บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานเฉพาะที่จำเป็น เพื่อนำไปใช้ในบทที่ 3 และบทที่ 4 โดยจะกล่าวถึงนิยาม ทฤษฎี และตัวอย่างพอสังเขปสำหรับการพิสูจน์ในบทนี้ไม่ได้แสดงไว้ แต่ผู้สนใจสามารถศึกษาได้จากหนังสือและเอกสารที่ระบุไว้ท้ายเล่ม

สัญลักษณ์ที่ใช้ในบทที่ 2, 3 และ 4 มีดังนี้

$>$	หมายถึง	มากกว่า
$<$	หมายถึง	น้อยกว่า
$\geq$	หมายถึง	มากกว่าหรือเท่ากับ
$\leq$	หมายถึง	น้อยกว่าหรือเท่ากับ
$\in$	หมายถึง	เป็นสมาชิก
$\notin$	หมายถึง	ไม่เป็นสมาชิก
$\subset$	หมายถึง	สับเซต
$\not\subset$	หมายถึง	ไม่เป็นสับเซต
$\cap$	หมายถึง	อินเตอร์เซคชัน
$\cup$	หมายถึง	ยูเนียน
ϕ	หมายถึง	เซตว่าง
$P(X)$	หมายถึง	เพาเวอร์เซตของ X
$X-A$	หมายถึง	คอมพลีเมนต์ของ A (เทียบกับ X)
πX	หมายถึง	ผลคูณของเซต
Q	หมายถึง	เซตของจำนวนตรรกยะ
Q^c	หมายถึง	เซตของจำนวนอตรรกยะ
N	หมายถึง	เซตของจำนวนธรรมชาติ

R หมายถึง เซตของจำนวนจริง

(a, b) หมายถึง ช่วงเปิดใน R นั่นคือ $(a,b) = \{x \in R \ / \ a < x < b\}$

[a, b] หมายถึง ช่วงปิดใน R นั่นคือ $[a,b] = \{x \in R \ / \ a \leq x \leq b\}$

2.1 เซตและฟังก์ชัน

นิยาม 2.1.1 ให้ X เป็นเซตใด ๆ จะเรียกเซต X ว่า เซตจำกัด ก็ต่อเมื่อ $X = \phi$ หรือ X มีสมาชิกแตกต่างกันจำนวน n ตัว เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

นิยาม 2.1.2 ให้ X เป็นเซตใด ๆ จะเรียกเซต X ว่า เซตอนันต์ ก็ต่อเมื่อ X ไม่เป็นเซตจำกัด

เซตอนันต์แบ่งออกเป็น 2 ประเภทคือ

1) เซตที่นับได้ เช่น เซตของจำนวนเต็ม , เซตของจำนวนตรรกยะ ฯลฯ

2) เซตที่นับไม่ได้ เช่น เซตของจำนวนจริง , เซตของจำนวนอตรรกยะ ฯลฯ

คุณสมบัติของเซตที่นำไปใช้มีดังนี้

กำหนดให้ X เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ A, B, C เป็นสับเซตของ X

1. $A \cap B = \phi$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset X - B$ หรือ $B \subset X - A$
2. $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $B \subset A$
3. $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $X - B \subset X - A$
4. ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$
5. $X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$
6. $X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$
7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

8. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

9. $A \cup \phi \quad = A$

10. $A \cap \phi \quad = \phi$

11. $A \cup A \quad = A$

12. $A \cap A \quad = A$

13. $X - (X - A) = A$

14. $A \cap (X - A) = \phi$

15. $A \cup (X - A) = X$

16. $X - X \quad = \phi$

17. $X - \phi \quad = X$

18. $A - B \quad = A \cap (X - B)$

19. $A - (A \cap B) = A - B$

20. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cup B = B$

21. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cap B = A$

<u>นิยาม 2.1.3</u> ให้ A และ B เป็นเซต

ผลคูณคาร์ทีเซียน (the cartesian product) ของ A กับ B เขียนแทนด้วย $A \times B$ หมายถึง $\{(a, b) / a \in A$ และ $b \in B\}$ และ

สำหรับ $(a, b), (c, d) \in A \times B$

จะได้ว่า $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

<u>นิยาม 2.1.4</u> ให้ X และ Y เป็นเซต

ความสัมพันธ์จาก X ไป Y คือ สับเซต $X \times Y$

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์แล้ว $(x, y) \in r$ เขียนแทนด้วย xry อ่านว่า x สัมพันธ์กับ y ภายใต้ r

<u>นิยาม 2.1.5</u> ให้ $X \neq \phi$ และ $Y \neq \phi$ ฟังก์ชัน (function) จาก X ไป Y คือ ความสัมพันธ์จาก X ไป Y ที่มีคุณสมบัติว่าแต่ละสมาชิก $x \in X$ มีสมาชิก $y \in Y$ เพียงตัวเดียวที่ $(x, y) \in f$ นั่นคือ ถ้า $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แล้ว $y = z$

ต่อไปใช้สัญลักษณ์ $f : X \dashrightarrow Y$ เป็นฟังก์ชันจาก X ไป Y และถ้า $(x,y) \in f$ จะเขียนแทน $y = f(x)$

<u>นิยาม 2.1.6</u> ถ้า $f : X \dashrightarrow Y$ เป็นฟังก์ชันแล้ว

โดเมน (domain) ของ f เขียนแทนด้วย D_f หมายถึง

$D_f = \{x \in X \ / \ f(x) = y$ สำหรับบาง $y \in Y\}$

เรนจ์ (Range) ของ f เขียนแทนด้วย R_f หมายถึง

$R_f = \{y \in Y \ / \ f(x) = y$ สำหรับบาง $x \in X\}$

<u>นิยาม 2.1.7</u> ถ้า $f : X \dashrightarrow Y$ และ $A \subset X$ แล้ว

$f(A) = \{y \in Y \ / \ f(x) = y$ สำหรับบาง $x \in A\}$

<u>นิยาม 2.1.8</u> ให้ $X \neq \phi$ และ $Y \neq \phi$ และ $f : X \dashrightarrow Y$

1. เรียก f ว่าฟังก์ชันทั่วถึง (onto function) ก็ต่อเมื่อ $R_f = Y$
2. เรียก f ว่าฟังก์ชันหนึ่ง-หนึ่ง (one to one function) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x_1, x_2 \in X$ ซึ่ง $f(x_1) = f(x_2)$ จะได้ว่า $x_1 = x_2$

<u>นิยาม 2.1.9</u> ให้ $X \neq \phi$ และ $Y \neq \phi$ และ $f : X \dashrightarrow Y$

อินเวอร์สของฟังก์ชัน f (inverse of function f)

ใช้สัญลักษณ์ f^{-1} คือ ความสัมพันธ์จาก Y ไปยัง X

โดยมีเงื่อนไขว่า $(y, x) \in f^{-1}$ ก็ต่อเมื่อ $f(x) = y$

<u>นิยาม 2.1.10</u> ให้ $f : X \longrightarrow Y$ และ $B \subset Y$ แล้ว

$f^{-1}(B) = \{x \in X / f(x) \in B$

สำหรับคุณสมบัติของฟังก์ชันที่จะนำไปใช้มีดังนี้

1. ถ้า $f : X \longrightarrow Y$ และ $\{A_i\}_{i \in I}$ เป็นเซตของสับเซตของ X โดยที่ I เป็นเซตดัชนี จะได้ว่า

   1.1 $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$

   1.2 $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$

   1.3 ถ้า f เป็นฟังก์ชัน หนึ่ง-หนึ่ง แล้ว

   $f(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$

2. ถ้า $f : X \longrightarrow Y$ และ $\{B_i\}_{i \in I}$ เป็นเซตของสับเซตของ Y โดยที่ I เป็นเซตดัชนี จะได้ว่า

   2.1 $f^{-1}(\phi = \phi$

   2.2 $f^{-1}(Y) = X$

   2.3 $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

   2.4 $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

   2.5 $f^{-1}(B_i - B_j) = f^{-1}(B_i) - f^{-1}(B_j)$ เมื่อ $i, j \in I$

   2.6 $f^{-1}(Y - B_i) = X - f^{-1}(B_i)$ เมื่อ $i \in I$

3. ถ้า $f : X \longrightarrow Y$ และ $A, B \subset X$ และ $C, D \subset Y$ แล้วจะได้ว่า

3.1 ถ้า $A \subset B$ แล้ว $f(A) \subset f(B)$

3.2 ถ้า $C \subset D$ แล้ว $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

3.3 $f(f^{-1}(C)) \subset C$

3.4 $f^{-1}(f(A)) \supset A$

3.5 ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่ง-หนึ่ง แล้ว $f^{-1}(f(A)) = A$

3.6 ถ้า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง แล้ว $f(f^{-1}(C)) = C$ และ $f(X) = Y$

3.7 $f(\phi) = \phi$

2.2 <u>ปริภูมิเมตริก</u> (Metric spaces)

<u>นิยาม 2.2.1</u> ให้ $X \neq \phi$ จะเรียกฟังก์ชัน $d : X \times X \longrightarrow R$ ว่าฟังก์ชันระยะทาง (distance function) หรือเมตริก (metric) บน X ก็ต่อเมื่อ

1. $d(x,y) \geq 0$ สำหรับทุก $x, y \in X$
2. $d(x,y) = d(y,x)$ สำหรับทุก $x, y \in X$
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ สำหรับทุก $x,y,z \in X$
4. $d(x,x) = 0$ สำหรับทุก $x \in X$
5. $d(x,y) = 0 \Longrightarrow x = y$ สำหรัลทุก $x, y, \in X$

คู่ลำดับ (X, d) เรียกว่าปริภูมิเมตริก และเรียก $d(x,y)$ ว่าระยะทางระหว่าง x กับ y

<u>ตัวอย่าง 2.2.1</u> ดิสครีตเมตริก (discrete metric)

ให้ X เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง

$d : X \times X \longrightarrow R$ กำหนดโดย

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & , x = y \\ 1 & , x \neq y \end{cases}$$

แล้ว d เป็นเมตริกบน X

ดูรายละเอียดจาก [5] หน้า 37-38

<u>นิยาม 2.2.2</u> ให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก $p \in X$ และ $\epsilon > 0$ สัญลักษณ์ $B(p, \epsilon)$ เรียกว่า บอลล์เปิด (open ball) ที่มีจุดศูนย์กลางที่ p รัศมี ϵ กำหนดโดย $B(p, \epsilon) = \{x \in X / d(x,p) < \epsilon\}$ บอลล์ปิด (close ball) แทนด้วย $\bar{B}(p, \epsilon)$ กำหนดโดย

$\bar{B}(p, \epsilon) = \{x \in X / d(x,p) \leq \epsilon\}$

<u>นิยาม 2.2.3</u> ให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $A \subset X$

A จะเป็นเซตเปิดใน X ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x \in A$

จะมี $\epsilon > 0$ ที่ $B(x, \epsilon) \subset A$

<u>ทฤษฎี 2.2.1</u> ทุกบอลล์เปิดเป็นเซตเปิด

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [5] หน้า 50

2.3 <u>ปริภูมิโทโพโลยีและปริภูมิย่อย</u> (Topological spaces and subspace)

<u>นิยาม 2.3.1</u> ให้ X เป็นเซตซึ่งไม่ใช่เซตว่าง และ τ เป็นเซตของสับเซตของ X จะเรียก τ ว่าเป็นโทโพโลยีสำหรับ X ก็ต่อเมื่อ τ มีคุณสมบัติ

1. $\phi , X \in \tau$
2. $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i \in \tau$ สำหรับแต่ละ $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\} \subset \tau$
3. $\bigcup\limits_{i \in I} G_i \in \tau$ สำหรับแต่ละ $\{G_i \mid i \in I\} \subset \tau$ เมื่อ I เป็นเซตดัชนีใด ๆ

เรียกสมาชิกใน τ ว่าเซตเปิดใน X และเรียกคู่ลำดับ (X, τ) ว่าปริภูมิเชิงโทโพโลยี (topological space)

<u>ข้อสังเกต</u> จากนิยาม 2.3.1 จะได้ว่า $P(X)$ เป็นโทโพโลยี สำหรับ X เรียกว่าดิสครีตโทโพโลยี (discrete topology) และถ้า $\tau = \{\phi, X\}$ จะได้ว่า τ เป็นโทโพโลยี สำหรับ X เรียกว่าทริเวียลโทโพโลยี (trivial topology)

<u>ตัวอย่าง 2.3.1</u> 1. ให้ X เป็นเซตอนันต์ และ $\tau = \{\phi\} \cup \{A \subset X \mid X - A$ เป็นเซตจำกัด$\}$ ดังนั้น τ เป็นโทโพโลยีสำหรับ X

ดูรายละเอียดจาก [2] หน้า 58-59

2. ให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก และ τ_d เป็นเซตของเซตเปิดทั้งหมดใน X แล้ว (X, τ_d) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

ดูรายละเอียดจาก [5] หน้า 128–129

τ_d ที่กำหนดตามตัวอย่าง 2.3.1(2) นี้ เรียกว่าโทโพโลยีกำเนิด โดย d (topology generated by d) และ (X, τ_d) เรียกว่าปริภูมิเชิงโทโพโลยีกำเนิดโดย d (topological space generated by d)

แต่ถ้า (R^n, d) เป็นปริภูมิยูคลิเดียน แล้ว τ_d เรียกว่ายูชวลโทโพโลยี (usual topology) บน R^n และ (R^n, τ_d) เรียกว่า ปริภูมิยูชวล (usual topological space)

3. ให้ X เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง $p \in X$ และให้

$\tau = \{\phi\} \cup \{A \subset X / p \in A\}$

ดังนั้น τ เป็นโทโพโลยีบน X

ดูรายละเอียดจาก [5] หน้า 131

4. ให้ X เป็นเซตใด ๆ และให้

$\tau = \{\phi\} \cup \{A \subset X / X - A$ เป็นเซตที่นับได้$\}$

แล้ว τ เป็นโทโพโลยีบน X

ดูรายละเอียดจาก [5] หน้า 133

<u>นิยาม 2.3.2</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $F \subset X$ เรียก F ว่าเซตปิดใน X ก็ต่อเมื่อ $X - F$ เป็นเซตเปิดใน X

<u>นิยาม 2.3.3</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี เรียกสับเซต W ของ X ว่าเป็นเนเบอร์ฮูด (neighborhood) ของ $x \in X$ ก็ต่อเมื่อ มี G เป็นเซตเปิดใน X ซึ่ง $x \in G \subset W$

<u>ทฤษฎี 2.3.1</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ $G \subset X$
G จะเป็นเซตเปิด ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $x \in G$ มี $U \in \tau$
ซึ่ง $x \in U \subset G$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [9] หน้า 32

<u>ทฤษฎี 2.3.2</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $Y \subset X$
จะได้ว่า $\tau_Y = \{U \mid U = G \cap Y$ บางเซตเปิด G ใน $X\}$
เป็นโทโพโลยีสำหรับ Y นั่นคือ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียด [8] หน้า 83

<u>นิยาม 2.3.4</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $Y \subset X$ เรียก
(Y, τ_Y) ว่าเป็นปริภูมิย่อย (subspace) ของ (X, τ)

<u>ทฤษฎี 2.3.3</u> ให้ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิย่อยของ (X, τ_X) และ $A \subset Y$
จะได้ว่า A เป็นเซตปิดใน Y ก็ต่อเมื่อ $A = Y \cap F$ บางเซตปิด F ใน X

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [7] หน้า 77

<u>ทฤษฎี 2.3.4</u> ให้ $\{\tau_i \mid i \in I\}$ เป็นกลุ่มของโทโพโลยีสำหรับ X
ดังนั้น $\bigcap_{i \in I} \tau_i$ เป็นโทโพโลยีสำหรับ X

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียด [3]

<u>นิยาม 2.3.5</u> ให้ E เป็นสับเซตของ $P(X)$ และ

$H = \{\tau / \tau$ เป็นโทโพโลยีสำหรับ X ซึ่งมี E เป็นสับเซต$\}$

จะได้ว่า $\tau_E = \bigcap_{\tau \in H} \tau$ เป็นโทโพโลยี สำหรับ X

เรียก τ_E ว่าเป็นโทโพโลยีที่กำหนดโดย E และเรียก E ว่าเป็นสับเบส (subbase) สำหรับ τ_E

<u>นิยาม 2.3.6</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $B \subset \tau$

เรียก B ว่าเบส (base) สำหรับ τ ก็ต่อเมื่อ ทุกสมาชิกใน τ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $\bigcup_{i \in I} A_i$ โดยที่ $A_i \in B$ สำหรับบางเซตดัชนี I

<u>ตัวอย่าง 2.3.2</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี โดยที่ τ เป็นดิสครีตโทโพโลยี ดังนั้น $B = \{\{x\} / x \in X\}$ เป็นเบสสำหรับ τ บน X

<u>ทฤษฎี 2.3.5</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $B \subset \tau$ จะได้ว่า B เป็นเบสของ τ บน X ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $A \in \tau$ และ $x \in A$ จะมี $C \in B$ โดยที่ $x \in C \subset A$

<u>ทฤษฎี 2.3.6</u> ให้ X เป็นเซต ถ้า B เป็นเซตของสับเซตของ X ที่มีคุณสมบัติว่า

1. ทุก ๆ $x \in X$ จะมี $A \in B$ ที่ $x \in A$ และ
2. ถ้า $A_1, A_2 \in B$ และ $x \in A_1 \cap A_2$ แล้ว $x \in A_3 \subset A_1 \cap A_2$ สำหรับบาง $A_3 \in B$

จะได้ว่า $\tau = \{G \subset X \mid G$ สามารถเขียนในรูปยูเนียนของสมาชิกใน $B\}$ เป็นโทโพโลยีบน X เพียงโทโพโลยีเดียวเท่านั้นที่มี B เป็นเบส

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดใน [3]

<u>นิยาม 2.3.7</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $A \subset X$ โคลส์เชอร์ (closure) ของ A แทนด้วย $\bar{A}$ กำหนดดังนี้

$\bar{A} = \{x \in X \ / \ U \cap A \neq \phi$ สำหรับแต่ละ U เป็นเซตเปิดใน X ที่ $x \in U\}$

<u>ทฤษฎี 2.3.7</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $A, B \subset X$ จะได้ว่า

1. $A \subset \bar{A}$
2. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $\bar{A} \subset \bar{B}$
3. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$
4. A เป็นเซตปิด ก็ต่อเมื่อ $A = \bar{A}$
5. $\bar{A} = \cap \{F/F$ เป็นเซตปิดใน X ที่ $A \subset F\}$
6. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
7. $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [2] หน้า 66

<u>นิยาม 2.3.7</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $A \subset X$ จุด $p \in A$ จะเรียกว่า เป็นจุดอินทีเรีย (interior point) ของ A ก็ต่อเมื่อ มีเนเบอร์ฮูด V ของ p ที่ $V \subset A$ อินทีเรีย (interior) ของ A แทนด้วย intA

<u>ทฤษฎี 2.3.8</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $A, B \subset X$ จะได้ว่า

1. A เป็นเซตเปิด ก็ต่อเมื่อ $\text{int } A = A$
2. $\text{int } A = \cup \{G/G$ เป็นเซตเปิดใน X ที่ $G \subset A\}$

3. $\text{int}(\text{int } A) = \text{int } A$

4. $\text{int } A \cup \text{int } B \subset \text{int}(A \cup B)$

5. $\text{int } A \cap \text{int } B = \text{int}(A \cap B)$

6. $\text{int } \phi = \phi$, $\text{int } X = X$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [5] หน้า 153–154

<u>ทฤษฎี 2.3.9</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $A \subset X$ จะได้ว่า

1. $X - \text{int } A = \overline{X - A}$

2. $\text{int}(X - A) = X - \overline{A}$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [2] หน้า 72

<u>นิยาม 2.3.9</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $D \subset X$ จะได้ว่า D เดนส์ (dense) ใน X ก็ต่อเมื่อ $\overline{D} = X$

<u>ตัวอย่าง 2.3.3</u> ให้ τ เป็นยูชวลโทโพโลยีบน R จะได้ว่า Q และ $R-Q$ ต่างเดนส์ใน R

<u>ทฤษฎี 2.3.10</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $D \subset X$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลย์กัน

1. D เดนส์ใน X

2. สำหรับแต่ละ F เป็นเซตปิดใน X โดยที่ $D \subset F$ ทำให้ $F = X$

3. สำหรับแต่ละ G เป็นเซตเปิดใน X ที่ $G \neq \phi$ ดังนั้น
$G \cap D \neq \phi$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [7] หน้า 72

<u>นิยาม 2.3.10</u> จะเรียกคุณสมบัติ P บนปริภูมิเชิงโทโพโลยี (X, τ) ว่าเป็นเฮริดิทารี (hereditary) ก็ต่อเมื่อ ถ้า (X, τ) มีคุณสมบัติ P แล้วทุกปริภูมิย่อยของ (X, τ) มีคุณสมบัติ P

<u>ตัวอย่าง 2.3.4</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี โดยที่ τ เป็นดิสครีตโทโพโลยี และ (A, τ_A) เป็นปริภูมิย่อยของ (X, τ) จะแสดงว่า τ_A เป็นดิสครีตโทโพโลยี สำหรับ A

$\tau_A = \{B \ / \ B = G \cap A$ บางเซตเปิด G ใน $X\}$

ให้ $x \in A$

เนื่องจาก τ เป็นดิสครีตโทโพโลยี

ดังนั้น $\{x\}$ เป็นเซตเปิดใน X

จาก $x \in A$ ได้ $\{x\} \subset A$

นั่นคือ $\{x\} = \{x\} \cap A$ ดังนั้น $\{x\}$ เป็นเซตเปิดใน A

ทำให้ τ_A เป็นดิสครีตโทโพโลยี

<u>นิยาม 2.3.11</u> ให้ $\{X_i \ / \ i \in I\}$ เป็นกลุ่มของเซต เซตผลคูณของกลุ่มนี้แทนด้วย $\prod_{i \in I} X_i$ กำหนดดังนี้

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f \ / \ f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \text{ โดยที่ } f(i) \in X_i \text{ สำหรับแต่ละ } i \in I\}$$

โดยปกติเขียนแสดงฟังก์ชัน f ด้วย $(f(i), i \in I)$ และเรียก $f(i)$ ว่าส่วนประกอบที่ i (the i^{th} component) ของ f

<u>ทฤษฎี 2.3.11</u> ให้ X_i เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $A_i \subset X_i$ ทุก ๆ $i \in I$ จะได้ว่า

1. ถ้า X_i เป็นเซตปิดใน X_i ทุก ๆ i แล้ว $\prod_{i \in I} A_i$ เป็นเซตปิดใน $\prod_{i \in I} X_i$

2. $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$

3. $\prod_{i \in I} A_i \cap \prod_{i \in I} B_i = \prod_{i \in I} (A_i \cap B_i)$

   สำหรับแต่ละ $A_i, B_i \subset X_i$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [4] หน้า 3 และหน้า 9

2.4 <u>ฟังก์ชันต่อเนื่อง</u> (Continuous function)

<u>นิยาม 2.4.1</u> ให้ (X, τ_X) และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ จะเรียก f ต่อเนื่องที่จุด $x \in X$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละเซตเปิด V ใน Y ที่ $f(x) \in V$ มีเซตเปิด U ใน X ที่ $x \in U$ และ $f(U) \subset V$

จะเรียก f ต่อเนื่องบน X ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องทุกจุด $x \in X$

<u>ทฤษฎี 2.4.1</u> ให้ (X, τ_X) และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $f : (X, \tau_X) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$ จะได้ว่าประพจน์ต่อไปนี้สมมูลย์กัน

1. f ต่อเนื่องบน X
2. ถ้า V เป็นเซตเปิดใน Y แล้ว $f^{-1}(V)$ เป็นเซตเปิดใน X
3. ถ้า F เป็นเซตปิดใน Y แล้ว $f^{-1}(F)$ เป็นเซตปิดใน X
4. ถ้า $A \subset X$ แล้ว $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$
5. ถ้า $B \subset Y$ แล้ว $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [4] หน้า 42-43

<u>นิยาม 2.4.2</u> ให้ (X, τ_X) และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $f : (X, \tau_X) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$ เรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันเปิด (ปิด) ก็ต่อเมื่อถ้าแต่ละเซตเปิด G ใน X แล้ว $f(G)$ เป็นเซตเปิด ใน Y (ถ้าสำหรับแต่ละเซตปิด F ใน X แล้ว $f(F)$ เป็นเซตปิด ใน Y)

<u>ทฤษฎี 2.4.2</u> ให้ (X, τ_X) และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $f : (X, \tau_X) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$ จะได้ว่าประพจน์ต่อไปนี้สมมูลย์กัน

1. f เป็นฟังก์ชันเปิด
2. ถ้า $B \subset Y$ แล้ว $\text{int}\, f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\text{int}\, B)$
3. ถ้า $A \subset X$ แล้ว $f(\text{int}\, A) \subset \text{int}\, f(A)$

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียด [1] หน้า 83-84

<u>นิยาม 2.4.3</u> ให้ (X, τ_X) และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่ง-หนึ่งและทั่วถึง เรียก f ว่าฟังก์ชันโฮมิโอมอร์ฟิซึม (homeomorphism) จาก X ไป Y ถ้า f และ f^{-1} เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
ในกรณีเช่นนี้เรากล่าวว่า (X, τ_X) และ (Y, τ_Y) โฮมิโอมอร์ฟิค (homeomorphic) ซึ่งกันและกัน เขียนแทนด้วย $(X, \tau_X) \cong (Y, \tau_Y)$

<u>ตัวอย่าง 2.4.1</u> ให้ $X = (-1, 1)$ และ $f : R \longrightarrow X$ โดย

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}, \quad \forall x \in R$$

ดังนั้น R โฮมิโอมอร์ฟิกกันกับ $(-1, 1)$

<u>นิยาม 2.4.4</u> จะเรียกคุณสมบัติ P บนปริภูมิเชิงโทโพโลยี ว่าเป็นโทโพโลจิคัลอินแวเรียนท์ (topological invariant) ก็ต่อเมื่อ ถ้าปริภูมิ (X, τ) มีคุณสมบัติ P แล้ว ปริภูมิที่โฮมิโอมอร์ฟิกกับ (X, τ) มีคุณสมบัติ P ด้วย

<u>ตัวอย่าง 2.4.2</u> ถ้า $(X, \tau_X) \cong (Y, \tau_Y)$ และ (X, τ_X) เป็นดิสครีตโทโพโลยี ดังนั้น (Y, τ_Y) เป็นดิสครีตโทโพโลยี

<u>นิยาม 2.4.5</u> ให้ $\{X_i \,/\, i \in I\}$ เป็นกลุ่มของปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $j \in I$ โพรเจกชันที่ j (the j^{th} projection) คือ ฟังก์ชัน P_j ซึ่งกำหนดดังนี้

$$P_j : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_j \quad \text{โดย} \quad P_j(f(i), i \in I) = f(j)$$

<u>ข้อสังเกต 2.4.1</u> P_j ในนิยาม 2.4.5 เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง , เป็นฟังก์ชันเปิด และเป็นฟังก์ชันทั่วถึง (onto)

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [5] หน้า 233-234

<u>นิยาม 2.4.6</u> ให้ $S = \{P_i^{-1}(G_i) \,/\, G_i$ เป็นเซตเปิดใน X_i สำหรับแต่ละ $i \in I\}$ จะเรียกโทโพโลยีที่มี S เป็นสับเบสว่าโทโพโลยีผลคูณ (product topology) บน $\prod_{i \in I} X_i$ และเขียนแทนด้วย $\prod_{i \in I} \tau_i$

<u>ข้อสังเกต 2.4.2</u> ให้ (X_i, τ_i) สำหรับทุก $i \in I$ เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $(\prod_{i \in I} X_i, \prod_{i \in I} \tau_i)$ เป็นปริภูมิผลคูณ

ให้ U_i เป็นเซตเปิดใน X_i จะได้ว่า

$$P_i^{-1}(U_i) = (\prod_{i \in I-\{i\}} X_i) \times U_i$$

ดังนั้นกลุ่มของเซตทั้งหมดในรูป $\prod_{i \in I} U_i$ เมื่อ $U_i \in \tau_i$ และ

$U_i = X_i$ สำหรับ $i \in I - F$ เมื่อ F เป็นสับเซตจำกัดของ I จึงเป็นเบสของโทโพโลยีผลคูณ

2.5 <u>สัจพจน์การแยก</u> (separation axioms)

<u>นิยาม 2.5.1</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี จะเรียก (X, τ) ว่าเป็นปริภูมิ T_1 ถ้า x และ y เป็นจุดต่างกันใน X แล้ว แต่ละจุดจะมีเซตเปิดใน X ที่ไม่บรรจุอีกจุดหนึ่ง

<u>ตัวอย่าง 2.5.1</u> 1. (X, τ_d) เป็นปริภูมิ T_1 เมื่อ d คือเมตริกบน X

2. ให้ X เป็นเซตอนันต์ และ

$\tau = \{\phi\} \cup \{A \subset X \,/\, X - A$ เป็นเซตจำกัด$\}$ แล้ว

(X, τ) เป็นปริภูมิ T_1 ทั้งนี้เพราะถ้า $x, y \in X$ ที่ $x \neq y$ แล้ว เซตเปิด $X - \{y\}$ และ $X - \{x\}$ ใน X ที่บรรจุ x และ y ตามลำดับที่ $x \notin X - \{x\}$ และ $y \notin X - \{y\}$

<u>นิยาม 2.5.2</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี จะเรียก (X, τ) ว่าเป็นปริภูมิ T_2 ถ้า x และ y เป็นจุดต่างกันใน X แล้ว แต่ละจุดจะมีเซตเปิดใน X ที่บรรจุจุดนั้น และเซตเปิดดังกล่าวจะไม่ตัดกัน

<u>ตัวอย่าง 2.5.2</u> 1. (X, τ_d) เป็นปริภูมิ T_2 เมื่อ d คือ เมตริกบน X

2. ให้ $K = \{1/n \,/\, n \in N\}$ เป็นสับเซตของ R กำหนด

$B = \{(a,b) / a,b \in R$ ที่ $a < b\} \cup \{(a,b) - K /$
$a, b \in R$ ที่ $a < b\}$

ฉะนั้น B เป็นเบสของบางโทโพโลยี τ บน R และ (R, τ) เป็นปริภูมิ T_2 ทั้งนี้เพราะจุดสองจุดใด ๆ ใน R สามารถแยกจากกันได้ด้วยช่วงเปิดใน B

<u>นิยาม 2.5.3</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี จะเรียก (X, τ) ว่าเป็นปริภูมิเรกูลาร์ (regular space) ถ้า $x \in X$ และเซตปิด F ใน X ที่ $x \notin F$ แล้วจะมีเซตเปิด U และ V ใน X ที่ $x \in U$, $F \subset V$ และ $U \cap V = \phi$

<u>ตัวอย่าง 2.5.3</u> ให้ X เป็นเซตอนันต์ และ $a \in X$

$\tau = \{\phi\} \cup \{A \subset X \,/\, a \notin A$ หรือ $X - A$ เป็นเซตจำกัด$\}$

แล้ว (X, J) เป็นปริภูมิเรกูลาร์ และเป็นปริภูมิ T_2

ดูรายละเอียดจาก [5] หน้า 214

2.6 <u>การไม่ขาดตอนในปริภูมิเชิงโทโพโลยี</u> (Connectedness in topological spaces)

<u>นิยาม 2.6.1</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ G_1, G_2 เป็นเซตเปิดใน X ที่ $G_1 \neq \phi$, $G_2 \neq \phi$ เรียกเซต $\{G_1, G_2\}$ ว่าเป็นชุดแยก (separation) สำหรับ X ถ้า $G_1 \cap G_2 = \phi$ และ $X = G_1 \cup G_2$

เรียกปริภูมิเชิงโทโพโลยีใด ๆ ว่า ขาดตอน (disconnected) ถ้ามีชุดแยกสำหรับปริภูมินั้น แต่ถ้าปริภูมิเชิงโทโพโลยีใดไม่มีชุดแยกเรียกปริภูมิเชิงโทโพโลยีนั้นว่า ปริภูมิไม่ขาดตอน (connected)

เรียกสับเซต A ของปริภูมิเชิงโทโพโลยี X ว่าเป็นเซตไม่ขาดตอน (connected set) ใน X ถ้าปริภูมิย่อย A ของ X เป็นปริภูมิไม่ขาดตอน สำหรับสับเซตขาดตอนใน X สามารถนิยามได้ในทำนองเดียวกัน

ให้สังเกตว่า ถ้า (G_1, G_2) เป็นชุดแยกสำหรับ X จะได้ว่า G_1 และ G_2 เป็นเซตปิดด้วย ดังนั้นอาจกล่าวว่า X เป็นปริภูมิขาดตอน ถ้ามีชุดปกคลุม $\{H, K\}$ ของ X ที่ H และ K เป็นเซตปิดที่ไม่ใช่เซตว่างที่ $H \cap K = \phi$ และ $H \cap K = X$

<u>ตัวอย่าง 2.6.1</u> 1. สำหรับปริภูมิ R ช่วงปิด $[a, b]$ ใด ๆ ใน R เป็นเซตไม่ขาดตอน

ดูรายละเอียดจาก [4] หน้า 213-214

2. สับเซต Q ของปริภูมิ R เป็นเซตขาดตอน ทั้งนี้เพราะ Q มีชุดแยก เช่นให้ $G_1 = \{x \in Q : x < \sqrt{2}\}$ และ $G_2 = \{x \in G : x > \sqrt{2}\}$ เป็นต้น

<u>ทฤษฎี 2.6.1</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี, $A \subset X$ ดังนั้น

1. A เป็นเซตไม่ขาดตอน ก็ต่อเมื่อแต่ละชุดปกคลุม $\{H, K\}$ ของ A เมื่อ H, K เป็นเซตเปิดใน X (หรือเซตปิดใน X ตามลำดับ) ที่ $H \cap A \neq \phi$ และ $K \cap A \neq \phi$ ดังนั้น $H \cap K \cap A \neq \phi$
2. ถ้า A เป็นเซตไม่ขาดตอนใน X และ $A \subset B \subset \bar{A}$ จะได้ B เป็นเซตไม่ขาดตอน

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [4] หน้า 214 - 215

<u>นิยาม 2.6.2</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

จะเรียก (X, τ) ว่าปริภูมิขาดตอนสุดขีด (extremally disconnected) ถ้า $\bar{U}$ เป็นเซตเปิดใน X สำหรับแต่ละเซตเปิด U ใน X

<u>ทฤษฎี 2.6.2</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

ดังนั้น (X, τ) จะเป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีด ก็ต่อเมื่อ สำหรับ แต่ละเซตเปิด U และ V ใน X ที่ไม่ตัดกัน จะทำให้ $\bar{U}$ และ $\bar{V}$ ไม่ตัดกัน

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดจาก [4] หน้า 227-228