตอบของสมการคิวบิค

สมการคิวบิคอยู่ในรูป $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$

จัดสมการเป็นสมการคิวบิคลดรูป ก็คือ $y^3 + py + q = 0$

โดยการ แทนค่า $x = y - b/3$ และ $p = c - b^2/3$,

$q = d - bc/3 + 2b^3/27$

หาค่าคำตอบของสมการลดรูป จะได้

$x_1 = y_1 - b/3$, $x_2 = y_2 - b/3$, $x_3 = y_3 - b/3$

เป็นคำตอบของสมการ $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$

ในการหาค่า y ของสมการ $y^3 + py + q = 0$ โดยใช้สูตรของการ์ดาน

โดยกำหนดให้ $y = z - p/3z$

แทนค่าในสมการ $y^3 + py + q = 0$ จะได้ว่า

$$z^3 - p^3/27z^3 + q = 0$$

$$(z^3)^2 - p^3/27 + qz^3 = 0$$

จากการหาคำตอบของสมการกำลังสองจะได้จาก

$$z^3 = (-q \pm \sqrt{q^2 + 4p^3/27})/2$$

$$= -q/2 \pm (q/2)^2 + (P/3)^3$$

$$z_1 = \sqrt[3]{-q/2 + (q/2)^2 + (p/3)^3}$$

และ $z_2 = \sqrt[3]{-q/2 - (q/2)^2 + (p/3)^3}$

ดังนั้น $y = z_1 + z_2$, $w_3 z_1 + w_3^2 z_2$, $w_3^2 z_1 + w_3 z_2$

การหาค่าคำตอบของสมการคิวบิคโดยใช้เซอร์คูลันเมตริกซ์ มีวิธีการดังต่อไปนี้

1. กำหนดเซอร์คูลันเมตริกซ์ $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{bmatrix}$

2. สร้างสมการคาแรกเตอริสติกโพลิโนเมียล

$$f(x) = \det(xI_3 - A) = 0$$

3. เทียบสัมประสิทธิ์กับสมการ $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$

4. เปลี่ยนรูป $f(x)$ เป็น $g(y)$ โดยให้ $y = x - a_1$ จะได้สมการ

$y^3 + d_2 y + d_3 = 0$ ซึ่ง $d_2 = -3a_2a_3$, $d_3 = -(a_2^3 + a_3^3)$

5. เปลี่ยน $d_2 - 3a_2a_3$, $d_3 = -(a_2^3 + a_3^3)$ เพื่อสร้างสมการได้เป็น

$T^2 + d_3T - (d_2/3)^3 = 0$ โดยที่ $T = a_2^3$

6. ได้ค่าของ T สมมุติว่าค่าหนึ่งเป็น t_o ดังนั้น $t_o = a_2^3$ และได้ค่า y_o เป็นค่าหนึ่งของ $t_o = a_2^3$ (a_2 มีค่า 3 ค่า) จะได้ a_3 มี 3 ค่า เพราะว่า $a_3 = -d_2/3a_2$

7. จากข้อ 6 จะได้ $a_3 = -d_2/3y_o$ และให้ $z_o = -d_2/3y_o$

8. ให้ P เป็นเมตริกซ์เพอมิวเทชันขนาด 3x3 จะมีเมตริกซ์ทั้งหมดเท่ากับ 3!

ดังนั้นจะได้ $[o, y_o, z_o]M_3PM_3^{-1}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด 1x3

6 เมตริกซ์ ดังต่อไปนี้

$[o, y_o, z_o]$, $[o, y_ow_3, z_ow_3^2]$, $[o, y_ow_3^2, z_ow_3]$

$[o, y_o, y_o]$, $[o, z_ow_3, y_ow_3^2]$, $[o, z_ow_3^2, y_ow_3]$

9. จากข้อ 8 จะได้ว่า สมาชิกในแต่ละเมตริกซ์ จะเป็นแถวแรกของเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ขนาด 3x3 ซึ่งเมตริกซ์ทั้ง 6 เมตริกซ์ จะมีค่าไอเก็นเป็นคำตอบของสมการ $g(y) = y^3 + d_2y + d_3 = 0$ จากสูตรของการ์ดาน จะได้คำตอบของสมการ $g(y)$ คือ $y_ow_3^{s-1} + z_ow_3^{2(s-1)}$, $s = 1,2,3$

5.3 การหาคำตอบของสมการไบควอดราติก

กำหนดสมการ $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

เปลี่ยนรูปสมการ $x^4 + bx^3 = -cx^2 - dx - e$

ทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ $(x^2 + 1/2\ bx)^2 = (1/4\ b^2 - c)x^2 - dx - e$

นำ $(x^2 + 1/2\ bx)y + 1/4\ y^2$ บวกทั้งสองข้าง

$$(x^2 + 1/2\ bx + 1/2\ y)^2 = (1/4\ b^2 - c + y)x^2 + (1/2\ by - d)x + 1/4\ y^2 - e$$

จัด $(1/4\ b^2 - c + y)x^2 + (1/2\ by - d)x + 1/4\ y^2 - e$ ให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ ในรูป $(mx + n)^2$ จะต้องให้ $\{1/2\ (by - d)^2 - 4(1/4\ y^2 - e) = 0$ ดังนั้นจัดรูปใหม่เป็น

$$y^3 - cy^2 + (bd - 4e)y - b^2e + 4ce - d^2 = 0$$

ค่า y ก็คือ คำตอบของสมการ จะได้

$$x^2 + 1/2\ bx + 1/2\ y = mx + n$$

หรือ $x^2 + 1/2\ bx + 1/2\ y = -mx - n$

จากนั้นนำไปทำการหาคำตอบโดยใช้สูตรของสมการควอดราติก จะได้คำตอบ 4 ค่า จะเป็นคำตอบของสมการ $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

วิธีการหา คำตอบของสมการไบควอดราติก โดยอาศัยเซอร์คูลันต์เมตริกซ์

1. กำหนดเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \end{bmatrix}$

2. สร้างสมการคาแรกเตอริสติกโพลิโนเมียล $\det(xI_n - A) = 0$

3. เปลี่ยน $f(x)$ เป็น $g(y)$ โดยให้ $y = x - a_1$ จะได้

$$g(y) = y^4 + d_2y^2 + d_3y + d_4 = 0$$

4. พิจารณาในกรณี d_2, d_3, d_4 ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จะได้คำตอบหนึ่งของสมการ $(4a_3^2)^3 + 2d_2(4a_3^2)^2 + (d_2-4d_4)(4a_3^2) - d_3^2 = 0$, โดยที่ $a_3 = v_o$ เป็นคำตอบของสมการ

5. สมมุติค่าอีก 2 ค่า เป็นคำตอบของสมการในข้อ 4

6. ได้สมการที่อยู่ในรูป a_2a_4, $(a_2+a_4)^2$, $(a_2-a_4)^2$

7. ได้ค่า $a_2 = 1/2(\sqrt{v_o^2 + d_2/2 - d_3/4v_o} + \sqrt{-v_o^2 - d_2/2 - d_3/4v_o}) = u_o$

และ $a_4 = 1/2(\sqrt{-v_o^2 - d_2/2 - d_3/4v_o} - \sqrt{v_o^2 + d_2/2 - d_3/4v_o}) = w_o$

8. ค่าจากข้อ 7 จะเป็นคำตอบของสมการ $g(y)$ คือ

$$y_s = i^{s-1}u_o + i^{2(s-1)}v_o + i^{3(s-1)}w_o, \quad s = 1,2,3,4$$

9. สร้างเมตริกซ์ซึ่งเกิดจาก $[o,u_o,v_o,w_o]M_4PM_4^{-1}$ ขนาด 1x4 ได้ 24 เมตริกซ์ ดังต่อไปนี้ $[o,u_o,v_o,w_o]$, $[o,u_oi,v_oi^2,w_oi^3]$, $[o,u_oi^2,v_o,w_oi^2]$

$[o,u_oi^3,v_oi^2,w_oi]$, $[o,v_o,u_o,w_o]$, $[o,v_oi,u_oi^2,w_oi^3]$, $[o,v_oi^2,u_o,w_oi^2]$

$[o,v_oi^3,u_oi^2,w_oi]$, $[o,v_o,w_o,u_o]$, $[o,v_oi,w_oi^2,u_oi^3]$, $[o,v_oi^2,w_o,u_oi^2]$

$[o,v_oi^3,w_oi^2,u_oi]$, $[o,w_o,v_o,u_o]$, $[o,w_oi,v_oi^2,u_oi^3]$, $[o,w_oi^2,v_o,u_oi^2]$

$[o,w_oi^3,v_oi^2,u_oi]$, $[o,w_o,u_o,v_o]$, $[o,w_oi,u_oi^2,v_oi^3]$, $[o,w_oi^2,u_o,v_oi^2]$

$[o,w_oi^3,u_oi^2,v_oi]$, $[o,u_o,w_o,v_o]$, $[o,u_oi,w_oi^2,v_oi^3]$, $[o,u_oi^2,w_o,v_oi^2]$

$[o, u_oi^3, w_oi^2, v_oi]$

สมาชิกในแต่ละเมตริกซ์จะเป็นแถวแรกของเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ขนาด 4x4 ทั้งหมด 24 เมตริกซ์ จะมีค่าไอเก็นเป็นคำตอบของสมการ

$$g(y) = y^4 + d_2y^2 + d_3y + d_4 = 0$$

จากการศึกษาคุณสมบัติของเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ เพื่อหาคำตอบของสมการพีชคณิต เมื่อกำหนดโมนิคโพลิโนเมียล $f(x) = x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \dots + c_n,\ n \geq 1$ พบว่ามีเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ A ขนาด nxn คล้ายกับเมตริกซ์ทแยง D และ $D = M_n^{-1} A M_n$ โดยที่ M_n เป็นเมตริกซ์ขนาด nxn ที่มีสมาชิกในแถวที่ r และหลักที่ s เป็น μ_{rs} ซึ่ง $\mu_{rs} = w_n^{(r-1)(s-1)}$

จะได้ว่า $f(x) = \det(xI_n - A) = \det(xI_n - D)$ โดยที่

$\det(xI_n - A) = \prod_{s=1}^{n} (x - \sum_{k=1}^{n} a_k w_n^{(k-1)(s-1)})$ และค่าไอเก็นของ A จะเป็นคำตอบของสมการ $f(x) = 0$

นอกจากนี้ได้เสนอนิยามและคุณสมบัติบางประการของโอเมกา-เซอร์คูลันต์เมตริกซ์ พบว่าโอเมกา-เซอร์คูลันต์เมตริกซ์ คล้ายกับเมตริกซ์ทแยง ซึ่งเป็นคุณสมบัติที่เหมือนกับคุณสมบัติของเซอร์คูลันต์เมตริกซ์ ผู้ที่สนใจจะศึกษาต่อไปเกี่ยวกับการหาคำตอบของสมการพีชคณิต โดยใช้โอเมกา-เซอร์คูลันต์เมตริกซ์ ควรจะต้องค้นหาเงื่อนไขและคุณสมบัติเพิ่มเติมต่อไป