บทที่ 3

ปริภูมิธีต้า - เออริดิวซิเบิ้ล I

(Theta - irreducible space I)

ในบทนี้ จะเป็นการศึกษาจากบทความของ Dragan S. Jankovic and Paul E Long ในหัวข้อ "Theta - irreducible space" ซึ่งตีพิมพ์ในวารสาร The Journal of the Kyunapook Mathematical ปี 1986

<u>โดยแบ่งศึกษาเป็นหัวข้อต่อไปนี้</u>

3.1 นิยามของเซตเรกูลาร์-เปิด (regular - open), เซตเรกูลาร์-ปิด (regular - close) พร้อมคุณสมบัติและตัวอย่าง

3.2 นิยามของธีต้า - โคลส์เชอร์สับเซต พร้อมคุณสมบัติและตัวอย่าง

3.3 นิยามของปริภูมิเออริดิวซิเบิล (irreducible space) และปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล (irreducible space) พร้อมคุณสมบัติและตัวอย่าง

3.4 นิยามของปริภูมิขาดตอนสุดขีดแบบธีต้า (extremally theta - disconnected) พร้อมคุณสมบัติและตัวอย่าง

3.5 นิยามของฟังก์ชันต่อเนื่องแบบธีต้า (Theta - continuous function)

3.6 ฟังก์ชันต่อเนื่องแบบธีต้าไปยังปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

3.1 <u>นิยามของเซตเรกูลาร์ - เปิด , เซตเรกูลาร์-ปิด และตัวอย่าง</u>

<u>นิยาม 3.1.1</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ $A \subset X$ จะเรียก A ว่าเซตเรกูลาร์-เปิด ถ้า $\text{int}\,\overline{A} = A$

<u>นิยาม 3.1.2</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $B \subset X$ จะเรียก B ว่าเซตเรกูลาร์-ปิด ถ้า $\overline{\text{int}\,B} = B$

<u>ตัวอย่าง 3.1.1</u> (แสดงการเป็นเซตเรกูลาร์-เปิด และเซตเรกูลาร์-ปิด)

1. ให้ (R, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี ที่ τ เป็นยูชวลโทโพโลยี บน R

   ให้ $a, b \in R$ ซึ่ง $a < b$

   จะเห็นได้ชัดว่า $(a, b) \subset R$ และ (a, b) เป็นเซตเรกูลาร์-เปิด

   เพราะว่า $\text{int}\,\overline{(a,b)} = \text{int}\,[a, b] = (a, b)$

   และ $[a, b]$ เป็นเซตเรกูลาร์-ปิด

   เพราะว่า $\overline{\text{int}\,[a, b]} = \overline{(a, b)} = [a, b]$

2. ให้ X เป็นเซตอนันต์ และ $a \in X$

   (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี โดย $\tau = \{\phi\} \cup \{G \subset X \mid a \in G\}$

   เซตเรกูลาร์-เปิด และเซตเรกูลาร์-ปิด มี ϕ และ X เท่านั้น

ให้ A เป็นเซตเรกูลาร์-เปิด

จากนิยามได้ $\text{int}\,\bar{A} = A$

เนื่องจาก $\text{int}\,\bar{A}$ เป็นเซตเปิดใน X ดังนั้น A เป็นเซตเปิด

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า $A = \phi$ เห็นได้ชัดว่า $\text{int}\,\phi = \phi$

<u>กรณี 2</u> ถ้า $A = X$ เห็นได้ชัดว่า $\text{int}\,\bar{X} = X$

<u>กรณีที่ 3</u> สมมุติ $\phi \neq A \neq X$

เนื่องจาก A เป็นเซตเปิด ดังนั้น $a \in A$ แต่ $A \subset \bar{A}$ ทำให้ $a \in \bar{A}$

เนื่องจาก $\bar{A}$ เป็นเซตปิดที่ไม่ใช่เซตว่าง

ดังนั้น $\bar{A} = X$ เพราะว่า ถ้า $\bar{A} \neq X$ แสดงว่า $X - \bar{A} \neq \phi$

และ $X - \bar{A}$ เป็นเซตเปิด นั่นคือ $a \in X - \bar{A}$

ทำให้ $a \notin \bar{A}$ เกิดการขัดแย้ง เพราะฉะนั้น $\text{int}\,\bar{A} = \text{int}\,X = X \neq A$

ทำให้ A ในกรณีที่ 3 ไม่เป็นเซตเรกูลาร์-เปิด

นั่นคือ ϕ, X เท่านั้นที่เป็นเซตเรกูลาร์-เปิด

พิสูจน์ในทำนองเดียวกันได้ ϕ , X เท่านั้นเป็นเซตเรกูลาร์-ปิด

<u>ข้อสังเกต 3.1.1</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี , $A \subset X$ จะได้ว่า

1. ϕ, X เป็นเซตเรกูลาร์-เปิด และเซตเรกูลาร์-ปิด
2. ถ้า A เป็นเซตเรกูลาร์-เปิด แล้ว A เป็นเซตเปิด
3. ถ้า A เป็นเซตเรกูลาร์-ปิด แล้ว A เป็นเซตปิด
4. ถ้า A เป็นเซตเปิดแล้ว $\overline{A}$ เป็นเซตเรกูลาร์-ปิด

<u>พิสูจน์</u> 1. เนื่องจาก $\text{int}\ \overline{\phi} = \phi$ และ $\overline{\text{int}\ \phi} = \phi$

และ $\text{int}\ \overline{X} = X$, $\overline{\text{int}\ X} = X$

ดังนั้น ϕ , X เป็นทั้งเซตเรกูลาร์-เปิด และเซตเรกูลาร์-ปิด

2. ให้ A เป็นเซตเรกูลาร์-เปิด

ดังนั้น $\text{int}\ \overline{A} = A$ เนื่องจาก $\text{int}\ \overline{A}$ เป็นเซตเปิด

เพราะฉะนั้น A เป็นเซตเปิดด้วย

3. ให้ A เป็นเซตเรกูลาร์-ปิด

ดังนั้น $\overline{\text{int}\ A} = A$ เนื่องจาก $\overline{\text{int}\ A}$ เป็นเซตปิด

เพราะฉะนั้น A เป็นเซตปิดด้วย

4. ให้ A เป็นเซตเปิด จะแสดงว่า $\overline{\text{int}\ \overline{A}} = \overline{A}$

เนื่องจาก $A = \text{int}\ A \subset \text{int}\ \overline{A}$

ดังนั้น $\overline{A} \subset \overline{\text{int}\ \overline{A}}$

เนื่องจาก $\text{int}\ \overline{A} \subset \overline{A}$ และ $\overline{A}$ เป็นเซตปิด

ดังนั้น $\overline{\text{int}\ \overline{A}} \subset \overline{A}$ เพราะฉะนั้น $\overline{\text{int}\ \overline{A}} = \overline{A}$

นั่นคือ ถ้า A เป็นเซตเปิด แล้ว $\overline{A}$ เป็นเซตเรกูลาร์-ปิด

<u>ตัวอย่าง 3.1.2</u> (มีเซตเปิด (ปิด) ที่ไม่เป็นเซตเรกูลาร์-เปิด (เรกูลาร์-ปิด))

1. โดยตัวอย่าง 3.1.1 (2)

สำหรับแต่ละเซตเปิด A ซึ่ง $\phi \neq A \neq X$

จะได้ว่า A ไม่เป็นเซตเรกูลาร์-เปิด และสำหรับแต่ละเซตปิด B ซึ่ง $\phi \neq B \neq X$ จะได้ว่า B ไม่เป็นเซตเรกูลาร์-ปิด

2) ให้ $X = \{a, b, c\}$ และ $\tau = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$ เป็นโทโพโลยีบน X มี $\{a, b\}$ เป็นเซตเปิด แต่ไม่เป็นเซตเรกูลาร์-เปิด

เพราะว่า $\text{int}\,\overline{\{a,b\}} = \text{int}\, X = X \neq \{a, b\}$

และมี $\{c\}$ เป็นเซตปิด แต่ไม่เป็นเซตเรกูลาร์-ปิด

เพราะว่า $\overline{\text{int}\,\{c\}} = \overline{\phi} = \phi \neq \{c\}$

3) โดยตัวอย่าง 3.1.1 (1)

มี $(1, 2) \cup (2,3)$ เป็นเซตเปิด แต่ไม่เป็นเซตเรกูลาร์-เปิด

เพราะว่า $\text{int}\,\overline{(1,2) \cup (2,3)} = \text{int}\,[1, 3] = (1,3)$

$\neq (1,2) \cup (2,3)$

และมี $\{2\}$ เป็นเซตปิด แต่ไม่เป็นเซตเรกูลาร์-ปิด

เพราะว่า $\overline{\text{int}\,\{2\}} = \overline{\phi} = \phi \neq \{2\}$

<u>ตัวอย่าง 3.1.3</u> (มี $A \subset X$ ที่ $\bar{A}$ เป็นเซตเรกูลาร์-ปิด แต่ A ไม่เป็นเซตเปิด)

ให้ τ เป็นยูชวลโทโพโลยีบน R

ให้ $A = [1, 2)$ ซึ่ง $\bar{A} = \overline{[1, 2)} = [1, 2]$

จะเห็นว่า $\overline{[1, 2)}$ เป็นเซตเรกูลาร์-ปิด

แต่ $[1, 2)$ ไม่เป็นเซตเปิด

3.2 <u>นิยามของธีต้า-โคลส์เชอร์สับเซต</u> (Theta-closure subset)

<u>นิยาม 3.2.1</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $A \subset X$ ธีต้า-โคลส์เชอร์ของสับเซต A แทนด้วย $Cl_\theta A$ ซึ่งกำหนดดังนี้

$Cl_\theta A = \{a \in X \,/\, \bar{U} \cap A \neq \phi$ สำหรับแต่ละเซตเปิด U ที่บรรจุ $a\}$

ถ้า $B \subset A$, ธีต้า-โคลส์เชอร์ของ B ใน A แทนด้วย $\hat{Cl}_\theta B$

<u>ตัวอย่าง 3.2.1</u> (แสดงการหา ธีต้า-โคลส์เชอร์ของสับเซต)

ให้ $X = \{a, b, c, d\}$ และ

$\tau = \{\phi, \{a\}, \{b,c\}, \{a,d\}, \{a,b,c\}, X\}$ เป็นโทโพโลยี บน X จะได้ว่า

1. $Cl_\theta \{a\} = \{a, d\}$
2. $Cl_\theta \{b\} = \{b, c\}$
3. $Cl_\theta \{c, d\} = X$

<u>ข้อสังเกต 3.2.1</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $A, B \subset X$

1. $\bar{A} \subset Cl_\theta A$
2. $Cl_\theta A$ เป็นเซตปิด
3. $Cl_\theta \phi = \phi$ และ $Cl_\theta X = X$
4. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $Cl_\theta A \subset Cl_\theta B$

<u>พิสูจน์</u> 1. ให้ $x \in \bar{A}$ และ U เป็นเซตเปิดที่บรรจุ x

ดังนั้น $U \cap A \neq \phi$ แต่ $U \subset \bar{U}$

ทำให้ $\bar{U} \cap A \neq \phi$ ดังนั้น $x \in Cl_\theta A$

เพราะฉะนั้น $\bar{A} \subset Cl_\theta A$

2. ให้ $x \in X - Cl_\theta A$ ดังนั้น $x \notin Cl_\theta A$

แสดงว่ามีเซตเปิด U ที่บรรจุ x และ $\bar{U} \cap A = \phi$

ให้ $y \in U$ เนื่องจาก $\bar{U} \cap A = \phi$

ดังนั้น $y \notin Cl_\theta A$ แสดงว่า $y \in X - Cl_\theta A$

เพราะฉะนั้น $U \subset X - Cl_\theta A$

นั่นคือ $X - Cl_\theta A$ เป็นเซตเปิด ทำให้ $Cl_\theta A$ เป็นเซตปิด

3. สมมติว่า $Cl_\theta\ \phi \neq \phi$ แสดงว่า มี $x \in Cl_\theta\ \phi$

ให้ U เป็นเซตเปิดที่บรรจุ x ดังนั้น $\bar{U} \cap \phi \neq \phi$ ทำให้เกิดการขัดแย้ง

ดังนั้น $Cl_\theta\ \phi = \phi$ จากข้อ 1 $\bar{X} = X \subset Cl_\theta\ X$

แต่จากนิยามของธีต้า-โคลเชอร์สับเซตได้ $Cl_\theta\ X \subset X$

นั่นคือ $Cl_\theta\ X = X$

4. ให้ $x \in Cl_\theta\ A$

ให้ U เป็นเซตเปิดที่บรรจุ x ดังนั้น $\bar{U} \cap A \neq \phi$

แต่ $A \subset B$ ดังนั้น $\bar{U} \cap B \neq \phi$ ทำให้ $x \in Cl_\theta\ B$

นั่นคือ $Cl_\theta\ A \subset Cl_\theta\ B$

3.3 <u>นิยามของปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล, นิยามของปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล และตัวอย่าง</u>

<u>นิยาม 3.3.1</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี เรียก (X, τ) ว่าปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล ถ้า $A \cap B \neq \phi$ สำหรับแต่ละเซตเปิด A และเซตเปิด B ที่ไม่เป็นเซตว่าง

<u>ตัวอย่าง 3.3.1</u> (แสดงการเป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล)

1. ให้ X เป็นเซตอนันต์นับไม่ได้ และ $\tau = \{\phi\} \cup \{G \subset X\ /\ X - G$ เป็นเซตนับได้$\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

สมมติ (X, τ) ไม่เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล

ดังนั้นมีเซตเปิด A และ B ที่ $A \neq \phi \neq B$ และ $A \cap B = \phi$

เพราะฉะนั้น $A \subset X - B$ เนื่องจาก A เป็นเซตที่นับไม่ได้

และ $X - B \neq X$ จาก B เป็นเซตเปิด ดังนั้น $X - B$ เป็นเซตนับได้

จึงเกิดการขัดแย้ง

นั่นคือ สำหรับแต่ละเซตเปิด A และ B ที่ $A \neq \phi$, $B \neq \phi$ ได้ $A \cap B \neq \phi$

เพราะฉะนั้น (X, τ) เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล

2) ให้ $X = R$ และ $a \in X$

และ $\tau = \{\phi\} \cup \{G \subset X \,/\, a \in G\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

จากนิยามของ τ จะเห็นได้ชัดว่า สำหรับแต่ละเซตเปิด G_1, G_2 ที่ $G_1 \neq \phi$, $G_2 \neq \phi$ มี $a \in G_1 \cap G_2$

ดังนั้น (X, τ) เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล

3) ให้ $X = (0, \infty]$ และ $\tau = \{\phi\} \cup \{[x, \infty] \mid x \in R, x > 0\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

จากนิยามของ τ เห็นได้ชัดว่า สำหรับแต่ละเซตเปิด G_1, G_2 ที่ $G_1 \neq \phi$, $G_2 \neq \phi$ มี $\infty \in G_1 \cap G_2$

ดังนั้น (X, τ) เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล

<u>นิยาม 3.3.2</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี จะเรียก (X, τ) ว่าปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล ถ้า $A \cap B \neq \phi$ สำหรับแต่ละเซตเรกูลาร์-ปิด A และเซตเรกูลาร์ปิด B ใน X ที่ไม่เป็นเซตว่าง

<u>ตัวอย่าง 3.3.2</u> (แสดงการเป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล)

1) $X = \{a, b, c\}$ และ $\tau = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$ เป็นปริภูมิโทโพโลยีบน X

จะแสดงว่า (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

เนื่องจากเซตเรกูลาร์-ปิด เป็นเซตปิด

พิจารณาเฉพาะเซตปิดเท่านั้น ดังนั้นเซตปิดที่ไม่เป็นเซตว่างคือ $\{c\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$ และ X เนื่องจาก $\{a,c\} = \overline{\{a\}}$, $\{b,c\} = \overline{\{b\}}$, $X = \overline{X}$

และ $\{a\}$, $\{b\}$ และ X เป็นเซตเปิดใน X

ดังนั้น โดยข้อสังเกต 3.1.1 ข้อ 4 ได้ $\overline{\{a\}}$, $\overline{\{b\}}$ และ $\overline{X}$ เป็นเซตเรกูลาร์-ปิด

นั่นคือ $\{a,c\}$, $\{b,c\}$ และ X เป็นเซตเรกูลาร์-ปิด

และเนื่องจาก $\overline{\text{int}\ \{c\}} = \overline{\phi} = \phi \neq \{c\}$

ดังนั้น $\{c\}$ ไม่เป็นเซตเรกูลาร์-ปิด

เพราะฉะนั้น เซตเรกูลาร์-ปิดที่ไม่เป็นเซตว่างทั้งหมดมี $\{a,c\}$, $\{b,c\}$ และ X

ดังนั้นเห็นได้ชัดว่า สำหรับแต่ละเซตเรกูลาร์-ปิด F_1, F_2 ใน X ที่

$F_1 \neq \phi$, $F_2 \neq \phi$ ได้ $F_1 \cap F_2 \neq \phi$

นั่นคือ (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

2) ให้ X เป็นเซตอนันต์

และ $\tau = \{\phi\} \cup \{G \subset X \ / \ X - G$ เป็นเซตจำกัด$\}$

จะแสดงว่า (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

ให้ F_1, F_2 เป็นเซตเรกูลาร์-ปิดใน X ที่ $F_1 \neq \phi$, $F_2 \neq \phi$

ดังนั้น $\overline{\text{int}\ F_1} = F_1$ และ $\overline{\text{int}\ F_2} = F$

ทำให้ $\text{int}\ F_1 \neq \phi$ และ $\text{int}\ F_2 \neq \phi$

เนื่องจาก $\text{int}\ F_1$, $\text{int}\ F_2 \in \tau$

ดังนั้น $\text{int}\ F_1$ และ $\text{int}\ F_2$ ไม่เป็นเซตจำกัด

แต่ $\text{int}\ F_1 \subset F_1$ และ $\text{int}\ F_2 \subset F_2$

เนื่องจาก F_1, F_2 เป็นเซตปิดใน X เห็นได้ชัดจากนิยามของ τ ว่า เซตปิดที่ไม่เป็นเซตจำกัดมีเพียง X เท่านั้น

ดังนั้น $F_1 = X = F_2$ เพราะฉะนั้น $F_1 \cap F_2 = X \neq \phi$

นั่นคือ (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

<u>ทฤษฎี 3.3.1</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี จะได้ (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละเซตเปิด U ใน X ที่ $U \neq \phi$ ได้

$Cl_\theta\ \bar{U} = X$

<u>พิสูจน์</u> (==>) ถ้า (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล

ให้ U เป็นเซตเปิดใน X ที่ $U \neq \phi$

จากนิยามของธีต้า–โคลส์เชอร์สับเซต เห็นได้ชัดว่า $Cl_\theta \bar{U} \subset X$

ต่อไปจะแสดงว่า $X \subset Cl_\theta \bar{U}$

สมมุติมี $a \in X$ ที่ $a \notin Cl_\theta \bar{U}$ ดังนั้นมีเซตเปิด G ใน X ที่บรรจุ a

และ $\bar{G} \cap \bar{U} = \phi$ เนื่องจาก G, U เป็นเซตเปิดใน X

ดังนั้นโดยข้อสังเกต 3.1.1 ข้อ 4 ได้ $\bar{G}$, $\bar{U}$ เป็นเซตเรกูลาร์–ปิด และ

$\bar{G} \neq \phi$, $\bar{U} \neq \phi$ ดังนั้นทำให้เกิดขัดแย้งกับ (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล

นั่นคือ สำหรับแต่ละ $a \in X$ แล้ว $a \in Cl_\theta \bar{U}$

เพราะฉะนั้น $Cl_\theta \bar{U} = X$

ดังนั้นสำหรับแต่ละเซตเปิด U ใน X ที่ $U \neq \phi$ ได้ $Cl_\theta \bar{U} = X$

(<==) จะแสดงว่า (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล

ให้ F_1, F_2 เป็นเซตเรกูลาร์–ปิดใน X ที่ $F_1 \neq \phi$, $F_2 \neq \phi$

ดังนั้น $\overline{\text{int } F_1} = F_1$ และ $\overline{\text{int } F_2} = F_2$

ทำให้ $\text{int } F_1 \neq \phi$, $\text{int } F_2 \neq \phi$

เนื่องจาก $\text{int } F_1$ และ $\text{int } F_2$ เป็นเซตเปิดใน X

จากสิ่งที่กำหนดให้ได้ $Cl_\theta \overline{\text{int } F_1} = X$ และ $Cl_\theta \overline{\text{int} F_2} = X$

ดังนั้น $Cl_\theta F_1 = X$ และ $Cl_\theta F_2 = X$

จาก $\text{int } F_1 \neq \phi$ ให้ $a \in \text{int } F_1$ ดังนั้นทำให้ $a \in Cl_\theta F_2$

เพราะฉะนั้น $\overline{\text{int } F_1} \cap F_2 \neq \phi$

ดังนั้น $F_1 \cap F_2 \neq \phi$ นั่นคือ (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล

3.4 นิยามของปริภูมิขาดตอนสุดขีดแบบธีต้า (extremally theta - disconnected)

นิยาม 3.4.1 ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี จะเรียก (X, τ) ว่าปริภูมิขาดตอนสุดขีดแบบธีต้า ถ้าสำหรับแต่ละเซตเปิด U ใน X แล้ว $Cl_\theta \bar{U}$ เป็นเซตเปิดใน X ด้วย

ตัวอย่าง 3.4.1 (แสดงการเป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีดแบบธีต้า)

1) ให้ $X = \{a,b,c\}$

และ $\tau = \{\phi, \{a\}, \{b,c\}, X\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

จะแสดงว่า (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีดแบบธีต้า

ให้ U เป็นเซตเปิดใน X ดังนั้น U คือ ϕ, $\{a\}$, $\{b,c\}$, X

และเราได้ $\bar{U} = \phi$, $\{a\}$, $\{b,c\}$, X ตามลำดับ

จะเห็นว่า $\bar{U}$ เป็นเซตเปิดใน X ดังนั้นโดยข้อสังเกต 3.2.1 ข้อ 3

ได้ $Cl_\theta\, \phi = \phi$, $Cl_\theta\, X = X$ พิจารณา $Cl_\theta\, \overline{\{a\}}$

เห็นได้ชัดว่า $b, c \notin Cl_\theta\, \overline{\{a\}}$

เพราะว่ามีเซตเปิด $\{b, c\}$ ที่ $b, c \in \{b, c\}$

และ $\overline{\{b,c\}} \cap \overline{\{a\}} = \phi$ ดังนั้น $Cl_\theta\, \overline{\{a\}} = \{a\}$

ในทำนองเดียวกันได้ $Cl_\theta\, \overline{\{b,c\}} = \{b,c\}$

เพราะฉะนั้น $Cl_\theta\, \bar{U}$ เป็นเซตเปิดใน X

นั่นคือ (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีดแบบธีต้า

2) ให้ X เป็นเซตอนันต์ และ $a \in X$

และ $\tau = \{\phi\} \cup \{G \subset X \mid a \in G\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

จะแสดงว่า (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีดแบบธีต้า

ให้ U เป็นเซตเปิดใน X

<u>กรณี 1</u> ถ้า $U = \phi$ เห็นได้ชัดว่า $Cl\ \bar{U} = \phi$

<u>กรณี 2</u> ถ้า $U \neq \phi$ โดยตัวอย่าง 3.1.1 ข้อ 2 ได้ $\bar{U} = X$

แต่ $\bar{U} \subset Cl_\theta \bar{U}$ ดังนั้น $Cl_\theta \bar{U} = X$

นั่นคือ จากทั้งสองกรณี แสดงว่า (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีดแบบธีต้า

<u>ทฤษฎี 3.4.1</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี ถ้า (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า เออริดิวซิเบิ้ล แล้ว

1) (X, τ) เป็นปริภูมิไม่ขาดตอน

และ 2) (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีดแบบธีต้า

<u>พิสูจน์</u> 1) สมมติ (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอน

ดังนั้นมีเซตเปิด G_1, G_2 ที่ $G_1 \neq \phi, G_2 \neq \phi$ ซึ่ง $G_1 \cap G_2 = \phi$

และ $G_1 \cup G_2 = X$ ดังนั้น $G_1 = X - G_2$ และ $G_2 = X - G_2$

เนื่องจาก $X - G_1, X - G_2$ เป็นเซตปิด

จึงได้ $\bar{G}_1 = X - G_2 = G_1$ และ $\bar{G}_2 = X - G_1 = G_2$

โดยข้อสังเกต 3.1.1 ข้อ 4 ได้ $\bar{G}_1, \bar{G}_2$ เป็นเซตเรกูลาร์-ปิด

จาก $G_1 \cap G_2 = \phi$ และ $G_1 = \bar{G}_1, G_2 = \bar{G}_2$ และ $\bar{G}_1 \neq \phi, \bar{G}_2 \neq \phi$

ทำให้ $\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 = \phi$ เกิดขัดแย้งที่ (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

เพราะฉะนั้น (X, τ) เป็นปริภูมิไม่ขาดตอน

2) ให้ U เป็นเซตเปิดใน X

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า $U \neq \phi$

เนื่องจาก (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

โดยทฤษฎี 3.3.1 ได้ $Cl_\theta \bar{U} = X$

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า $U = \phi$ เห็นได้ชัดว่า $Cl_{\theta}\,\overline{\phi} = \phi$

ดังนั้นทั้งสองกรณีได้ $Cl_{\theta}\,\bar{U}$ เป็นเซตเปิดใน X

เพราะฉะนั้น (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีดแบบธีต้า

<u>ตัวอย่าง 3.4.2</u> (แสดงว่ามี (X, τ) เป็นปริภูมิไม่ขาดตอน แต่ไม่เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล)

ให้ (R, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี โดย τ เป็นยูชวลโทโพโลยีบน R

เห็นได้ชัดว่าไม่มีเซตเปิด $G_1(\neq \phi)$, $G_2(\neq \phi)$

ที่ $G_1 \cap G_2 = \phi$ และ $G_1 \cup G_2 = R$

นั่นคือ (R, τ) เป็นปริภูมิไม่ขาดตอน โดยตัวอย่าง 3.1.1 ข้อ 1

ได้ $[1, 2]$ และ $[3,4]$ เป็นเซตเรกูลาร์-ปิดใน R

และ $[1,2] \cap [3,4] = \phi$

ดังนั้น (R, τ) ไม่เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

<u>ตัวอย่าง 3.4.3</u> (แสดงว่ามี (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีดแบบธีต้า แต่ไม่เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล)

ให้ X เป็นเซตใด ๆ ที่มีสมาชิกมากกว่า 1 และ $\tau = P(X)$

จะแสดงว่า (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีดแบบธีต้า

ให้ U เป็นเซตเปิดใน X ดังนั้น $Cl_{\theta}\,\bar{U} \subset X$

นั่นคือ $Cl_{\theta}\,\bar{U} \in P(X)$ แสดงว่า $Cl_{\theta}\,\bar{U}$ เป็นเซตเปิดใน X

เพราะฉะนั้น (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีดแบบธีต้า

จะแสดงว่า (X, τ) ไม่เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล ให้ $a, b \in X$ ที่ $a \neq b$

จะได้ $\{a\}$ และ $\{b\}$ เป็นเซตเรกูลาร์ปิดใน X และ $\{a\} \cap \{b\} = \phi$

นั่นคือ (X, τ) ไม่เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

ทฤษฎี 3.4.2 ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล ก็ต่อเมื่อ (X, τ) เป็นปริภูมิไม่ขาดตอน และเป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีดแบบธีต้า

พิสูจน์ (===>) พิสูจน์โดยทฤษฎี 3.4.1

(<===) สมมติว่า (X, τ) ไม่เป็นปริภูมิธีต้า- เออริดิวซิเบิ้ล โดยทฤษฎี 3.3.1 มีเซตเปิด $U(\neq \phi)$ ใน X ที่ $Cl_\theta\, \bar{U} \neq X$ ดังนั้น $X - Cl_\theta\, \bar{U} \neq \phi$

โดยข้อสังเกต 3.2.1 ข้อ 2 ได้ $Cl_\theta\, \bar{U}$ เป็นเซตปิดใน X

นั่นคือ $X - Cl_\theta\, \bar{U}$ เป็นเซตเปิดใน X

เนื่องจาก (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีดแบบธีต้า และ U เป็นเซตเปิดใน X

ดังนั้น $Cl_\theta\, \bar{U}$ เป็นเซตเปิดใน X

เนื่องจาก $Cl_\theta\, \bar{U} \cap (X - Cl_\theta\, \bar{U}) = \phi$ และ $Cl_\theta\, \bar{U} \cup (X - Cl_\theta \bar{U}) = X$

จึงได้ว่า (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอน เกิดการขัดแย้งกับที่กำหนดให้

ดังนั้น (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

ทฤษฎีนำ 3.4.1 ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $B \neq \phi$ โดย $B \subset A$ และ $A \subset X$ ดังนั้น $\hat{Cl_\theta}B \subset A \cap Cl_\theta B$

พิสูจน์ นิยาม $\hat{Cl_\theta}B = \{a \in A /\ \bar{U}_A \cap B \neq \phi$ สำหรับแต่ละเซตเปิด U_A ใน A ที่บรรจุ $a\}$

จากนิยามข้างต้นได้ $\hat{Cl_\theta}\, B \subset A$ ต่อไปจะแสดงว่า $\hat{Cl_\theta}B \subset Cl_\theta B$

ให้ $a \in \hat{Cl_\theta}B$ ดังนั้น $a \in A$

ต่อไปจะแสดงว่า $a \in Cl_\theta B$ ให้เซตเปิด U ใน X ที่ $a \in U$

ดังนั้น $a \in U \cap A$ เนื่องจาก $U \cap A$ เป็นเซตเปิดใน A

จาก $a \in \hat{Cl_\theta}B$ ทำให้ได้ว่า $\overline{(U \cap A)}_A \cap B \neq \phi$

แต่ $\overline{(U \cap A)}_A = \overline{(U \cap A)} \cap A$

ดังนั้น $\phi \neq \overline{(U \cap A)} \cap A \cap B \subset (\overline{U} \cap \overline{A}) \cap B \subset \overline{U} \cap B$

นั่นคือ $\overline{U} \cap B \neq \phi$ ดังนั้น $a \in Cl_\theta B$

เพราะฉะนั้น $Cl_\theta^{\wedge} B \subset Cl_\theta B$

จาก $Cl_\theta^{\wedge} B \subset A$ และ $Cl_\theta^{\wedge} B \subset Cl_\theta B$ ทำให้ $Cl_\theta^{\wedge} B \subset A \cap Cl_\theta B$

<u>ตัวอย่าง 3.4.4</u> (แสดงให้เห็นว่า $Cl_\theta^{\wedge} B$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $A \cap Cl_\theta B$)

ให้ $X = \{a, b, c, d\}$

และ $\tau = \{\phi, \{a,d\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, X\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

เลือก $A = \{b,c\}$ และ $B = \{b\}$ จะแสดงว่า $Cl_\theta^{\wedge} B \neq A \cap Cl_\theta B$

ดังนั้น $\tau_A = \{\phi, \{b\}, \{c\}, A\}$ ซึ่งเป็นโทโพโลยีบน A

จะได้ว่า $Cl_\theta^{\wedge} B = \{b\}$ และ $Cl_\theta B = \{b,c\}$

ดังนั้น $A \cap Cl_\theta B = \{b,c\} \neq \{b\}$ นั่นคือ $Cl_\theta^{\wedge} B \neq A \cap Cl_\theta B$

<u>ทฤษฎี 3.4.3</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ D เป็นเดนส์สับเซตของ X ถ้า (D, τ_D) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล แล้ว (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

<u>พิสูจน์</u> ให้ $U(\neq\phi)$ เป็นเซตเปิดใน X

จะแสดงว่า $Cl_\theta \overline{U} = X$ นั่นคือ $U \cap D$ เป็นเซตเปิดใน D

เนื่องจาก D เดนส์สับเซตของ X ดังนั้น $U \cap D \neq \phi$

จาก (D, τ_D) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล และอาศัยทฤษฎี 3.3.1

ได้ $D = Cl_\theta^D \overline{(U \cap D)}_D = Cl_\theta^D ((\overline{U \cap D}) \cap D)$

อาศัยทฤษฎีบทนำ 3.4.1

นั่นคือ $Cl_\theta^D ((\overline{U \cap D}) \cap D) \subset D \cap Cl_\theta((\overline{U \cap D}) \cap D) \subset Cl_\theta((\overline{U \cap D}) \cap D)$

$\subset Cl_\theta \overline{(U \cap D)} \subset Cl_\theta \overline{U}$

ดังนั้น $D \subset Cl_{\theta}\bar{U}$

เนื่องจาก D เป็นเดนส์สับเซตของ X และ $Cl_{\theta}(\bar{U})$ เป็นเซตปิดใน X

ดังนั้น $X = \bar{D} \subset Cl_{\theta}\bar{U} \subset X$

นั่นคือ $Cl_{\theta}\bar{U} = X$ โดยทฤษฎีบท 3.3.1 ได้ (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้าเออริดิวซิเบิ้ล

ต่อไปเป็นการแสดงตัวอย่างของบทกลับทฤษฎี 3.4.3 ไม่จำเป็นต้องจริง กล่าวคือ ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ D เป็นเดนส์สับเซตของ X ถ้า (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล แล้วไม่จำเป็นที่ (D, τ_D) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

<u>ตัวอย่าง 3.4.5</u> ให้ $X = \{a,b,c\}$ และ $\tau = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

ให้ $D = \{a, b\}$

เนื่องจาก $\overline{\{a,b\}} = X$ เห็นได้ชัดว่า D เป็นเดนส์สับเซตของ X

จะแสดงว่า (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

โดยตัวอย่าง 3.3.2 ข้อ 1 ได้ (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

จะแสดงว่า (D, τ_D) ไม่เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

เนื่องจาก $\tau_D = \{\phi, \{a\}, \{b\}, D\}$ ซึ่งเป็นโทโพโลยีบน D

เนื่องจาก $\{a\}, \{b\}$ เป็นเซตเรกูลาร์-ปิดใน D

เพราะว่า $\overline{(int_D\{a\})}_D = \{a\}$ และ $\overline{(int_D\{b\})}_D = \{b\}$

และ $\{a\} \cap \{b\} = \phi$ ดังนั้น (D, J_D) ไม่เป็นปริภูมิธีต้าเออริดิวซิเบิ้ล

3.5 <u>นิยามของฟังก์ชันต่อเนื่องแบบธีต้า</u> (theta - continuous)

<u>นิยาม 3.5.1</u> ให้ (X, τ_X) และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ จะเรียก f ว่าต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด $a \in X$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละเซตเปิด V ใน Y ซึ่ง $f(a) \in V$ มีเซตเปิด U ใน X ซึ่ง $a \in U$ และ $f(\overline{U}) \subset \overline{V}$

และเรียก f ว่าต่อเนื่องแบบธีต้าบน X ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องแบบธีต้าที่ทุก ๆ จุดบน X

<u>ตัวอย่าง 3.5.1</u> ให้ $X = \{a,b,c,d\}$, $Y = \{w,x,y,z\}$

และ $\tau_X = \{\phi, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, X\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

$\tau_Y = \{\phi, \{w\}, \{y\}, \{w,y\}, \{w,x\}, \{w,x,y\}, Y\}$ เป็นโทโพโลยีบน Y

และกำหนดให้ $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ โดยที่

$f(a) = y$, $f(b) = x$, $f(c) = w$ และ $f(d) = z$

จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

<u>พิจารณาที่จุด a</u>

ให้ V เป็นเซตเปิดใน Y ที่ $f(a) \in V$

ดังนั้น V คือ $\{y\}$, $\{w,y\}$, $\{w,x,y\}$ หรือ Y

ได้ $\overline{V}$ คือ $\{y,z\}$ หรือ Y มีเซตเปิด $\{a\}$ ใน X

ที่ $a \in \{a\}$ และ $\overline{\{a\}} = \{a,d\}$ ซึ่ง $f(\overline{\{a\}}) = f(\{a,d\}) = \{y,z\}$

นั่นคือ $f(\overline{\{a\}}) \subset \overline{V}$ เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด a

<u>พิจารณาที่จุด b</u>

เนื่องจาก $f(b) = x$

ดังนั้น V คือ $\{w, x\}$, $\{w,x,y\}$ หรือ Y ได้ $\overline{V}$ คือ $\{w,x,z\}$ หรือ Y

มีเซตเปิด $\{b,c\}$ ใน X ที่ $b \in \{b,c\}$ และ $\overline{\{b,c\}} = \{b,c,d\}$

ซึ่ง $f(\overline{\{b,c\}}) = f(\{b,c,d\}) = \{w,x,z\}$

นั่นคือ $f(\overline{\{b,c\}}) \subset \overline{V}$ เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด b

<u>พิจารณาที่จุด c</u>

เนื่องจาก $f(c) = w$ ดังนั้น V คือ $\{w\}$, $\{w,y\}$, $\{w,x,y\}$ หรือ Y

ได้ $\overline{V}$ คือ $\{w,x,z\}$ หรือ Y ตามลำดับ

มีเซตเปิด $\{b,c\}$ ใน X ที่ $c \in \{b,c\}$ และ $\overline{\{b,c\}} = \{b,c,d\}$

นั่นคือ $f(\overline{\{b,c\}}) \subset \overline{V}$ เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด c

<u>พิจารณาที่จุด d</u>

เนื่องจาก $f(d) = z$ ดังนั้น V คือ Y

ได้ $\overline{V}$ คือ Y มีเซตเปิด X ใน X ที่ $d \in X$ และ $\overline{X} = X$

ซึ่ง $f(\overline{X}) = Y$ นั่นคือ $f(\overline{X}) = \overline{V}$ เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด d

ดังนั้น f ต่อเนื่องแบบธีต้า บน X

<u>ตัวอย่าง 3.5.2</u> ให้ (X, τ_X) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

(Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี ที่ τ_Y เป็นทริเวียลโทโพโลยี บน Y และ

$X = Y$ และกำหนดให้ $f : (X, \tau_X) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$ โดยที่ $f(x) = x$

สำหรับแต่ละ $x \in X$ จะแสดงว่า f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

ให้ $x \in X$

เนื่องจาก $f(x) = x$ และ τ_Y เป็นทริเวียลโทโพโลยี

ดังนั้นเซตเปิดที่บรรจุ $f(x)$ คือ Y เท่านั้น และ $\overline{Y} = Y$

มีเซตเปิด X ใน X ที่ $x \in X$ และ $\overline{X} = X$ ดังนั้น $f(\overline{X}) = Y = \overline{Y}$

นั่นคือ f ต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด x

ดังนั้น f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

<u>ข้อสังเกต 3.5.1</u> ให้ (X, τ_X) และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $f : (X, \tau_X) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$ ถ้า f ต่อเนื่องบน X แล้ว f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

<u>พิสูจน์</u> ให้ $f : (X, \tau_X) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$ ต่อเนื่องบน X

จะแสดงว่า f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

ให้ $x \in X$ และ V เป็นเซตเปิดใน Y ที่ $f(x) \in V$

จาก f ต่อเนื่องบน X

ดังนั้น มีเซตเปิด U ใน X ที่ $x \in U$ และ $f(U) \subset V$

ต่อไปจะแสดงว่า $f(\bar{U}) \subset \bar{V}$

ให้ $a \in f(\bar{U})$ จะแสดงว่า $a \in \bar{V}$

ให้ W เป็นเซตเปิดใน Y ที่ $a \in W$

จาก $a \in f(\bar{U})$ ดังนั้น มี $b \in \bar{U}$ ที่ $f(b) = a$

นั่นคือ ได้ $b \in f^{-1}(\{a\}) \subset f^{-1}(W)$

เนื่องจาก W เป็นเซตเปิดใน Y และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน X

ดังนั้น $f^{-1}(W)$ เป็นเซตเปิดใน X โดยที่ $b \in f^{-1}(W)$

จาก $b \in \bar{U}$ ทำให้ได้ว่า $f^{-1}(W) \cap U \neq \phi$

นั่นคือ มี $c \in f^{-1}(W)$ และ $c \in U$

ดังนั้น $f(c) \in W$ และ $f(c) \in f(U)$

เพราะฉะนั้น $W \cap f(U) \neq \phi$

จาก $f(U) \subset V$ ทำให้ $W \cap V \neq \phi$

นั่นคือ $a \in \bar{V}$ ดังนั้น $f(\bar{U}) \subset \bar{V}$

เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด x

นั่นคือ f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

ต่อไปเป็นการแสดงตัวอย่างให้เห็นว่าบทกลับของข้อสังเกต 3.5.1 ไม่จำเป็นต้องจริง นั่นคือ ถ้า $f: (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X แล้วไม่จำเป็นที่ f ต่อเนื่องบน X

<u>ตัวอย่าง 3.5.3</u> ให้ $X \neq \phi$ และ $a \in X$, τ_1 เป็นทริเวียล

โทโพโลยีบน X , $\tau_2 = \{\phi, \{a\}, X\}$

และกำหนดให้ $f : (X, \tau_1) \longrightarrow (X, \tau_2)$ โดย $f(x) = x$, $\forall x \in X$

จะแสดงว่า f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

ให้ $x \in X$ และ $V \in \tau_2$ ใน X ที่ $f(a) \in V$

ดังนั้น V คือ $\{a\}$ หรือ X

นั่นคือ ได้ $\bar{V}$ คือ X มี $X \in \tau_1$ ซึ่ง $x \in X$ และ $\bar{X} = X$

ดังนั้น $f(\bar{X}) = f(X) = X = \bar{V}$ นั่นคือ f ต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด x

แสดงว่า f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

เนื่องจาก $\{a\} \in \tau_2$ แต่ $f^{-1}(\{a\}) = \{a\}$ ซึ่ง $\{a\} \notin \tau_1$

ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องบน X

3.6 <u>ฟังก์ชันต่อเนื่องแบบธีต้าไปยังปริภูมิธีต้า–เฮอรดิวซิเบิ้ล</u>

<u>ทฤษฎีบท 3.6.1</u> ให้ (X, τ_X) และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ

$f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ ถ้า f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

แล้ว $f(Cl_\theta A) \subset Cl_\theta f(A)$ สำหรับแต่ละ $A \subset X$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $A \subset X$ และ $y \in f(Cl_\theta A)$ จะแสดงว่า $y \in Cl_\theta f(A)$

ให้ V เป็นเซตเปิดใน Y ที่ $y \in V$

จาก $y \in f(Cl_\theta A)$ ดังนั้นมี $x \in Cl_\theta A$ ที่ $f(x) = y$

เนื่องจาก f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

ดังนั้นมีเซตเปิด U ใน X ที่ $x \in U$ และ $f(\bar{U}) \subset \bar{V}$

จาก $x \in Cl_\theta A$ และ U เป็นเซตเปิดใน X ที่ $x \in U$

ดังนั้น $\bar{U} \cap A \neq \phi$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชัน นั่นคือจะทำให้ $f(\bar{U} \cap A) \neq \phi$

และ $f(\bar{U} \cap A) \subset f(\bar{U}) \cap f(A) \subset \bar{V} \cap f(A)$

เพราะฉะนั้น $\bar{V} \cap f(A) \neq \phi$

ดังนั้น $y \in Cl_\theta f(A)$ จึงได้ $f(Cl_\theta A) \subset Cl_\theta f(A)$

<u>ทฤษฎี 3.6.1</u> ให้ (X, τ_x) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $f : (X, \tau_x) \longrightarrow (f(X), \tau_{f(x)})$ โดย f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X ถ้า (X, τ_x) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล แล้ว $(f(X), \tau_{f(x)})$ เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

<u>พิสูจน์</u> ให้ V เป็นเซตเปิดใน $f(X)$ ที่ $V \neq \phi$

จะแสดงว่า $Cl_\theta \bar{V} = f(X)$ จาก $V \neq \phi$ ดังนั้นให้ $y \in V$

นั่นคือมี $x \in X$ ที่ $f(x) = y$

จาก f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

ดังนั้นมีเซตเปิด U ใน X ที่ $x \in U$ และ $f(\bar{U}) \subset \bar{V}$

โดยข้อสังเกต 3.2.1 ข้อ 4 ได้ $Cl_\theta f(\bar{U}) \subset Cl_\theta \bar{V}$

โดยทฤษฎีนำ 3.6.1 ได้ $f(Cl_\theta \bar{U}) \subset Cl_\theta f(\bar{U})$ ดังนั้น $f(Cl_\theta \bar{U}) \subset Cl_\theta \bar{V}$

เนื่องจาก (X, τ_x) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล อาศัยทฤษฎี 3.3.1 ได้ $Cl_\theta \bar{U} = X$ นั่นคือ $f(X) \subset Cl_\theta \bar{V}$ เพราะฉะนั้น $Cl_\theta \bar{V} = f(X)$

ดังนั้น $(f(X), \tau_{f(x)})$ เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

ต่อไปเป็นตัวอย่างที่แสดงว่าบทกลับของทฤษฎี 3.6.1 ไม่จำเป็นต้องจริง กล่าวคือ ให้ (X, τ_X) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (f(X), \tau_{f(X)})$ ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X ถ้า $(f(X), \tau_{f(X)})$ เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล แล้ว (X, τ_X) ไม่จำเป็นที่ปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

<u>ตัวอย่าง 3.6.1</u> ให้ X เป็นเซตที่มีสมาชิกมากกว่า 1 และ $a \in X$

τ_X เป็นดิสครีตโทโพโลยีบน X

กำหนดให้ $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (f(X), \tau_{f(X)})$ โดย $f(x) = x$, $\forall x \in X$

และ $\tau_{f(X)} = \{\phi, f(\{a\}), f(X)\}$ เป็นโทโพโลยีบน $f(X)$

จะแสดงว่า f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X ให้ $x \in X$

<u>กรณี</u> $x = a$ ให้ V เป็นเซตเปิดใน $f(X)$ ที่ $f(a) \in V$

ดังนั้น V คือ $f(\{a\})$ หรือ $F(X)$

ได้ $\overline{V}$ คือ $f(X)$

มีเซตเปิด $\{a\}$ ใน X ที่ $a \in \{a\}$ และ $\overline{\{a\}} = \{a\}$

ดังนั้น $f(\overline{\{a\}}) = f(\{a\}) \subset \overline{V}$

นั่นคือ f ต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด a

<u>กรณี</u> $x \neq a$

ให้ V เป็นเซตเปิดใน $f(X)$ ที่ $f(x) \in V$ ได้ $\overline{V}$ คือ $f(X)$

มีเซตเปิด X ใน X ที่ $x \in X$ และ $\overline{X} = X$

ดังนั้น $f(\overline{X}) = f(X) = \overline{V}$ นั่นคือ f ต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด x

ดังนั้นจากทั้ง 2 กรณีได้ f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

ต่อไปจะแสดงว่า $(f(X), \tau_{f(X)})$ เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

ให้ V เป็นเซตเปิดใน $f(X)$ ที่ $V \neq \phi$

ดังนั้น V คือ $f(\{a\})$ หรือ $f(X)$

จากนิยาม $\tau_{f(X)}$ ได้ $\overline{f(\{a\})} = f(X)$

และ $\overline{f(X)} = f(X)$

แต่ $Cl_\theta \overline{f(\{a\})} \subset f(X)$ และ $Cl_\theta \overline{f(X)} \subset f(X)$

โดยข้อสังเกต 3.2.1 ข้อ 1

ได้ $\overline{f(\{a\})} \subset Cl_\theta \overline{f(\{a\})}$ และ $\overline{f(X)} \subset Cl_\theta \overline{f(X)}$

นั่นคือ $Cl_\theta \overline{f(\{a\})} = Cl_\theta \overline{f(X)} = f(X)$

ดังนั้น $Cl_\theta \overline{V} = f(X)$ อาศัยทฤษฎี 3.3.1 ได้ $(f(X), \tau_{f(X)})$ เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล และเนื่องจาก $\{a\}$ เป็นเซตเปิดใน X

ที่ $Cl_\theta(\overline{\{a\}}) = \{a\} \neq X$

อาศัยทฤษฎี 3.3.1 ได้ (X, τ_X) ไม่เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล