บทที่ 4

ปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล II

(Theta - irreducible space II)

ในบทนี้จะเป็นการขยายต่อจากบทที่ 3 ตามหัวข้อต่อไปนี้

4.1 คุณสมบัติของเซตเรกูลาร์-เปิด, เซตเรกูลาร์-ปิดและธีต้า-โคลส์เซอร์สับเซต

4.2 คุณสมบัติของปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

4.3 ความสัมพันธ์ระหว่างปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ลกับปริภูมิธีต้า-เออริดิวเซิเบิ้ล และความสัมพันธ์ระหว่างปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ลกับปริภูมิไม่ขาดตอนและปริภูมิขาดตอนสุดขีด

4.4 เงื่อนไขที่ทำให้ฟังก์ชันมีความต่อเนื่องแบบธีต้า

4.5 ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันต่อเนื่องแบบธีต้ากับฟังก์ชันต่อเนื่อง

4.1 <u>คุณสมบัติของเซตเรกูลาร์-เปิดและเซตเรกูลาร์-ปิด และธีต้า-โคลส์เซตร์สับเซต</u>

<u>ทฤษฎี 4.1.1</u> ให้ (X,τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $A \subset X$

1. ถ้า A เป็นเซตปิดแล้ว $intA$ เป็นเซตเรกูลาร์-เปิดใน X
2. ถ้า τ เป็นดิสครีตโทโพโลยี แล้ว A เป็นทั้งเซตเรกูลาร์-ปิดและเซตเรกูลาร์-เปิด

<u>พิสูจน์</u> 1. ให้ A เป็นเซตปิดใน X

จะแสดงว่า $intA$ เป็นเซตเรกูลาร์-เปิดใน X

นั่นคือ จะแสดงว่า $int(\overline{intA}) = intA$

เนื่องจาก $intA \subset \overline{intA}$ และ $int(\overline{intA}) \subset \overline{intA}$

จาก $intA$ เป็นเซตเปิด และ $int(\overline{intA})$ เป็นเซตเปิดที่ใหญ่ที่สุดที่เป็นสับเซตของ $\overline{intA}$

ดังนั้น $\text{int}A \subset \text{int}(\overline{\text{int}A})$

เนื่องจาก A เป็นเซตปิด จึงได้ $\overline{\text{int}\,A} \subset \bar{A} = A$ และ $\text{int}(\overline{\text{int}A}) \subset \overline{\text{int}A}$

ทำให้ $\text{int}(\overline{\text{int}A}) \subset A$ ซึ่ง $\text{int}(\overline{\text{int}A})$ เป็นเซตเปิดและเนื่องจาก $\text{int}A$ เป็นเซตเปิดที่ใหญ่ที่สุดที่ $\text{int}A \subset A$

ดังนั้น $\text{int}(\overline{\text{int}A}) \subset \text{int}A$ เพราะฉะนั้น $\text{int}(\overline{\text{int}A}) = \text{int}A$

นั่นคือ $\text{int}A$ เป็นเซตเรกูลาร์-เปิด

2. ให้ τ เป็นดิสครีตโทโพโลยีบน X

นั่นคือ $\tau = P(X)$

เนื่องจาก $A \subset X$ และ $X-A \subset X$

ดังนั้น A เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิดใน X จึงได้ $\text{int}\bar{A} = A$ และ $\overline{\text{int}A} = A$

นั่นคือ A เป็นทั้งเซตเรกูลาร์-เปิด และเซตเรกูลาร์-ปิด

<u>ตัวอย่าง 4.1.1</u> (แสดงว่า มี $A \subset X$ ที่ $\text{int}A$ เป็นเซตเรกูลาร์-เปิด แต่ A ไม่เป็นเซตปิด)

1. ให้ τ เป็นยูชวลโทโพโลยีบน R และ $A = [1,2)$

เนื่องจาก $A \subset R$ และ $\text{int}A = \text{int}[1,2) = (1,2)$

อาศัยตัวอย่าง 3.1.1 (1) ได้ (1,2) เป็นเซตเรกูลาร์-เปิด ใน R

แต่ [1,2) ไม่เป็นปิดใน R นั่นคือ $\text{int}A$ เป็นเซตเรกูลาร์-เปิด แต่ A ไม่เป็นเซตปิด

2. ให้ $X = \{a,b,c,d\}$

และ $\tau = \{\phi, \{a\}, \{d\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \{b,c,d\}, X\}$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก $\{b\} \subset X$ และ $\text{int}\{b\} = \phi$

โดยข้อสังเกต 3.1.1 ข้อ 1 ดังนั้น $\text{int}\{b\}$ เป็นเซตเรกูลาร์-เปิด

และเห็นได้ชัดจากนิยามของ τ ว่า $\{b\}$ ไม่เป็นเซตปิด

<u>ทฤษฎี 4.1.2</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $A, B \subset X$

1. $Cl_\theta (A \cap B) \subset Cl_\theta(A) \cap Cl_\theta (B)$
2. $Cl_\theta (A \cup B) = Cl_\theta (A) \cup Cl_\theta (B)$
3. ถ้า A เป็นเซตเปิดแล้ว $Cl_\theta (A) = \bar{A}$
4. $Cl_\theta (X - Cl_\theta A) = X - \text{int}(Cl_\theta A)$
5. ถ้า A เป็นเซตเปิดและเซตปิดแล้ว $Cl_\theta A = A$

<u>พิสูจน์</u> 1. เนื่องจาก $A \cap B \subset A$ และ $A \cap B \subset B$ โดยข้อสังเกต 3.2.1 ข้อ 4
ได้ $Cl_\theta (A \cap B \subset Cl_\theta A$ และ $Cl_\theta (A \cap B) \subset Cl_\theta B$
ดังนั้น $Cl_\theta (A \cap B) \subset Cl_\theta A \cap Cl_\theta B$

2. เนื่องจาก $A \subset A \cup B$ และ $B \subset A \cup B$ โดยข้อสังเกต 3.2.1 ข้อ 4
ได้ $Cl_\theta A \subset Cl_\theta (A \cup B)$ และ $Cl_\theta B \subset Cl_\theta (A \cup B)$
ดังนั้น $Cl_\theta A \cup Cl_\theta B \subset Cl_\theta (A \cup B)$
ต่อไปจะแสดงว่า $Cl_\theta (A \cup B) \subset Cl_\theta A \cup Cl_\theta B$
ถ้า $x \notin Cl_\theta A \cup Cl_\theta B$ นั่นคือได้ $x \notin Cl_\theta A$ และ $x \notin Cl_\theta B$
ดังนั้นมีเซตเปิด U_1 และ U_2 ที่บรรจุ x และ $\bar{U}_1 \cap A = \phi$, $\bar{U}_2 \cap B = \phi$
ให้ $U = U_1 \cap U_2$ ดังนั้น U เป็นเซตเปิดที่บรรจุ x
เนื่องจาก $(\bar{U}_1 \cap A) \cup (\bar{U}_2 \cap B) = \phi$ และ $\bar{U} \subset \bar{U}_1$ และ $\bar{U} \subset \bar{U}_2$
ดังนั้น $(\bar{U} \cap A) \cup (\bar{U} \cap B) = \phi$ ได้ $\bar{U} \cap (A \cup B) = \phi$
นั่นคือ $x \notin Cl_\theta (A \cup B)$
เพราะฉะนั้น $Cl_\theta (A \cup B) \subset Cl_\theta A \cup Cl_\theta B$
สรุป $Cl_\theta(A \cup B) = Cl_\theta A \cup Cl_\theta B$

3. ให้ A เป็นเซตเปิดใน X จะแสดงว่า $Cl_\theta A = \bar{A}$
เนื่องจาก $A \subset X$ และอาศัยข้อสังเกต 3.2.1 ข้อ 1 ได้ $\bar{A} \subset Cl_\theta A$
ต่อไปจะแสดงว่า $Cl_\theta A \subset \bar{A}$ ถ้า $x \notin \bar{A}$

ดังนั้นมีเซตเปิด U ที่ $x \in U$ และ $U \cap A = \phi$ ทำให้ $U \subset X - A$

เนื่องจาก A เป็นเซตเปิดดังนั้น $X - A$ เป็นเซตปิดใน X

เพราะฉะนั้น $\bar{U} \subset X - A$ ทำให้ได้ $\bar{U} \cap A = \phi$ นั่นคือ $x \notin Cl_\theta A$

ดังนั้น $Cl_\theta A \subset \bar{A}$ เพราะฉะนั้น $Cl_\theta A = \bar{A}$

4. เนื่องจาก $int(Cl_\theta A) \subset Cl_\theta A$

ดังนั้น $X - Cl_\theta A \subset X - int(Cl_\theta A)$

เนื่องจาก $int(Cl_\theta A)$ เป็นเซตเปิดใน X

ทำให้ $X - int(Cl_\theta A)$ เป็นเซตปิดใน X

ดังนั้น $\overline{(X - Cl_\theta A)} \subset X - int(Cl_\theta A)$

โดยข้อสังเกต 3.2.1 ข้อ 2 ได้ $Cl_\theta A$ เป็นเซตปิด

ดังนั้น $X - Cl_\theta A$ เป็นเซตเปิด

โดยทฤษฎี 4.1.2 ข้อ 3 ได้ $Cl_\theta (X - Cl_\theta A) = \overline{(X - Cl_\theta A)}$

เพราะฉะนั้น $Cl_\theta (X-Cl_\theta A) \subset X-int(Cl_\theta A)$

ต่อไปจะแสดงว่า $X - int(Cl_\theta A) \subset Cl_\theta (X - Cl_\theta A)$

ถ้า $x \notin Cl_\theta (X - Cl_\theta A)$

แสดงว่ามีเซตเปิด U ที่บรรจุ x และ $\bar{U} \cap (X-Cl_\theta A) = \phi$

แต่ $U \subset \bar{U}$ ดังนั้น $U \cap (X-Cl_\theta A) = \phi$ ได้ $U \subset Cl_\theta A$

ดังนั้น $x \in int(Cl_\theta A)$ นั่นคือ $x \notin X - int(Cl_\theta A)$

แสดงว่า $X - int(Cl_\theta A) \subset Cl_\theta (X-Cl_\theta A)$

สรุปได้ $Cl_\theta (X-Cl_\theta A) = X - int(Cl_\theta A)$

5. ให้ A เป็นเซตเปิดและเซตปิด

เมื่อ A เป็นเซตเปิดได้ $Cl_\theta A = \bar{A}$ เมื่อ A เป็นเซตปิดได้ $\bar{A} = A$

ดังนั้น $Cl_\theta A = A$

<u>ตัวอย่าง 4.1.2</u> (แสดงว่ามี $A \subset X$ ที่ $Cl_\theta(A) = \bar{A}$ แต่ A ไม่เป็นเซตเปิด)

1. $X = \{a,b,c,d\}$ และ $\tau = \{\phi, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c,d\}, X\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

จากนิยามของ τ ได้ $\overline{\{b,c\}} = X$

และ $\overline{\{b,c\}} \subset Cl_\theta(\{b,c\}) \subset X$

ดังนั้น $\overline{\{b,c\}} = Cl_\theta(\{b,c\})$

แต่ เห็นได้ชัดว่า $\{b,c\}$ ไม่เป็นเซตเปิดใน X

2. ให้ τ เป็นยูชวลโทโพโลยีบน R

เนื่องจาก $[1,2) \subset R$ และ $\overline{[1,2)} = [1,2]$

ให้ $x \notin \overline{[1,2)}$ ดังนั้นมี $\epsilon > 0$ ซึ่ง $B(x,\epsilon) \cap [1,2) = \phi$

แต่ $\bar{B}(x, \epsilon/2) \subset B(x,\epsilon)$

ดังนั้น $\bar{B}(x, \epsilon/2) \cap [1,2) = \phi$ นั่นคือ $x \notin Cl_\theta[1,2)$

ทำให้ $Cl_\theta[1,2) \subset \overline{[1,2)}$

แต่โดยข้อสังเกต 3.2.1 ข้อ 1 ได้ $\overline{[1,2)} \subset Cl_\theta[1,2)$

ดังนั้น $Cl_\theta[1,2) = \overline{[1,2)} = [1,2]$

และเห็นได้ชัดว่า $[1,2)$ ไม่เป็นเซตเปิดใน R

<u>ข้อสังเกต 4.1.1</u>

1. ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยีและ $A \subset X$

ถ้า τ เป็นดิสครีตโทโพลโลยีบน X แล้ว $Cl_\theta A = A$

2. ให้ (R,τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $A \subset R$

ถ้า τ เป็นยูชวลโทโพโลยีบน R แล้ว $Cl_\theta A = \bar{A}$

<u>พิสูจน์</u> 1. ให้ τ เป็นดิสครีตโทโพโลยีบน X และ $A \subset X$

นั่นคือ $\tau = P(X)$ เนื่องจาก $A \subset X$ และ $X - A \subset X$

ดังนั้น A เป็นเซตเปิดและเป็นเซตปิดใน X

โดยทฤษฎี 4.1.2 ข้อ 3 ได้ $Cl_\theta A = \bar{A}$ และ A เป็นเซตปิด

จึงได้ $\bar{A} = A$ เพราะฉะนั้น $Cl_\theta A = A$

2. ให้ τ เป็นยูชวลโทโพโลยีบน R และ $A \subset R$

โดยข้อสังเกต 3.2.1 ข้อ 1 ได้ $\bar{A} \subset Cl_\theta A$

ต่อไปจะแสดงว่า $Cl_\theta A \subset \bar{A}$

ถ้า $x \notin \bar{A}$ ดังนั้น มี $\epsilon > 0$ ซึ่ง $B(x,\epsilon) \cap A = \phi$

แต่ $\bar{B}(x, \epsilon_{/2}) \subset B(x, \epsilon)$ ดังนั้น $\bar{B}(x, \epsilon_{/2}) \cap A = \phi$

นั่นคือ $x \notin Cl_\theta A$ เพราะฉะนั้น $Cl_\theta A \subset \bar{A}$ ดังนั้น $Cl_\theta A = \bar{A}$

4.2 คุณสมบัติของปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล

จากทฤษฎี 2.3.11 ข้อ 2 ได้ $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \bar{A}_i$ ผลสรุปนี้ยังคงเป็นจริง

เมื่อแทนโคลส์เชอร์สับเซตด้วยธีต้าโคลส์เชอร์สับเซตดังทฤษฎีนำ 4.2.1 ต่อไปนี้

__ทฤษฎีนำ 4.2.1__ ให้ $\{X_i / i \in I\}$ เป็นกลุ่มของปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $A_i \subset X_i$ สำหรับทุก $i \in I$ เมื่อ I เป็นเซตดัชนีใด ๆ

ดังนั้น $Cl_\theta \prod_{i \in I} (A_i) = \prod_{i \in I} (Cl_\theta A_i)$

__พิสูจน์__ __กรณี 1__ $A_i = \phi$, $\exists\, i \in I$ เห็นได้ชัด $Cl_\theta \prod_{i \in I} (A_i) = \prod_{i \in I} (Cl_\theta A_i) = \phi$

__กรณีที่ 2__ $A_i \neq \phi$, $\forall\, i \in I$

ให้ $(x_i) \in Cl_\theta \prod_{i \in I} (A_i)$ จะแสดงว่า $(x_i) \in \prod_{i \in I} (Cl_\theta A_i)$

นั่นคือจะแสดงว่า $x_i \in Cl_\theta A_i$, $\forall\, i \in I$

ให้ $i \in I$ และ U_i เป็นเซตเปิดใน X_i ซึ่ง $x_i \in U_i$

จะแสดงว่า $\bar{U}_i \cap A_i \neq \phi$ ให้ $U_j = X_j \ \forall j \neq i$

ดังนั้น $\prod_{j \in I} U_j$ เป็นเซตเปิดใน $\prod_{i \in I} X_j$ ที่ บรรจุ (x_j)

จาก $(x_j) \in Cl_\theta \prod_{j \in I} (A_j)$ ได้ $\phi \neq \overline{\prod_{j \in I} U_j} \cap \prod_{j \in I} A_j$

จากทฤษฎี 2.3.11 ข้อ 2 ได้ $\overline{\prod_{j \in I} U_j} = \prod_{j \in I} \bar{U}_j$

ดังนั้น $\prod_{j \in I} \bar{U}_j \cap \prod_{j \in I} A_j \neq \phi$

จากทฤษฎี 2.3.11 ข้อ 3 ได้ $\prod_{j \in I} \bar{U}_j \cap \prod_{j \in I} A_j = \prod_{j \in I} (\bar{U}_j \cap A_j)$

นั่นคือ $\bar{U}_i \cap A_i \neq \phi$

ดังนั้น $x_i \in Cl_\theta A_i$ จากนิยามของปริภูมิของผลคูณ ได้ $(x_i) \in \prod_{i \in I} (Cl_\theta A_i)$

นั่นคือ $$Cl_\theta \prod_{i \in I} (A_i) \subset \prod_{i \in I} (Cl_\theta A_i)$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\prod_{i \in I} (Cl_\theta A_i) \subset Cl_\theta \prod_{i \in I} (A_i)$

ให้ $(x_i) \in \prod_{i \in I} (Cl_\theta A_i)$ จะแสดงว่า $(x_i) \in Cl_\theta \prod_{i \in I} (A_i)$

นั่นคือจะแสดงว่า $\bar{U} \cap \prod_{i \in I} A_i \neq \phi$ สำหรับแต่ละเซตเปิด U ใน $\prod_{i \in I} X_i$ ที่ $(x_i) \in U$

ให้ $U_{i_1} \times \ldots \times U_{i_n} \times \prod_{i \notin \{i_1, \ldots, i_n\}} X_i$ เป็นเซตเปิดใน $\prod_{i \in I} X_i$ ที่บรรจุ (x_i)

เมื่อ $U_{i_1}, \ldots, U_{i_a}$ เป็นเซตเปิดใน $X_{i_1}, \ldots, X_{i_a}$ ตามลำดับ

จาก $(x_i) \in \prod_{i \in I} (Cl_\theta A_i)$ ทำให้ $x_i \in Cl_\theta A_i$, $\forall\ i \in I$

ดังนั้น $\bar{U}_{i_j} \cap A_{i_j} \neq \phi$, $j \in \{1, \ldots, a\}$

พิจารณา $\overline{(U_{i_1} \times \ldots \times U_{i_a} \times \prod_{i \notin \{i_1, \ldots, i_a\}} X_i)} \cap \prod_{i \in I} A_i$

$$= (\bar{U}_{i_1} \times \ldots \times \bar{U}_{i_a} \times \prod_{i \notin \{i_1, \ldots, i_a\}} X_i) \cap \prod_{i \in I} A_i$$

$$= (\bar{U}_{i_1} \cap A_{i_1}) \times \ldots \times (\bar{U}_{i_a} \cap A_{i_a}) \times \prod_{i \notin \{i_1, \ldots, i_a\}} A_i \neq \phi$$

ดังนั้น $\overline{(U_{i_1} \times \ldots \times U_{i_a} \times \prod_{i \notin \{i_1, \ldots, i_a\}} X_i)} \cap \prod_{i \in I} A_i \neq \phi$

นั่นคือ สำหรับแต่ละเซตเปิด U ใน $\prod_{i \in I} X_i$ ที่ $(x_i) \in U$ ทำให้ $\bar{U} \cap \prod_{i \in I} A_i \neq \phi$

ดังนั้น $(x_i) \in Cl_\theta \prod_{i \in I} (A_i)$ จึงได้ $\prod_{i \in I} (Cl_\theta A_i) \subset Cl_\theta \prod_{i \in I} (A_i)$

เพราะฉะนั้น $Cl_\theta \prod_{i \in I} (A_i) = \prod_{i \in I} (Cl_\theta A_i)$

นั่นคือ สำหรับแต่ละ $A_i \subset X_i, \forall\ i \in I$ ได้ $Cl_\theta \prod_{i \in I} (A_i) = \prod_{i \in I} (Cl_\theta A_i)$

ในหนังสือโทโพโลยีทั่ว ๆ เราทราบว่า เมื่อ $\{X_i \ / \ i \in I\}$ เป็นกลุ่มของปริภูมิโทโพโลยี เมื่อ I เป็นเซตดัชนี แล้ว $\prod_{i \in I} X_i$ เป็นปริภูมิไม่ขาดตอนก็ต่อเมื่อ X_i , $\forall\ i$ เป็นปริภูมิไม่ขาดตอน ผลสรุปดังกล่าวยังเป็นจริง เมื่อแทนปริภูมิไม่ขาดตอนด้วยปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล ดังทฤษฎี 4.2.1 ต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 4.2.1</u> ให้ $\{X_i / i \in I\}$ เป็นกลุ่มของปริภูมิเชิงโทโพโลยี เมื่อ I เป็นเซตดัชนี ดังนั้น $\prod_{i \in I} X_i$ เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ลก็ต่อเมื่อ $X_i, \forall i \in I$ เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

<u>พิสูจน์</u> (==>)

สำหรับแต่ละ $j \in I$ โพรเจคชันที่ j แทนด้วย P_j ซึ่งกำหนดดังนี้

$P_j : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_j$ โดยที่ $P_j(x_i) = x_j$, $(x_i) \in \prod_{i \in I} X_i$

เนื่องจาก P_j เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\prod_{i \in I} X_i$

โดยข้อสังเกต 3.5.1 ได้ P_j เป็นฟังก์ชั่นต่อเนื่องแบบธีต้าบน $\prod_{i \in I} X_i$

และ P_j เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

เนื่องจาก $\prod_{i \in I} X_i$ เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล อาศัยทฤษฎี 3.6.1

ทำให้ได้ว่า X_j เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวเบิ้ล

นั่นคือ ถ้า $\prod_{i \in I} X_i$ เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล แล้ว

$X_i, \forall i \in I$ เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

(<==)

ให้ $X_i, \forall i \in I$ เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

จะแสดงว่า $\prod_{i \in I} X_i$ เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

ให้ U เป็นเบสใน $\prod_{i \in I} X_i$ ที่ $U \neq \phi$

ดังนั้นมี $a \in N$ ที่ $U = U_{i_1} \times \ldots \times U_{i_a} \times \prod_{i \in I} X_i$ โดย U_{i_j} เป็นเซตเปิดใน X_{i_j}

เมื่อ $j \in \{1,\ldots,a\}$

เพราะฉะนั้น $\bar{U} = \overline{U_{i_1} \times \ldots \times U_{i_a} \times \prod_{i \in I} X_i}$

$= \bar{U}_{i_1} \times \ldots \times \bar{U}_{i_a} \times \prod_{i \in I} X_i$

ดังนั้น $Cl_\theta(\bar{U}) = Cl_\theta(\bar{U}_{i_1} \times \ldots \times \bar{U}_{i_a} \times \prod_{i \notin \{i_1,\ldots,i_a\}} X_i)$ โดยทฤษฎีนำ 4.2.1

ได้ $Cl_\theta(\bar{U}_{i_1} \times \ldots \times \bar{U}_{i_a} \times \prod_{i \notin \{i_1,\ldots,i_a\}} X_i)$

$= Cl_\theta(\bar{U}_{i_1}) \times \ldots \times Cl_\theta(\bar{U}_{i_a}) \times \prod_{i \notin \{i_1,\ldots,i_a\}} X_i$

นั่นคือ $Cl_\theta \bar{U} = Cl_\theta(\bar{U}_{i_1}) \times \ldots \times Cl_\theta(\bar{U}_{i_a}) \times \prod_{i \notin \{i_1,\ldots,i_a\}} X_i$

เนื่องจาก X_i, $\forall\, i$ เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล และ U_i เป็นเซตเปิดใน X_i
อาศัยทฤษฎี 3.3.1 ได้ $Cl_\theta(\bar{U}_i) = X_i$
ดังนั้น $Cl_\theta(\bar{U}) = X_{i_1} \times \ldots \times X_{i_a} \times \prod_{i \notin \{i_1,\ldots,i_a\}} X_i = \prod_{i \in I} X_i$

นั่นคือ สำหรับแต่ละเซตเปิด V ใน $\prod_{i \in I} X_i$ ที่ $V \neq \phi$ ได้ $Cl_\theta(\bar{V}) = \prod_{i \in I} X_i$

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎี 3.3.1 ได้ว่า $\prod_{i \in I} X_i$ เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

<u>ทฤษฎี 4.2.2</u> ให้ (X, τ_1) และ (X, τ_2) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยีและ $\tau_1 \subset \tau_2$ ถ้า (X, τ_2) เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล แล้ว (X, τ_1) เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล

<u>พิสูจน์</u> ให้ (X, τ_2) เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล และ $\tau_1 \subset \tau_2$

ให้ A เป็นเซตเปิดใน X ที่ $A \in \tau_1$ และ $A \neq \phi$

เนื่องจาก $\tau_1 \subset \tau_2$ ได้ $A \subset \tau_2$

จาก (X, τ_2) เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล

อาศัยทฤษฎี 3.3.1 ได้ $Cl\ \overline{A} = X$

นั่นคือ (X, τ_1) เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล

ต่อไปเป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็นว่าบทกลับของทฤษฎี 4.3.2 ไม่จำเป็นต้องเป็นจริงนั่นคือ ให้ (X, τ_1) , (X, τ_2) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยีและ $\tau_1 \subset \tau_2$ ถ้า (X, τ_1) เป็นปริภูมิธีต้า – เออริดิวซิเบิ้ลแล้ว (X, τ_2) ไม่จำเป็นที่เป็นปริภูมิธีต้า – เออริดิวซิเบิ้ล

<u>ตัวอย่าง 4.2.1</u> ให้ $X = \{a,b,c\}$

และ $\tau_1 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

$\tau_2 = P(X)$ เป็นโทโพโลยีบน X

เห็นได้ชัดว่า $\tau_1 \subset \tau_2$

โดยตัวอย่าง 3.3.2 (1) ได้ (X, τ_1) เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล

จะแสดงว่า (X, τ_2) ไม่เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล

เนื่องจาก $\overline{\text{int}\{a\}} = \{a\}$ และ $\overline{\text{int}\{b\}} = \{b\}$

ดังนั้น $\{a\}, \{b\}$ เป็นเซตเรกูลาร์–ปิด และเห็นได้ชัดว่า $\{a\} \cap \{b\} = \phi$

เพราะฉะนั้น (X, τ_2) ไม่เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิซิเบิ้ล

<u>ข้อสังเกต 4.2.1</u> ให้ (X, τ_i) $\forall i \in I$ เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

ถ้า (X, τ_i) $\exists\, i \in I$ เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล แล้ว $(X, \bigcap_{i \in I} \tau_i)$ เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล

ต่อไปเป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็นว่าบทกลับของข้อสังเกต 4.2.1 ไม่จำเป็นต้องจริง นั่นคือ ให้ (X, τ_1) , (X, τ_2) เป็นโทโพโลยีบน X ถ้า $(X, \tau_1 \cap \tau_2)$ เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล แล้ว (X, τ_1) และ (X, τ_2) ไม่จำเป็นต้องเป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล

<u>ตัวอย่าง 4.2.2</u> ให้ $X = \{a,b,c\}$

$\tau_1 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, X\}$

และ $\tau_2 = \{\phi, \{a\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, X\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

ดังนั้น $\tau_1 \cap \tau_2 = \{\phi, \{a\}, \{a,b\}, X\}$

เนื่องจาก $\{a\}$, $\{c\}$ เป็นเซตเปิดและเซตปิดสำหรับ τ_1 และ τ_2

ตามลำดับ ที่ $Cl_\theta(\overline{\{a\}}) = \{a\} \neq X$ และ $Cl_\theta(\overline{\{c\}}) = \{c\} \neq X$

ดังนั้น (X, τ_1) และ (X, τ_2) ไม่เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล

เซตเปิดที่ไม่เป็นเซตว่าง สำหรับ $\tau_1 \cap \tau_2$ คือ $\{a\}$, $\{a,b\}$ หรือ X

ซึ่ง $Cl_\theta(\overline{\{a\}}) = Cl_\theta(\overline{\{a,b\}}) = Cl_\theta(\bar{X}) = X$

ดังนั้น $(X, \tau_1 \cap \tau_2)$ เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล

<u>ทฤษฎี 4.2.3</u> ให้ (X, τ_X) เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล และ D เป็นเดนส์สับเซตของ X ดังนั้น (D, τ_D) เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล

<u>พิสูจน์</u> ให้ A และ B เป็นเซตเปิดใน D ที่ $A \neq \phi$, $B \neq \phi$

ดังนั้น $A = U \cap D$ บางเซตเปิด U ใน X และ $B = V \cap D$

บางเซตเปิด V ใน X ทำให้ $U \neq \phi$ และ $V \neq \phi$

เนื่องจาก (X, τ_X) เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล

ดังนั้น $U \cap V \neq \phi$ และ D เดนส์ใน X จึงทำให้ $(U \cap V) \cap D \neq \phi$

นั่นคือ $(U \cap D) \cap (V \cap D) \neq \phi$

ได้ $A \cap B \neq \phi$ ทำให้ (D, τ_D) เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล

ให้ E, F เป็นเซตเรกูลาร์-ปิดใน D ที่ $E \neq \phi, F \neq \phi$

ดังนั้น $\overline{(int_D E)}_D = E$ และ $\overline{(int_D F)}_D = F$

นั่นคือ $int_D E \neq \phi, int_D F \neq \phi$

จาก (D, τ_D) เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล

ได้ $int_D E \cap int_D F \neq \phi$ นั่นคือ $E \cap F \neq \phi$

เพราะฉะนั้น (D, τ_D) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

<u>ข้อสังเกต 4.2.2</u> ปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ลไม่มีคุณสมบัติเฮริดิทารี

<u>พิสูจน์</u> ดูรายละเอียดในตัวอย่าง 3.4.5

<u>ทฤษฎี 4.2.4</u> คุณสมบัติธีต้า-เออดิวซิเบิ้ลเป็นโทโพโลจิคัลอินแวเรียนท์

<u>พิสูจน์</u> ให้ (X, τ_X) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

และ (Y, τ_Y) โฮมมิโอมอร์ฟิกกับ (X, τ_X)

จะแสดงว่า (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

จาก (X, τ_X) โฮมิโอมอร์ฟิกกับ (Y, τ_Y)

ดังนั้นมีฟังก์ชัน $f : (X, \tau_X) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$

โดย f ฟังก์ชันต่อเนื่องบน X, หนึ่ง-หนึ่ง, ทั่วถึง และ f^{-1} ต่อเนื่องบน Y

จาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน X อาศัยข้อสังเกต 3.3.1

ได้ f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X ดังนั้นเนื่องจาก f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X และ

เป็นฟังก์ชันทั่วถึง และ (X, τ_X) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

อาศัยทฤษฎี 3.6.1 ได้ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

<u>ทฤษฎี 4.2.5</u> ให้ (X, τ_X) และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่ง-หนึ่ง , เป็นฟังก์ชันเปิดและฟังก์ชั่นเปิด ถ้า (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ลแล้ว (X, τ_X) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

<u>พิสูจน์</u> สมมุติ (X, τ_X) ไม่เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

อาศัยทฤษฎี 3.3.1 ดังนั้นมีเซตเปิด U ใน X ที่ $U \neq \phi$ และ $Cl_\theta \overline{U} \neq X$

ทำให้ $X - Cl_\theta \overline{U} \neq \phi$

ให้ $a \in X - Cl_\theta \overline{U}$ นั่นคือ $a \notin Cl_\theta \overline{U}$

แสดงว่า มีเซตเปิด G ใน X ที่ $a \in G$ และ $\overline{G} \cap \overline{U} = \phi$

ดังนั้น $f(\overline{G} \cap \overline{U}) = \phi$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่ง-หนึ่ง ทำให้ $f(\overline{G} \cap \overline{U}) = f(\overline{G}) \cap f(\overline{U})$

และ f เป็นฟังก์ชันปิดได้ $\overline{f(G)} \subset f(\overline{G})$ และ $\overline{f(U)} \subset f(\overline{U})$

จาก f เป็นฟังก์ชันเปิด และ G, U เป็นเซตเปิดใน X

ทำให้ $f(G)$, $f(U)$ เป็นเซตเปิดใน Y ที่ $f(G) \neq \phi$, $f(U) \neq \phi$

อาศัยข้อสังเกต 3.1.1 ได้ $\overline{f(G)}$, $\overline{f(U)}$ เป็นเซตเรกูลาร์-ปิดใน Y

จาก $f(\overline{G} \cap \overline{U}) = f(\overline{G}) \cap f(\overline{U})$ และ $\overline{f(G)} \subset f(\overline{G})$, $\overline{f(U)} \subset f(\overline{U})$

และเนื่องจาก $f(\overline{G} \cap \overline{U}) = \phi$ ดังนั้น $\overline{f(G)} \cap \overline{f(U)} = \phi$

นั่นคือ (Y, τ_Y) ไม่เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

สรุปได้ ถ้า (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล แล้ว (X, τ_X) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

<u>ข้อสังเกต 4.2.3</u> ทฤษฎี 4.2.5 ไม่ขัดแย้งกับข้อสังเกต 4.2.2 เพราะว่าทุก ๆ อินเจคชั่นแมบปิ้ง (injection mapping) จากปริภูมิย่อยไปยังปริภูมิใหญ่ไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันเปิดเสมอไป

ต่อไปเป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็นว่าบทกลับของทฤษฎี 4.2.5 ไม่จำเป็นต้องเป็นจริง นั่นคือ $f : (X, \tau_X) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$ เป็นฟังก์ชั่นหนึ่ง-หนึ่ง , เป็นฟังก์ชั่นเปิดและฟังก์ชั่นปิด ถ้า (X, τ_X) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ลแล้ว (Y, τ_Y) ไม่จำเป็นที่จะเป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

<u>ตัวอย่าง 4.2.3</u> ให้ $X = \{a,b,c\}$ และ $Y = \{1,2,3,4\}$

และ $\tau_X = \{\phi, \{a,b\}, X\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

$\tau_Y = \{\phi , \{3\},\{4\},\{3,4\},\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},Y\}$ เป็นโทโพโลยีบน Y

ให้ $f : (X, \tau_X) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$

โดยที่ $f(a) = 1,\ f(b) = 2,\ f(c) = 3$

จากนิยามของ f เห็นได้ชัดว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่ง-หนึ่ง

จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันเปิด

ให้ U เป็นเซตเปิดใน X ดังนั้น U คือ ϕ, $\{a,b\}$ หรือ X

นั่นคือ $f(U)$ คือ ϕ, $\{1,2\}$ หรือ $\{1,2,3\}$ ตามลำดับ

จากนิยามของ τ_Y เห็นได้ชัดว่า $f(U)$ เป็นเซตเปิดใน Y

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเปิด

จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันปิด

ให้ F เป็นเซตปิดใน X ดังนั้น F คือ ϕ, $\{c\}$, หรือ X

นั่นคือ $f(F)$ เท่ากับ ϕ, $\{3\}$ หรือ $\{1,2,3\}$ ตามลำดับ

จากนิยามของ τ_Y เห็นได้ชัดว่า $f(F)$ เป็นเซตปิดใน Y

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันปิด

จะแสดงว่า (X, τ_X) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

เนื่องจากเซตเปิดใน X ที่ไม่เป็นเซตว่างได้แก่ $\{a,b\}$, X

และ $Cl_\theta\overline{\{a,b\}} = X$, $Cl_\theta\overline{X} = X$

ดังนั้น (X, τ_x) เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล

จะแสดงว่า (Y, τ_Y) ไม่เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล

เนื่องจาก $\{4\}$ เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิดใน Y

อาศัยทฤษฎี 4.1.2 (5) ได้ $Cl_\theta\overline{\{4\}} = Cl_\theta\{4\} = \{4\} \neq X$

โดยทฤษฎี 3.3.1 ทำให้ (Y, τ_Y) ไม่เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล

ต่อไปเป็นการแสดงตัวอย่างให้เห็นว่าเมื่อให้ (X, τ_x) และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $f : (X, \tau_x) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่ง–หนึ่ง ถ้า (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ลแล้ว (X, τ_x) ไม่จำเป็นต้องเป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล

<u>ตัวอย่าง 4.2.4</u> ให้ $X = Y = [0,1]$

$\tau_x = \{\phi\} \cup \{G \subset X \ / \ 0 \notin G$ หรือ $X - G$ เป็นเซตจำกัด$\}$ โทโพโลยีบน X

$\tau_Y = \{\phi\} \cup \{G \subset Y \ / \ Y - G$ เป็นเซตจำกัด$\}$ เป็นโทโพโลยีบน Y

กำหนดให้ $f : (X, \tau_x) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$

โดยที่ $f(x) = x$, $\forall x \in X$

เห็นได้ชัดว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่ง–หนึ่ง

จะแสดงว่า (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวเซิเบิ้ล

โดยตัวอย่าง 3.3.2 (2) ได้ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล

จะแสดงว่า (X, τ_x) ไม่เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล

เนื่องจาก $\{1\} \subset [0,1]$ และ $0 \notin \{1\}$ ดังนั้น $\{1\}$ เป็นเซตเปิดใน X

พิจารณา $X - (X - \{1\}) = \{1\}$ ซึ่งเป็นเซตจำกัดใน X

ดังนั้น $X - \{1\}$ เป็นเซตเปิดใน X ทำให้ $\{1\}$ เป็นเซตปิดใน X

อาศัย ทฤษฎี 4.1.2 ได้ $Cl_\theta\overline{\{1\}} = Cl_\theta\{1\} = \{1\} \neq X$

ดังนั้นโดยทฤษฎี 3.3.1 ทำให้ได้ว่า (X, τ_x) ไม่เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

ต่อไปเป็นการแสดงตัวอย่างให้เห็นว่า เมื่อให้ (X, τ_x) และ $Y, \tau_Y)$ เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยีและ $f : (X, \tau_x) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$ เป็นฟังก์ชั่นหนึ่ง-หนึ่งและเป็นฟังก์ชั่นเปิด ถ้า (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ลแล้ว (X, τ_x) ไม่จำเป็นต้องเป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

<u>ตัวอย่าง 4.2.5</u> ให้ $X = \{1,2\}$, $Y = \{a,b,c\}$

$\tau_x = \{\phi, \{1\},\{2\}, X\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

$\tau_Y = \{\phi, \{a,\},\{b\},\{a,b\}, Y\}$ เป็นโทโพโลยีบน Y

กำหนดให้ $f : (X, \tau_x) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$ โดยที่ $f(1) = a$, $f(2) = b$

เห็นได้ชัดว่า f เป็นฟังก์ชั่น หนึ่ง-หนึ่ง

จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันเปิด

ให้ U เป็นเซตเปิดใน X ดังนั้น U คือ ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$, หรือ X

ได้ f(U) คือ ϕ, $\{a\}$, $\{b\}$ หรือ $\{a,b\}$ ตามลำดับ

จากนิยามของ τ_Y ได้ f(U) เป็นเซตเปิดใน Y

จะแสดงว่า (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

โดยตัวอย่าง 3.3.2 ข้อ (1) ได้ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

จะแสดงว่า (X, τ_x) ไม่เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

เนื่องจาก $\{a\}$ เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิดใน X

อาศัยทฤษฎี 4.1.2 (5) ได้ $Cl_\theta\overline{\{1\}} = Cl_\theta\{1\} = \{1\} \neq X$

โดยทฤษฎี 3.3.1 ทำให้ (X, τ_x) ไม่เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

ต่อไปเป็นการแสดงตัวอย่างให้เห็นว่า เมื่อให้ (X, τ_x) และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $f : (X, \tau_x) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$ เป็นฟังก์ชั่นหนึ่ง-หนึ่ง และ เป็นฟังก์ชั่นเปิด ถ้า (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ลแล้ว (X, τ_x) ไม่จำเป็นต้องเป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

<u>ตัวอย่าง 4.2.6</u> ให้ $X = \{1,2\}$, $Y = \{a,b,c\}$

$\tau_x = \{\phi, \{1\},\{2\},X\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

$\tau_Y) = \{\phi, \{c\},\{a,c\},\{b,c\},Y\}$ เป็นโทโพโลยีบน Y

กำหนดให้ $f :(X, \tau_x) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$ โดยที่ $f(1) = a$, $f(2) = b$

เห็นได้ชัดว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่ง-หนึ่ง

จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันปิด

ให้ F เป็นเซตปิดใน X ดังนั้น F คือ ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$ หรือ X

ได้ $f(F)$ คือ ϕ, $\{a\},\{b\}$ หรือ $\{a,b\}$ ตามลำดับ

เห็นได้ชัดว่า $f(F)$ เป็นเซตปิดใน Y

จะแสดงว่า (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

ให้ G เป็นเซตเปิดใน Y ที่ $G \neq \phi$

ดังนั้น G คือ $\{c\}$, $\{a,c\},\{b,c\}$ หรือ Y

เนื่องจาก $\overline{\{c\}} = Y$ ดังนั้น $\bar{G} = Y$ แต่ $\bar{G} \subset Cl_\theta G$ และ $Cl_\theta \bar{G} \subset Y$

นั่นคือ $Cl_\theta \bar{G} = Y$ โดยทฤษฎี 3.3.1 ได้ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

จากตัวอย่างที่ 4.2.5 (X, τ_x) ไม่เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

<u>ทฤษฎีนำ 4.2.2</u> ให้ (X, τ_x) และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

กำหนดให้ $f : (X, \tau_x) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$ ถ้า f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X แล้ว

$Cl_\theta f^{-1}(B) \subset f^{-1}(Cl_\theta B)$ สำหรับแต่ละ $B \subset Y$

<u>พิสูจน์</u> ให้ f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X และ $B \subset Y$

ดังนั้น $f^{-1}(B) \subset X$ อาศัยทฤษฎีนำ 3.6.1

ได้ $f(Cl_\theta f^{-1}(B)) \subset Cl_\theta f(f^{-1}(B))$

ดังนั้น $f(Cl_\theta f^{-1}(B)) \subset Cl_\theta B$

ทำให้ได้ $f^{-1}(f(Cl_\theta f^{-1}(B))) \subset f^{-1}(Cl_\theta B)$

แต่ $Cl_\theta(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(f(Cl_\theta f^{-1}(B)))$

ดังนั้น $Cl_\theta(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(Cl_\theta B)$

<u>ทฤษฎี 4.2.6</u> ให้ (X, τ_x) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

จะได้ว่า (X, τ_x) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ลก็ต่อเมื่อ (X, τ_x) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีดแบบธีต้าและสำหรับแต่ละฟังก์ชั่นต่อเนื่องค่าจริงบน X จะเป็นฟังก์ชั่นคงที่

<u>พิสูจน์</u> (===>) ให้ (X, τ_x) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

โดยทฤษฎี 3.4.1 ได้ (X, τ_x) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีดแบบธีต้า

ต่อไปจะแสดงว่า สำหรับแต่ละฟังก์ชั่นต่อเนื่องค่าจริงบน X จะเป็นฟังก์ชั่นคงที่

สมมุติ $f : (X, \tau_x) \longrightarrow (R, \tau_u)$ เป็นฟังก์ชั่นต่อเนื่องบน X ที่ f ไม่เป็นฟังก์ชันคงที่ โดยข้อสังเกต 3.5.1 ได้ f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

จาก f ไม่เป็นฟังก์ชั่นคงที่ แสดงว่า มี $x, y \in X$ ที่ $f(x) \neq f(y)$

เนื่องจาก (R, τ_u) เป็นปริภูมิ T_2

ดังนั้น มีเซตเปิด G_1, G_2 ใน R ที่ $f(x) \in G_1$, $f(y) \in G_2$

และ $G_1 \cap G_2 = \phi$ นั่นคือได้ $G_1 \subset R - G_2$ และ $R - G_2$ เป็นเซตปิดใน R

ทำให้ $\bar{G}_1 \subset R - G_2$

จาก f เป็นฟังก์ชั่นต่อเนื่องบน X

แสดงว่า มีเซตเปิด U_1 ใน X ที่ $x \in U_1$ และ $f(U_1) \subset G_1$

ดังนั้น $U_1 \subset f^{-1}(G_1)$

เนื่องจาก f ต่อเนื่องบน X ทำให้ $\overline{f^{-1}(G_1)} \subset f^{-1}(\bar{G}_1)$

จึงได้ $\bar{U}_1 \subset f^{-1}(\bar{G}_1)$ ดังนั้น $Cl_\theta \bar{U}_1 \subset Cl_\theta f^{-1}(\bar{G}_1)$

จาก f เป็นฟังก์ชั่นต่อเนื่องแบบธีต้าบน X และอาศัยทฤษฎีนำ 4.2.2

ได้ $Cl_\theta f^{-1}(\bar{G}_1) \subset f^{-1}(Cl_\theta \bar{G}_1)$

ดังนั้น $Cl_\theta \bar{U}_1 \subset f^{-1}(Cl_\theta \bar{G}_1)$

จาก τ_U เป็นยูชวลโทโพโลยีบน R และอาศัยทฤษฎี 4.1.3 (2)

ได้ $Cl_\theta \bar{G}_1 = \bar{\bar{G}}_1 = \bar{G}_1$ ดังนั้น $Cl_\theta \bar{U} \subset f^{-1}(\bar{G}_1)$

แต่ $\bar{G}_1 \subset R - G_2$ จึงได้ $Cl_\theta \bar{U} \subset f^{-1}(R - G_2) = f^{-1}(R) - f^{-1}(G_2)$

$$= X - f^{-1}(G_2) \subset X - \{y\}$$

ดังนั้น $Cl_\theta \bar{U} \neq X$ อาศัยทฤษฎี 3.3.1

ทำให้เกิดการขัดแย้งกับ (X, τ_x) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิววิเบิ้ล

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชั่นคงที่

(<==) สมมุติ (X, τ_x) ไม่เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

อาศัยทฤษฎี 3.3.1 มีเซตเปิด U ใน X ที่ $U \neq \phi$ แต่ $Cl_\theta \bar{U} \neq X$

ดังนั้น $X - Cl_\theta \bar{U} \neq \phi$

จาก (X, τ_x) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีดแบบธีต้า

ดังนั้น $Cl_\theta \bar{U}$ เป็นเซตเปิดใน X แต่ $X - Cl_\theta \bar{U}$ เป็นเซตเปิดใน X

ให้ $f : (X, \tau_x) \longrightarrow (R, \tau_U)$

โดย

$$f(x) = \begin{cases} 0 , & x \in Cl_\theta \bar{U} \\ 1 , & x \in X - Cl_\theta \bar{U} \end{cases}$$

ให้ G เป็นเซตเปิดใน R จะเห็นได้ชัดว่า $f^{-1}(G)$ เป็นเซตเปิดใน X

ดังนั้น f ต่อเนื่องบน X ทำให้เกิดการขัดแย้งกับสิ่งที่กำหนดให้ว่า แต่ละฟังก์ชั่นต่อเนื่องค่าจริงบน X เป็นฟังก์ชั่นคงที่

ดังนั้น (X, τ_x) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

4.3 <u>ความสัมพันธ์ระหว่างปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ลกับปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ลและความสัมพันธ์ระหว่างปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ลกับปริภูมิไม่ขาดตอนและปริภูมิขาดตอนสุดขีด</u>

<u>ทฤษฎี 4.3.1</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี ถ้า (X, τ) เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ลแล้ว (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

<u>พิสูจน์</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล และ U เป็นเซตเปิดใน X ที่ $U \neq \phi$

จะแสดงว่า $Cl_\theta \bar{U} = X$

ให้ $a \in X$ และเซตเปิด G ใน X ที่ $a \in G$

เนื่องจาก (X, τ) เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล

ดังนั้น $G \cap U \neq \phi$ และ $G \subset \bar{G}$, $U \subset \bar{U}$

นั่นคือ $\bar{G} \cap \bar{U} \neq \phi$ ได้ $a \in Cl_\theta \bar{U}$

เพราะฉะนั้น $X \subset Cl_\theta \bar{U}$

แต่ $Cl_\theta \bar{U} \subset X$ ดังนั้น $Cl_\theta \bar{U} = X$

โดยทฤษฎี 3.3.1 ได้ (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

ต่อไปเป็นตัวอย่างที่แสดงว่าบทกลับของทฤษฎี 4.2.1 ไม่จำเป็นต้องจริง นั่นคือ ถ้า (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ลไม่จำเป็นที่ (X, τ) เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล

<u>ตัวอย่าง 4.3.1</u> 1. $X = \{a,b,c\}$

และ $\tau = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

จากตัวอย่าง 3.3.2 ข้อ 1 ได้ (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

เนื่องจากมีเซตเปิด $\{a\}$ และ $\{b\}$ ใน X ที่ $\{a\} \cap \{b\} = \phi$

ดังนั้น (X, τ) ไม่เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล

2. ให้ $X = R$ และ $\tau = \{\phi, (-\infty,0), (0,\infty), (-\infty,0) \cup (0,\infty), X\}$ เป็นโทโพโลยีบน R

จะแสดงว่า (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

ให้ U เป็นเซตเปิดใน X ที่ $U \neq \phi$ จะแสดงว่า $Cl_\theta \bar{U} = X$

นั่นคือ U เท่ากับ $(-\infty,0), (0,\infty), (-\infty,0) \cup (0,\infty)$ หรือ X

ดังนั้น $\bar{U}$ เท่ากับ $(-\infty,0], [0,\infty)$, หรือ X ตามลำดับ

พิจารณาเมื่อ $\bar{U} = (-\infty,0]$ จะแสดงว่า $Cl_\theta \bar{U} = X$

นั่นคือจะแสดงว่า $Cl_\theta (-\infty,0] = X$

ให้ $a \in X$

<u>กรณี 1</u> ถ้า $a \in (-\infty,0]$ ทำให้ $a \in Cl_\theta (-\infty,0]$ ด้วย

<u>กรณี 2</u> ถ้า $a \in (0,\infty)$ ดังนั้นเซตเปิดใน X ที่บรรจุ a คือ $(0,\infty)$ หรือ $(-\infty,0) \cup (0,\infty)$ หรือ X โดย $\overline{(0,\infty)} \cap (-\infty,0] = \{0\} \neq \phi$

และ $\overline{(-\infty,0) \cup (0,\infty)} \cap (-\infty,0] = (-\infty,0] \neq \phi$

และ $\bar{X} \cap (-\infty,0] \neq \phi$ นั่นคือ $a \in Cl_\theta (-\infty,0]$

จากทั้ง 2 กรณี ได้ $X \subset Cl_\theta (-\infty,0]$ แต่ $Cl_\theta (-\infty,0] \subset X$

ดังนั้น $Cl_\theta (-\infty,0] = X$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกัน ได้ $Cl_\theta \overline{(0,\infty)} = X$ และ $Cl_\theta \bar{X} = X$

นั่นคือ $Cl_\theta \bar{U} = X$

โดยทฤษฎี 3.3.1 ได้ (R, τ) เป็นปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

จะแสดงว่า (R, τ) ไม่เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล

เนื่องจาก $(-\infty,0)$ และ $(0,\infty)$ เป็นเซตเปิดและ $(-\infty,0) \cap (0,\infty) = \phi$

ดังนั้น (R, τ) ไม่เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล

อย่างไรก็ตามบทกลับของทฤษฎี 4.2.1 จะเป็นจริงถ้าเพิ่มเงื่อนไขว่า (X, τ) เป็นปริภูมิเรกูลาร์

<u>ทฤษฎีนำ 4.3.1</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเรกูลาร์ และ $x \in X$

ถ้า G เป็นเซตเปิดใน X ที่ $x \in G$ แล้ว จะมี เซตเปิด U ใน X ที่ $x \in U$ ซึ่ง $\bar{U} \subset G$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $x \in X$ และเซตเปิด G ใน X ที่ $x \in G$

ดังนั้น $x \notin X - G$ เนื่องจาก $X - G$ เป็นเซตปิดและ (X, τ) เป็นปริภูมิเรกูลาร์

ดังนั้น มีเซตเปิด U และ U_1 ใน X ที่ $x \in U$ และ $X - G \subset U_1$

โดย $U \cap U_1 = \phi$

จาก $X - G \subset U_1$ ได้ $X - U_1 \subset G$

จาก $U \cap U_1 = \phi$ ได้ $U \subset X - U_1$

เนื่องจาก $X - U_1$ เป็นเซตปิด ได้ $\bar{U} \subset X - U_1$ ดังนั้น $\bar{U} \subset G$

<u>ทฤษฎี 4.3.2</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเรกูลาร์ จะได้ (X, τ) เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ลก็ต่อเมื่อ (X, τ) เป็นปริภูมิซีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

<u>พิสูจน์</u> (==>) พิสูจน์โดยอาศัยทฤษฎี 4.3.1

(<==) ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเรกูลาร์ และเซตเปิด G_1, G_2 ใน X ที่ $G_1 \neq \phi$, $G_2 \neq \phi$

ให้ $x \in G_1$ และ $y \in G_2$

โดยทฤษฎีนำ 4.3.1 มีเซตเปิด U_1, U_2 ใน X ที่ $x \in U_1$, $y \in U_2$

และ $\bar{U}_1 \subset G_1$, $\bar{U}_2 \subset G_2$

เนื่องจาก U_1, U_2 เป็นเซตเปิด

ดังนั้นโดยข้อสังเกต 3.1.1 ข้อ 4 ได้ $\bar{U}_1$, $\bar{U}_2$ เปนเซตเกูลาร์-ปิด

จาก $U_1 \neq \phi$, $U_2 \neq \phi$ ได้ $\bar{U}_1 \neq \phi$, $\bar{U} \neq \phi$

เนื่องจาก (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล ทำให้ได้ว่า $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 \neq \phi$
เพราะฉะนั้น $G_1 \cap G_2 = \phi$ นั่นคือ (X, τ) เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล

<u>ทฤษฎี 4.3.3</u> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

1. ถ้า (X, τ) เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ลที่ X มีสมาชิกมากกว่าหนึ่ง แล้ว (X, τ) ไม่เป็นปริภูมิ T_2
2. (X, τ) เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ลก็ต่อเมื่อ (X, τ) เป็นปริภูมิไม่ขาดตอนและเป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีด

<u>พิสูจน์</u> 1. สมมุติ (X, τ) เป็นปริภูมิ T_2 เนื่องจาก X มีสมาชิกที่แตกต่างกัน
ให้ $x,y \in X$ ที่ $x \neq y$ ดังนั้น มีเซตเปิด U_1, U_2 ใน X ที่ $x \in U_1$, $y \in U_2$
และ $U_1 \cap U_2 = \phi$ เกิดการขัดแย้งกับที่ (X, τ) เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล
ดังนั้น (X, τ) ไม่เป็นปริภูมิ T_2

2. (===>) เนื่องจาก (X, τ) เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล โดยทฤษฎี 4.3.1
ทำให้ (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล
โดยทฤษฎี 3.4.1 ได้ (X, τ) เป็นปริภูมิไม่ขาดตอน
ต่อไปจะแสดงว่า (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีด
สมมุติ (X, τ) ไม่เป็นปริภูมิ ขาดตอนสุดขีด
นั่นคือ มีเซตเปิด U ใน X ที่ $\bar{U}$ ไม่เป็นเซตเปิดใน X
ดังนั้น $\bar{U} \neq \phi$ และ $\bar{U} \neq X$ ทำให้ $X - \bar{U} \neq \phi$
เนื่องจาก U, $X - \bar{U}$ เป็นเซตเปิดใน X ที่ $U \neq \phi$ และ $X - \bar{U} \neq \phi$
แต่ $U \cap (X-\bar{U}) \subset U \cap (X-U) = \phi$ นั่นคือ $U \cap (x-\bar{U}) = \phi$
ทำให้เกิดการขัดแย้งกับ (X, τ) เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล
ดังนั้น (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีด
(<==) ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิไม่ขาดตอนและเป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีด

สมมุติ (X, τ) ไม่เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล

แสดงว่า มีเซตเปิด G_1, G_2 ใน X ที่ $G_1 \neq \phi$, $G_2 \neq \phi$ และ $G_1 \cap G_2 = \phi$

ดังนั้น $G_1 \subset X - G_2$ เนื่องจาก $X - G_2$ เป็นเซตปิด ดังนั้น $\bar{G}_1 \subset X - G_2$

นั่นคือ $G_2 \subset X - \bar{G}_1$ และ $X - \bar{G}_1 \neq \phi$

เนื่องจาก (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีดได้ $\bar{G}_1$ เป็นเซตเปิดใน X

จะเห็นได้ว่า มีเซตเปิด $\bar{G}_1$, $X-\bar{G}_1$ ใน X ที่ $\bar{G}_1 \neq \phi$, $X-\bar{G}_1 \neq \phi$

โดยที่ $\bar{G}_1 \cap (X-\bar{G}_1) = \phi$ และ $\bar{G}_1 \cup (X-\bar{G}_1) = X$

ทำให้เกิดการขัดแย้งกับ (X, τ) เป็นปริภูมิไม่ขาดตอน

เพราะฉะนั้น (X, τ) เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล

<u>ตัวอย่าง 4.3.2</u> (แสดงว่ามี (X, τ) เป็นปริภูมิไม่ขาดตอนแต่ (X, τ) ไม่เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล)

1. ให้ $X = \{a,b,c\}$ และ $\tau = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

   เห็นได้ชัดว่า (X, τ) เป็นปริภูมิไม่ขาดตอน

   และโดยตัวอย่าง 4.3.1 ข้อ 1 ได้ (X, τ) ไม่เป็นปริภูมิ เออริดิวซิเบิ้ล

2. ให้ τ เป็นยูชวลโทโพโลยีบน R

   โดยตัวอย่าง 2.6.1 ข้อ 1 ได้ว่า (R, τ) เป็นปริภูมิไม่ขาดตอน

   เนื่องจากมีเซตเปิด $(0,1)$, $(1,2)$ ใน R ที่ $(0,1) \cap (1,2) = \phi$

   ดังนั้น (R, τ) ไม่เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล

<u>ตัวอย่าง 4.3.3</u> (แสดงว่ามี (X, τ) ที่เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีดแต่ (X, τ) ไม่เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล)

1. ให้ X มีสมาชิกที่แตกต่างกันมากกว่า 1 และ $\tau = P(X)$ เป็นโทโพโลยีบน X

   จะแสดงว่า (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีด

   เนื่องจาก $\tau = P(X)$ ให้ U เป็นเซตเปิดใน X ดังนั้น $U \subset X$

เนื่องจาก $\bar{U} \subset X$ ดังนั้น $\bar{U}$ เป็นเซตเปิดใน

นั่นคือ (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีด

จะแสดงว่า (X, τ) ไม่เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล

เนื่องจาก X มี สมาชิกที่แตกต่างกันมากกว่า 1

ให้ $x,y \in X$ ซึ่ง $x \neq y$ ดังนั้น $\{x\} \subset X$ และ $\{y\} \subset X$

นั่นคือ $\{x\}$, $\{y\}$ เป็นเซตเปิดใน X และ $\{x\} \cap \{y\} = \phi$

เพราะฉะนั้น (X, τ) ไม่เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล

2. ให้ $X = \{a,b,c\}$ และ $\tau = \{\phi, \{a\}, \{b,c\}, X\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

จะแสดงว่า (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีด

ให้ U เป็นเซตเปิดใน X ดังนั้น U คือ $\phi, \{a\}, \{b,c\}, X$

นั่นคือ $\bar{U}$ คือ $\phi, \{a\}, \{b,c\}, X$ ตามลำดับ

จะเห็นได้ว่า $\bar{U}$ เป็นเซตเปิดใน X ดังนั้น (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีด

จะแสดงว่า (X, τ) ไม่เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล

เนื่องจาก $\{a\}, \{b,c\}$ เป็นเซตเปิดใน X ที่ $\{a\} \cap \{b,c\} = \phi$

ดังนั้น (X, τ) ไม่เป็นปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล

จากทฤษฎี 2.6.2 ได้ผลสรุป $\bar{U} \cap \bar{V} = \phi$ ถ้าคงเงื่อนไขในทฤษฎีไว้ ผลสรุป $Cl_\theta \bar{U} \cap Cl_\theta \bar{V} = \phi$ ก็ยังเป็นจริง ดังทฤษฎี 4.3.4 ข้อ 2 ต่อไปนี้

<ins>ทฤษฎี 4.3.4</ins> ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

1. ถ้า (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีดแล้ว (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีดแบบธีต้า
2. (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีดก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละเซตเปิด U, V ใน X ที่ $U \cap V = \phi$ แล้ว $Cl_\theta \bar{U} \cap Cl_\theta \bar{V} = \phi$

<u>พิสูจน์</u> 1. ให้ U เป็นเซตเปิดใน X จะแสดงว่า $Cl_\theta \bar{U}$ เป็นเซตเปิดใน X

เนื่องจาก (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีด ทำให้ได้ $\bar{U}$ เป็นเซตเปิดใน X

โดยทฤษฎี 4.1.2 ข้อ 3 ได้ $Cl_\theta \bar{U} = \bar{\bar{U}}$

แต่ $\bar{\bar{U}} = \bar{U}$ ดังนั้น $Cl_\theta \bar{U} = \bar{U}$

เพราะฉะนั้น $Cl_\theta \bar{U}$ เป็นเซตเปิดใน X

จึงได้ว่า (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีดแบบธีต้า

2. (==>) ให้ U, V เป็นเซตเปิดใน X ที่ $U \cap V = \phi$

ดังนั้นได้ $U \subset X - V$

เนื่องจาก $X - V$ เป็นเซตปิดใน X

นั่นคือได้ $\bar{U} \subset X - V$ ทำให้ได้ $V \subset X - \bar{U}$

เนื่องจาก (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีด และ U เป็นเซตเปิดใน X

ดังนั้น $\bar{U}$ เป็นเซตเปิดใน X ทำให้ $X - \bar{U}$ เป็นเซตปิดใน X

นั่นคือ $\bar{V} \subset X - \bar{U}$ ดังนั้น $\bar{U} \cap \bar{V} = \phi$

เนื่องจาก $\bar{U}, \bar{V}$ เป็นเซตเปิดใน X และ อาศัยทฤษฎี 4.1.2 ข้อ 3

ได้ $Cl_\theta \bar{U} = \bar{\bar{U}} = \bar{U}$ และ $Cl_\theta \bar{V} = \bar{\bar{V}} = \bar{V}$

ดังนั้น $Cl_\theta \bar{U} \cap Cl_\theta \bar{V} = \phi$

(<===) ให้ U เป็นเซตเปิดใน X จะแสดงว่า $\bar{U}$ เป็นเซตเปิดใน X

เนื่องจาก $X - \bar{U}$ เป็นเซตเปิดใน X และ $\bar{U} \cap (X - \bar{U}) = \phi$

จากสิ่งกำหนดให้ได้ $Cl_\theta \bar{U}\ Cl_\theta (X - \bar{U}) = \phi$

ให้ $x \in \bar{U}$ ดังนั้น $x \in Cl_\theta \bar{U}$ จะได้ว่า $x \notin Cl_\theta (X - \bar{U})$

จะมีเซตเปิด V ใน X ที่ $x \in V$ และ $\bar{V} \cap (X - \bar{U}) = \phi$

ได้ $V \cap (X - \bar{U}) = \phi$ นั่นคือ $V \subset \bar{U}$ เพราะฉะนั้น $\bar{U}$ เป็นเซตเปิดใน X

ดังนั้น (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีด

<u>ตัวอย่าง 4.3.4</u> (แสดงว่า (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีดแบบธีต้าไม่เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีด)

1. ให้ $X = \{a,b,c\}$

และ $\tau = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

โดยตัวอย่าง 3.3.2 ข้อ 1 ได้ (X, τ) เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล

และโดยทฤษฎี 3.4.1 ข้อ 2 ได้ (X, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีดแบบธีต้า

เนื่องจาก $\{a\}$ เป็นเซตเปิดใน X ที่ $\overline{\{a\}} = \{a,c\}$

แต่ $\{a, c\}$ ไม่เป็นเซตเปิดใน X ดังนั้น (X, τ) ไม่เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีด

2. ให้ $X = R$

และ $\tau = \{\phi, (-\infty,0), (0,\infty), (-\infty,0) \cup (0,\infty), X\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

โดยตัวอย่างที่ 4.3.1 ข้อ 2 ได้ (R, τ) เป็นปริภูมิธีต้า–เออริดิวซิเบิ้ล

ดังนั้นได้ (R, τ) เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีดแบบธีต้า

เนื่องจาก $(-\infty, 0)$ เป็นเซตเปิดใน X แต่ $\overline{(-\infty, 0)} = (-\infty, 0]$ ไม่เป็นเซตเปิดใน X

ดังนั้น (R, τ) ไม่เป็นปริภูมิขาดตอนสุดขีด

4.4 <u>เงื่อนไขที่ทำให้ฟังก์ชันมีความต่อเนื่องแบบธีต้า</u>

จากสิ่งกำหนดให้ในทฤษฎี 2.4.1 จะทำให้ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1) f ต่อเนื่องบน X

2) $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ สำหรับแต่ละ $A \subset X$

3) $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$ สำหรับแต่ละ $B \subset Y$

ผลสรุปดังกล่าวยังคงเป็นจริงเมื่อแทนที่ f ต่อเนื่องบน X ด้วย f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X และโคลส์เชอร์สับเซตด้วยธีต้า–โคลส์เชอร์สับเซต ดังทฤษฎี 4.4.1 ต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 4.4.1</u> ให้ (X, τ_X) และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1) f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X
2) สำหรับแต่ละ $x \in X$ และเซตเรกูลาร์-เปิด V ใน Y ที่ $f(x) \in V$ จะมีเซตเรกูลาร์-เปิด U ใน X ที่ $x \in U$ และ $f(\bar{U}) \subset \bar{V}$
3) $f(Cl_\theta(A)) \subset Cl_\theta(f(A))$ สำหรับแต่ละ $A \subset X$
4) $Cl_\theta(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(Cl_\theta(B))$ สำหรับแต่ละ $B \subset Y$

<u>พิสูจน์</u> 1) ===> 2) ให้ $x \in X$ และเซตเรกูลาร์-เปิด V ใน Y ที่ $f(x) \in V$ ดังนั้น V เป็นเซตเปิดใน Y จาก 1. จะมีเซตเปิด G ใน X ที่ $x \in G$ และ $f(\bar{G}) \subset \bar{V}$

เนื่องจาก $\bar{G}$ เป็นเซตปิดใน X โดยทฤษฎี 4.1.1 ข้อ 1 ได้ $\operatorname{int} \bar{G}$ เป็นเซตเรกูลาร์เปิดใน X และ $G = \operatorname{int} G \subset \operatorname{int} \bar{G}$ ดังนั้น $X \in \operatorname{int} \bar{G}$

เนื่องจาก G เป็นเซตเปิดใน X จากข้อสังเกต 3.1.1 ข้อ 4 ได้ $\bar{G}$ เป็นเซตเรกูลาร์-ปิด ดังนั้น $\overline{\operatorname{int} \bar{G}} = \bar{G}$

ให้ $U = \operatorname{int} \bar{G}$ เพราะฉะนั้นมีเซตเรกูลาร์-เปิด U ใน X ที่ $x \in U$ และ $f(\bar{U}) \subset \bar{V}$

2) ===> 3) ให้ $A \subset X$ และ $y \in f(Cl_\theta A)$ ดังนั้นมี $x \in Cl_\theta A$ ที่ $f(x) = y$ ให้เซตเปิด V ใน Y ที่ $y \in V$ โดยข้อสังเกต 3.1.1 ข้อ 4 ได้ $\bar{V}$ เป็นเซตเรกูลาร์-ปิดใน Y นั่นคือ $\overline{\operatorname{int} \bar{V}} = \bar{V}$ และโดยทฤษฎี 4.1 ข้อ 1 ได้ $\operatorname{int} \bar{V}$ เป็นเซตเรกูลาร์-เปิดใน Y จาก $V = \operatorname{int} V \subset \operatorname{int} \bar{V}$ ได้ $y = f(x) \in \operatorname{int} \bar{V}$

จาก 2. จะมีเซตเรกูลาร์-เปิด U ใน X ที่ $x \in U$ และ $f(\bar{U}) \subset \overline{\operatorname{int} \bar{V}}$ ดังนั้น $f(\bar{U}) \subset \bar{V}$ จาก $x \in Cl_\theta A$ ได้ $\bar{U} \cap A \neq \phi$ ทำให้ $f(\bar{U}) \cap f(A) \neq \phi$ เพราะฉะนั้น $\bar{V} \cap f(A) \neq \phi$

นั่นคือ $y \in Cl_\theta f(A)$ สรุปได้ว่า $f(Cl_\theta(A)) \subset Cl_\theta f(A)$

3) ===> 4) ดูการพิสูจน์ในทฤษฎีนำ 4.2.2

4) ==> 1 ให้ $x \in X$ และ V เป็นเซตเปิดใน Y ที่ $f(x) \in V$

ได้ $x \in f^{-1}(V)$ ทำให้ $x \notin X - f^{-1}(V) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(V)$

$= f^{-1}(Y - V)$

ดังนั้น $x \notin f^{-1}(Y - V)$ เนื่องจาก $Y - \bar{V} \subset Y - V$ และ $Y - V$ เป็นเซตปิดใน Y

ทำให้ได้ $\overline{Y - \bar{V}} \subset Y - V$ เนื่องจาก $Y - \bar{V}$ เป็นเซตเปิดใน Y อาศัยทฤษฎี 4.1.2

ได้ $Cl_\theta(Y - \bar{V}) = \overline{Y - \bar{V}}$ ดังนั้น $x \notin f^{-1}(Cl_\theta(Y - \bar{V}))$

จากข้อ 4 ได้ $Cl_\theta f^{-1}(Y - \bar{V}) \subset f^{-1}(Cl_\theta(Y-\bar{V}))$

นั่นคือ $x \notin Cl_\theta f^{-1}(Y - \bar{V})$ แสดงว่า มี U เป็นเซตเปิดใน X ที่ $x \in U$

และ $\phi = \bar{U} \cap f^{-1}(Y - \bar{V}) = \bar{U} \cap (f^{-1}(Y) - f^{-1}(\bar{V}))$

$= \bar{U} \cap (X - f^{-1}(\bar{V}))$

ดังนั้น $\bar{U} \subset f^{-1}(\bar{V})$ นั่นคือ $f(\bar{U}) \subset \bar{V}$

แสดงว่า f ต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด x เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

<u>ทฤษฎี 4.4.2</u> ให้ (X, τ_X) และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ ถ้า $f^{-1}(Cl_\theta V)$ เป็นเซตปิดใน X สำหรับแต่ละเซตเปิด V ใน Y แล้ว f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

<u>พิสูจน์</u> โดยอาศัยทฤษฎี 4.4.1 ข้อ 4

ให้ $B \subset Y$ จะแสดงว่า $Cl_\theta f^{-1}(B) \subset f^{-1}(Cl_\theta B)$

ถ้า $x \notin f^{-1}(Cl_\theta B)$ ดังนั้น $f(x) \notin Cl_\theta B$

จะมีเซตเปิด V ใน Y ที่ $f(x) \in V$ และ $\bar{V} \cap B = \phi$

ดังนั้น $f^{-1}(\bar{V}) \cap f^{-1}(B) = \phi$ จาก $f(x) \in V$ ได้ $x \in f^{-1}(V)$

นั่นคือ $x \notin f^{-1}(Y - V)$ เนื่องจาก $Y - \bar{V} \subset Y - V$ และ $Y - V$ เป็นเซตปิด

เพราะฉะนั้น $\overline{Y - \bar{V}} \subset Y - V$ เนื่องจาก $Y - \bar{V}$ เป็นเซตเปิดใน Y

โดยทฤษฎี 4.1.2 ข้อ 3 ได้ $Cl_\theta(Y - \bar{V}) = \overline{Y - \bar{V}}$

ดังนั้น $x \notin f^{-1}(Cl_\theta(Y - \bar{V}))$ จากสิ่งกำหนดให้ ได้ $f^{-1}(Cl_\theta(Y - \bar{V})$ เป็นเซตปิด

เนื่องจาก $f^{-1}(Y - \bar{V}) \subset f^{-1}(Cl_\theta(Y - \bar{V}))$

ดังนั้น $\overline{f^{-1}(Y - \bar{V})} \subset f^{-1}(Cl_\theta(Y - \bar{V}))$ เพราะฉะนั้น $x \notin \overline{f^{-1}(Y - \bar{V})}$

จะมีเซตเปิด U ใน X ที่ $x \in U$ และ $U \cap f^{-1}(Y - \bar{V}) = \phi$

ได้ $U \subset f^{-1}(\bar{V}) = f^{-1}(Cl_\theta V)$ จากสิ่งกำหนดให้ได้ $f^{-1}(Cl_\theta V)$ เป็นเซตปิด

ดังนั้น $\bar{U} \subset f^{-1}(Cl_\theta V)$ นั่นคือ $\bar{U} \subset f^{-1}(\bar{V})$

ดังนั้น $\bar{U} \cap f^{-1}(B) = \phi$ แสดงว่า $x \notin Cl_\theta f^{-1}(B)$

เพราะฉะนั้น $Cl_\theta f^{-1}(B) \subset f^{-1}(Cl_\theta B)$

สรุปได้ว่า f ต่อเนื่องแบบซีต้าบน X

ต่อไปเป็นตัวอย่างของฟังก์ชัน f ที่ไม่ต่อเนื่อง และ f สอดคล้องเงื่อนไขในทฤษฎี 4.4.2

<u>ตัวอย่าง 4.4.1</u> ให้ $X = R$, $\tau_X = \{\phi\} \cup \{G \subset X \mid X - G$ เป็นเซตนับได้$\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

ให้ $Y = \{1, 2, 3\}$, $\tau_Y = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, Y\}$ เป็นโทโพโลยีบน Y

กำหนดให้ $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$

$$\text{โดยที่ } f(x) = \begin{cases} 2 & , x \in Q \\ 3 & , x \in R - Q \end{cases}$$

จะแสดงว่า สำหรับแต่ละเซตเปิด V ใน Y

ทำให้ได้ $f^{-1}(Cl_\theta V)$ เป็นเซตปิดใน X

ให้ V เป็นเซตเปิดใน Y ดังนั้น V คือ ϕ , {1}, {2}, {2,3}, {1,2}

หรือ Y แต่ $Cl_\theta V = \bar{V}$ นั่นคือ $Cl_\theta V$ มีค่าเป็น ϕ, {1}, {2,3} หรือ Y

ดังนั้น $f^{-1}(Cl_\theta V)$ มีค่าเป็น $f^{-1}(\phi)$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{2,3\})$ หรือ

$f^{-1}(Y)$ ซึ่ง $f^{-1}(\phi) = \phi$, $f^{-1}(\{1\}) = \phi$, $f^{-1}(\{2,3\}) = X$, $f^{-1}(Y) = X$

นั่นคือ เห็นได้ชัดว่า $f^{-1}(Cl_\theta V)$ เป็นเซตปิดใน X

จะแสดงว่า f ต่อเนื่องแบบธีต้า บน X

ให้ $x \in X$ และเซตเปิด V ใน X ที่ $f(x) \in V$

<u>กรณี</u> $x \in Q$ ทำให้ $f(x) = 2$

ดังนั้น V คือ {2}, {1,2}, {2,3} หรือ Y

นั่นคือ ได้ $\bar{V}$ คือ {2,3} หรือ Y มีเซตเปิด X ใน X ที่ $x \in X$

และ $f(\bar{X}) = f(X) = \{2,3\} \subset \bar{V}$

<u>กรณี</u> $x \in R - Q$ ทำให้ $f(x) = 3$ ดังนั้น V คือ {2,3} หรือ Y

นั่นคือ ได้ $\bar{V} = \{2,3\}$ หรือ Y มีเซตเปิด R - Q ใน X ที่

$x \in R - Q$ และ $f(\overline{R - Q}) \subset f(\bar{X}) = f(X) = \{2,3\} \subset \bar{V}$

เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องแบบธีต้า บน X

จะแสดงว่า f ไม่ต่อเนื่องบน X

เนื่องจาก มีเซตเปิด {2} ใน Y ที่ $f^{-1}(\{2\}) = Q$ แต่ R - Q

เป็นเซตนับไม่ได้ ดังนั้น Q ไม่เป็นเซตเปิดใน X

ทำให้ $f^{-1}(\{2\})$ ไม่เป็นเซตเปิดใน X นั่นคือ f ไม่ต่อเนื่องบน X

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็นว่าบทกลับของทฤษฎี 4.4.2 ไม่จำเป็นต้องจริง นั่นคือ ถ้า f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X แล้ว มีเซตเปิด V ใน Y ที่ $f^{-1}(Cl_\theta V)$ ไม่เป็นเซตปิด

ตัวอย่าง 4.4.2 ให้ $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$

$\tau_X = \{\phi, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, X\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

$\tau_Y = \{\phi, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, Y\}$ เป็นโทโพโลยีบน Y

กำหนดให้ $f : (X, \tau_X) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$

โดย $f(a) = 2$, $f(b) = f(c) = f(d) = 4$

จะแสดงว่า f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

ให้ $x \in X$ และเซตเปิด G ใน Y ที่ $f(x) \in G$

กรณี 1 $x = a$ ดังนั้น $f(x) = f(a) = 2$ ดังนั้น G คือ $\{2\}$, $\{2,3\}$ หรือ Y

ได้ $\overline{G}$ คือ $\{1,2,4\}$ หรือ Y มีเซตเปิด X ใน X ที่ $a \in X$

และ $f(\overline{X}) = f(X) = \{2,4\} \subset \overline{G}$

นั่นคือ f ต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด a

กรณี 2 $x = b$ ดังนั้น $f(x) = f(b) = 4$

ดังนั้น G คือ Y ได้ $\overline{G} = Y$ มีเซตเปิด $\{b\}$ ใน X ที่ $b \in \{b\}$

และ $f(\overline{\{b\}}) \subset Y = \overline{G}$ นั่นคือ f ต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด b

กรณี 3 $x = c$ ดังนั้น $f(x) = f(c) = 4$

ดังนั้น G คือ Y ได้ $\overline{G} = Y$ มีเซตเปิด $\{c\}$ ใน X ที่ $c \in \{c\}$

และ $f(\overline{\{c\}}) \subset Y = \overline{G}$ นั่นคือ f ต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด c

กรณี 4 $x = d$ ดังนั้น $f(x) = f(d) = 4$

ดังนั้น G คือ Y ได้ $\overline{G} = Y$ มีเซตเปิด X ใน X ที่ $d \in X$

และ $f(\overline{X}) = f(X) \subset Y = \overline{G}$ นั่นคือ f ต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด d

ดังนั้น f ต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด x เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

จะแสดงว่า มีเซตเปิด V ใน Y ที่ $f^{-1}(Cl_\theta V)$ ไม่เป็นเซตปิดใน X

เลือก $V = \{3\}$ เนื่องจาก $\{3\}$ เป็นเซตเปิดใน Y

ดังนั้น $f^{-1}(Cl_\theta\{3\}) = f^{-1}(\overline{\{3\}}) = f^{-1}(\{1,3,4\})$

$= f^{-1}(\{1\} \cup \{3\} \cup \{4\})$

$= f^{-1}(\{1\}) \cup f^{-1}(\{3\}) \cup f^{-1}(\{4\})$

$= \phi \cup \phi \cup \{b,c,d\}$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(Cl_{\theta}\{3\}) = \{b,c,d\}$

เนื่องจาก $X - \{b,c,d\} = \{a\}$ และ $\{a\}$ ไม่เป็นเซตเปิดใน X

ดังนั้น $\{b,c,d\}$ ไม่เป็นเซตปิดใน X นั่นคือ $f^{-1}(Cl_{\theta}\{3\})$ ไม่เป็นเซตปิดใน X

เพราะฉะนั้น มี V เป็นเซตเปิดใน Y ที่ $f^{-1}(Cl_{\theta}V)$ ไม่เป็นเซตปิดใน X

อย่างไรก็ตามบทกลับของทฤษฎี 4.4.2 จะเป็นจริง ถ้าเพิ่มเงื่อนไขว่า f เป็นฟังก์ชันเปิดดังทฤษฎี 4.4.3 ต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 4.4.3</u> ให้ (X, τ_X) และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ เป็นฟังก์ชันเปิด

ถ้า f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X แล้ว $f^{-1}(Cl_{\theta}V)$ เป็นเซตปิดใน X สำหรับแต่ละเซตเปิด V ใน Y

<u>พิสูจน์</u> ให้ V เป็นเซตเปิดใน Y และ $x \in X - f^{-1}(Cl_{\theta}V)$ นั่นคือ $x \notin f^{-1}(Cl_{\theta}V)$

เนื่องจาก f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X และอาศัยทฤษฎี 4.4.1 ได้

$Cl_{\theta}f^{-1}(V) \subset f^{-1}(Cl_{\theta}V)$

ดังนั้น $x \notin Cl_{\theta}f^{-1}(V)$ แสดงว่ามีเซตเปิด G ใน X ที่ $x \in G$

และ $\bar{G} \cap f^{-1}(V) = \phi$ ทำให้ $G \cap f^{-1}(V) = \phi$

นั่นคือ $G \subset X - f^{-1}(V) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(V) = f^{-1}(Y - V)$

ดังนั้น $f(G) \subset (Y - V)$ ทำให้ได้ $V \subset Y - f(G)$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันเปิด และ G เป็นเซตเปิดใน X

ดังนั้น $f(G)$ เป็นเซตเปิดใน Y ทำให้ $Y - f(G)$ เป็นเซตปิดใน Y

เพราะฉะนั้น $\bar{V} \subset Y - f(G)$ ทำให้ $f(G) \subset Y - \bar{V}$

ได้ $G \subset f^{-1}(Y - \bar{V}) = X - f^{-1}(Cl_\theta V)$

นั่นคือ $G \subset X - f^{-1}(Cl_\theta V)$ ทำให้ $X - f^{-1}(Cl_\theta V)$ เป็นเซตเปิดใน X

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(Cl_\theta V)$ เป็นเซตปิดใน X

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างที่สอดคล้องกับทฤษฎี 4.4.3 แต่ f ไม่ต่อเนื่องบน X

<u>ตัวอย่าง 4.4.3</u> ให้ $X = \{a,b,c,d\}$ และ $Y = \{w,x,y,z\}$

$\tau_X = \{\phi, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, X\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

$\tau_Y = \{\phi, \{w\}, \{y\}, \{w,y\}, \{w,x\}, \{w,x,y\}, Y\}$ เป็นโทโพโลยี บน Y

กำหนดให้ $f : (X, \tau_X) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$ โดยที่

$f(a) = y, f(b) = x, f(c) = w$ และ $f(d) = z$

จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันเปิด ให้ G เป็นเซตเปิดใน X

ดังนั้น G คือ $\phi, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, X$

โดย $f(\phi) = \phi, f(\{a\}) = \{y\}, f(\{b,c\}) = \{w,x\}$

$f(\{a,b,c\}) = \{w,x,y\}$ และ $f(X) = Y$

จะเห็นได้ว่า $\phi, \{y\}, \{w,x\}, \{w,x,y\}, Y$ เป็นเซตเปิดใน Y

นั่นคือ f(G) เป็นเซตเปิดใน Y เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันเปิด

จะแสดงว่า f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

โดยตัวอย่างที่ 3.5.1 ได้ f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

จะแสดงว่า $f^{-1}(Cl_\theta V)$ เป็นเซตปิดใน X สำหรับแต่ละเซตเปิด V ใน Y

ให้ V เป็นเซตเปิดใน Y

ดังนั้น V คือ $\phi, \{w\}, \{y\}, \{w,y\}, \{w,x\}, \{w,x,y\}$ หรือ Y

เห็นได้ชัดว่า ถ้า V คือ ϕ หรือ Y จะได้ว่า $f^{-1}(Cl_\theta V)$ เป็นเซตปิดใน X

ถ้า $V = \{w\}$ ได้ $f^{-1}(Cl_\theta V) = f^{-1}(Cl_\theta\{w\}) = f^{-1}(\overline{\{w\}})$

$= f^{-1}(\{w,x,z\}) = \{b,c,d\}$

ถ้า $V = \{y\}$ ได้ $f^{-1}(Cl_\theta V) = f^{-1}(Cl_\theta\{y\}) = f^{-1}(\overline{\{y\}}) = f^{-1}(\{y,z\})$

$= \{a, d\}$

ถ้า $V = \{w,y\}$ ได้ $f^{-1}(Cl_\theta V) = f^{-1}(Cl_\theta\{w,y\}) = f^{-1}\overline{(\{w,y\})}$

$= f^{-1}(Y) = X$

ถ้า $V = \{w,x\}$ ได้ $f^{-1}(Cl_\theta V) = f^{-1}(Cl_\theta\{w,x\}) = f^{-1}\overline{(\{w,x\})}$

$= f^{-1}(\{w,x,z\}) = \{b,c,d\}$

ถ้า $V = \{w, x, y\}$ เนื่องจาก $f^{-1}(Cl_\theta\{w,y\}) = X$

ดังนั้น $f^{-1}(Cl_\theta\{w,x,y\}) = X$

จะเห็นได้ชัดจากนิยามของ τ_X ว่า $\{b,c,d\}$, $\{a,d\}$, X เป็นเซตปิดใน X

ดังนั้น $f^{-1}(Cl_\theta V)$ เป็นเซตปิดใน X

จะแสดงว่า f ไม่ต่อเนื่องบน X

มีเซตเปิด $\{w\}$ ใน Y ที่ $f^{-1}(\{w\}) = \{c\}$ ซึ่งไม่เป็นเซตเปิดใน X

ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องบน X

จากทฤษฎี 4.4.2 และทฤษฎี 4.4.3 ได้ผลสรุปต่อไปนี้

ให้ (X, τ_X) และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ เป็นฟังก์ชันเปิด ดังนั้น f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละเซตเปิด V ใน Y ที่ทำให้ $f^{-1}(Cl_\theta V)$ เป็นเซตปิดใน X

จากทฤษฎี 2.4.1 ถ้า f ต่อเนื่องบน X แล้ว $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$ สำหรับแต่ละสับเซต B ของ Y ผลสรุปนี้ไม่จริงเสมอไป สำหรับฟังก์ชัน f ที่ f ต่อเนื่องแบบธีต้า อย่างไรก็ตามสำหรับฟังก์ชันต่อเนื่องแบบธีต้าเรามีผลสรุปคล้าย ๆ กัน ดังทฤษฎี 4.4.4 ดังต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 4.4.4</u> ให้ (X, τ_X) และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี

ถ้า $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบธีต้า

แล้ว $\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(\bar{V})$ สำหรับแต่ละเซตเปิด V ใน Y

<u>พิสูจน์</u> ให้ V เป็นเซตเปิดใน Y และ $x \notin f^{-1}(\bar{V})$ แต่ $\bar{V} = Cl_\theta V$

ดังนั้น $x \notin f^{-1}(Cl_\theta V)$ เนื่องจาก f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X อาศัยทฤษฎี 4.4.1

ได้ $Cl_\theta f^{-1}(V) \subset f^{-1}(Cl_\theta V)$ ดังนั้น $x \notin Cl_\theta f^{-1}(V)$

แสดงว่ามีเซตเปิด G ใน X ที่ $x \in G$ และ $\bar{G} \cap f^{-1}(V) = \phi$

นั่นคือได้ $G \cap f^{-1}(V) = \phi$ แสดงว่า $x \notin \overline{f^{-1}(V)}$

เพราะฉะนั้น $\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(\bar{V})$

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็นว่าบทกลับของทฤษฎี 4.4.4 ไม่จำเป็นต้องจริง นั่นคือ เมื่อให้ (X, τ_X) และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $f : (X, \tau_X) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$ ถ้าสำหรับแต่ละเซตเปิด V ใน Y ที่ $\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(\bar{V})$ แล้วไม่จำเป็นที่ f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

<u>ตัวอย่าง 4.4.4</u> ให้ X เป็นเซตอนันต์ และ a, b, c เป็นสมาชิกของ X ที่แตกต่างกัน

$\tau_X = \{\phi\} \cup \{A \subset X \,/\, a \in A\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

$Y = \{1,2,3,4\}$

$\tau_Y = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, Y\}$ เป็นโทโพโลยีบน Y

กำหนดให้ $f : (X, \tau_X) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$

โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = b \\ 2 & x = c \\ 3 & x \neq b, c \end{cases}$$

จะแสดงว่า $\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(\bar{V})$ สำหรับแต่ละเซตเปิด V ใน Y

ให้ V เป็นเซตเปิดใน Y เห็นได้ชัดว่า เมื่อ $V = \phi$, Y จะทำให้ $\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(\bar{V})$

ถ้า $V = \{1\}$ เนื่องจาก $f^{-1}(\{1\}) = \{b\}$

แต่ $a \in X - \{b\}$ และ $a \in X - \{c\}$

ดังนั้น $X - \{b\}$ และ $X - \{c\}$ เป็นเซตเปิดใน X

นั่นคือ $\{b\}, \{c\}$ เป็นเซตปิดใน X ดังนั้น $\overline{f^{-1}(\{1\})} = \overline{\{b\}} = \{b\}$

$\subset X - \{c\} = f^{-1}(\{1, 3, 4\})$

$= f^{-1}(\overline{\{1\}})$

นั่นคือ $\overline{f^{-1}(\{1\})} \subset f^{-1}(\overline{\{1\}})$

ถ้า $\overline{V} = \{2\}$ ดังนั้น $\overline{f^{-1}(\{2\})} = \overline{\{c\}} = \{c\} \subset X - \{b\}$

$= f^{-1}(\{2, 3, 4\}) = f^{-1}(\overline{\{2\}})$

นั่นคือ $\overline{f^{-1}(\{2\})} \subset f^{-1}(\overline{\{2\}})$

ถ้า $V = \{1, 2\}$ ดังนั้น $\overline{f^{-1}(\{1,2\})} = \overline{\{b, c\}} = \{b, c\} \subset X$

$= f^{-1}(Y) = f^{-1}(\overline{\{1,2\}})$

นั่นคือ $\overline{f^{-1}(\{1,2\})} \subset f^{-1}(\overline{\{1,2\}})$

เพราะฉะนั้น $\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(\overline{V})$

จะแสดงว่า f ไม่ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

<u>พิจารณาที่จุด b</u>

มีเซตเปิด $\{1\}$ ใน Y ที่ $f(b) \in \{1\}$ ได้ $\overline{\{1\}} = \{1,3,4\}$

ให้ U เป็นเซตเปิดใน X ที่ $b \in U$ เนื่องจาก U เป็นเซตเปิดใน X

ดังนั้น $a \in U$ แต่ $U \subset \overline{U}$ ได้ $a \in \overline{U}$ และ $\overline{U}$ เป็นเซตปิดใน X

จะเห็นได้ว่า เซตปิดที่บรรจุ a มีเพียง X เท่านั้น ดังนั้น $\overline{U} = X$

นั่นคือ $f(\overline{U}) = f(X) = \{1,2,3\} \not\subset \{1,3,4\} = \overline{\{1\}}$

แสดงว่า f ไม่ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

<u>ตัวอย่าง 4.4.5</u> ให้ $X = R$ (แสดงว่ามี $V \subset Y$ ที่ $f^{-1}(V) \not\subset f^{-1}(V)$)

$\tau_x = \{\phi\} \cup \{G \subset X \ / \ X - G$ เป็นเซตนับได้$\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

$Y = \{1, 2, 3\}$

$\tau_Y = \{\phi\}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, Y\}$ เป็นโทโพโลยีบน Y

กำหนดให้ $f : (X, \tau_X) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$ โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , x \in Q \\ 3 & , x \in R - Q \end{cases}$$

จากตัวอย่าง 4.4.1 ขั้นที่ 2 ได้ f ต่อเนื่องแบบธีต้า

จะแสดงว่า $\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(\overline{V})$ สำหรับแต่ละเซตเปิด V ใน Y

ให้ V เป็นเซตเปิดใน Y จากขั้นที่ 1 ได้ f ต่อเนื่องแบบธีต้า

โดยทฤษฎี 4.4.5 ได้ $\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(\overline{V})$

จะแสดงว่ามี $V \subset Y$ ที่ $\overline{f^{-1}(V)} \not\subset f^{-1}(\overline{V})$

ให้ $V = \{3\} \subset Y$ พิจารณา $f^{-1}(\overline{\{3\}})$

เนื่องจาก $\{3\}$ เป็นเซตปิดใน Y ดังนั้น $f^{-1}(\overline{\{3\}}) = f^{-1}(\{3\}) = R - Q$

พิจารณา $\overline{f^{-1}(\{3\})}$ เพราะว่า $\overline{f^{-1}(\{3\})} = \overline{R - Q}$

และ $R - (R - Q) = Q$ ซึ่งเป็นเซตนับได้

ดังนั้น $R - Q$ เป็นเซตเปิดใน X และ $R - Q \neq \phi$

นั่นคือ $R - Q$ เป็นเซตนับไม่ได้

จาก $\overline{R - Q} = R$ ดังนั้น $\overline{f^{-1}(\{3\})} = R \not\subset R - Q = f^{-1}(\overline{\{3\}})$

อย่างไรก็ตามบทกลับของทฤษฎี 4.4.4 จะเป็นจริงได้ ถ้าเพิ่มเงื่อนไข ให้ (X, τ_X) เป็นปริภูมิเรกูลาร์ ดังทฤษฎี 4.4.5 ต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 4.4.5</u> ให้ (X, τ_X) เป็นปริภูมิเรกูลาร์ และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $f : (X, \tau_X) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$ ถ้า $\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(\overline{V})$ สำหรับแต่ละเซตเปิด V ใน Y แล้ว f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

<u>พิสูจน์</u> โดยอาศัยทฤษฎี 4.4.1 ข้อ 4 ให้ $B \subset Y$

จะแสดงว่า $Cl_\theta f^{-1}(B) \subset f^{-1}\, Cl_\theta(B)$

ถ้า $x \notin f^{-1}\, Cl_\theta(B)$ ได้ $f(x) \notin Cl_\theta(B)$

แสดงว่า มีเซตเปิด V ใน Y ที่ $f(x) \in V$ และ $\bar{V} \cap B = \phi$

จาก $\bar{V} \cap B = \phi$ ทำให้ $f^{-1}(\bar{V} \cap B) = \phi$

แต่ $f^{-1}(\bar{V} \cap B) = f^{-1}(\bar{V}) \cap f^{-1}(B)$

ดังนั้น $f^{-1}(\bar{V}) \cap f^{-1}(B) = \phi$

จาก $f(x) \in V$ ได้ $x \notin X - f^{-1}(V) = f^{-1}(Y - V)$

เนื่องจาก $Y - V$ เป็นเซตปิด และ $Y - \bar{V} \subset Y - V$

ทำให้ได้ว่า $f^{-1}\overline{(Y - \bar{V})} \subset f^{-1}(Y - V)$

เนื่องจาก $Y - \bar{V}$ เป็นเซตเปิดใน Y

และจากสิ่งที่กำหนดให้ได้ $\overline{f^{-1}(Y - \bar{V})} \subset f^{-1}\overline{(Y - \bar{V})}$

ดังนั้น $x \notin \overline{f^{-1}(Y - \bar{V})}$ แสดงว่า มีเซตเปิด U ใน X ที่ $x \in U$

และ $U \cap f^{-1}(Y - \bar{V}) = \phi$

แต่ $f^{-1}(Y - \bar{V}) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(\bar{V}) = X - f^{-1}(\bar{V})$

เพราะฉะนั้น $U \cap (X - f^{-1}(\bar{V})) = \phi$ ทำให้ $U \subset f^{-1}(\bar{V})$

เนื่องจาก (X, τ_x) เป็นปริภูมิเรกูลาร์ และ U เป็นเซตเปิดใน X ที่ $x \in U$ อาศัยทฤษฎีนำ 4.3.1 จะมีเซตเปิด G ใน X ที่ $x \in G$ และ $\bar{G} \subset U$ ดังนั้น $\bar{G} \subset f^{-1}(\bar{V})$ จึงทำให้ $\bar{G} \cap f^{-1}(B) = \phi$

แสดงว่า $x \notin Cl_\theta f^{-1}(B)$ นั่นคือ $Cl_\theta f^{-1}(B) \subset f^{-1}(Cl_\theta B)$

อาศัยทฤษฎี 4.4.1 ข้อ 4 ได้ f ต่อเนื่องแบบซีต้าบน X

ต่อไปเป็นตัวอย่างของฟังก์ชัน f ที่ f ไม่ต่อเนื่อง และ f สอดคล้องเงื่อนไขในทฤษฎี 4.4.5

<u>ตัวอย่าง 4.4.6</u> ให้ X เป็นเซตอนันต์ และ $a \in X$

$\tau_x = \{A \subset X \,/\, a \notin A$ หรือ $X - A$ เป็นเซตจำกัด$\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

$Y = \{1,2,3\}$, $\tau_Y = \{\phi, \{2\}, Y\}$ เป็นโทโพโลยีบน Y

กำหนดให้ $f : (X, \tau_x) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$ โดย

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \neq a \\ 2 & , x = a \end{cases}$$

โดยตัวอย่าง 2.5.3 ได้ (X, τ_x) เป็นปริภูมิเรกูลาร์

จะแสดงว่า $\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(\bar{V})$ สำหรับแต่ละเซตเปิด V ใน Y

ให้ V เป็นเซตเปิดใน Y ดังนั้น V คือ ϕ , $\{2\}$ หรือ Y

ได้ $\bar{V}$ คือ ϕ หรือ Y ดังนั้น $\overline{f^{-1}(\phi)} = \phi = f^{-1}(\phi)$ และ

$\overline{f^{-1}(Y)} = X = f^{-1}(\bar{Y})$ นั่นคือ $\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(\bar{V})$

จะแสดงว่า f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X ให้ $x \in X$

<u>กรณี</u> $x = a$ ให้เซตเปิด V ใน Y ที่ $f(a) \in V$ เพราะว่า $f(a) = 2$

ดังนั้น V คือ $\{2\}$ หรือ Y ได้ $\bar{V}$ คือ Y

จะมีเซตเปิด X ใน X ที่ $a \in X$ และ $f(\bar{X}) = f(X) \subset Y = \bar{V}$

<u>กรณี</u> $x \neq a$ ได้ $f(x) = 1$ ดังนั้น V คือ Y

จะมีเซตเปิด X ใน X ที่ $x \in X$ และ $f(\bar{X}) = f(X) \subset Y = \bar{V}$

จากทั้ง 2 กรณี ได้ f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

ต่อไปจะแสดงว่า f ไม่ต่อเนื่องบน X เนื่องจากมีเซตเปิด $\{2\}$ ใน Y

ที่ $f^{-1}(\{2\}) = \{a\}$ และ $\{a\}$ ไม่เป็นเซตเปิดใน X ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องบน X

<u>ทฤษฎี 4.4.6</u> ให้ (X, τ_x) เป็นปริภูมิเรกูลาร์ และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $f : (X, \tau_x) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$ ข้อความต่อไปนี้สมมูล กัน

1) f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

2) $\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(\bar{V})$ สำหรับแต่ละเซตเปิด V ใน Y

3) $f^{-1}(\text{int } F) \subset \text{int } f^{-1}(F)$ สำหรับแต่ละ F เป็นเซตปิดใน Y

<u>พิสูจน์</u> 1) ==> 2) เป็นผลมาจากทฤษฎี 4.4.4

2) ==> 3) ให้ F เป็นเซตปิดใน Y และ $x \in f^{-1}(\text{int } F)$

ดังนั้น $x \notin X - f^{-1}(\text{int } F) = f^{-1}(Y - \text{int } F)$

เนื่องจาก $\overline{Y - F} = Y - \text{int } F$

ได้ $x \notin f^{-1}(\overline{Y - F})$ และเนื่องจาก Y – F เป็นเซตเปิดใน Y

จาก 2. ได้ $\overline{f^{-1}(Y - F)} \subset f^{-1}(\overline{Y - F})$

ดังนั้น $x \notin \overline{f^{-1}(Y - F)}$

แต่ $\overline{f^{-1}(Y - F)} = \overline{X - f^{-1}(F)} = X - \text{int } f^{-1}(F)$

ทำให้ $x \notin X - \text{int } f^{-1}(F)$ นั่นคือ $x \in \text{int } f^{-1}(F)$

แสดงว่า $f^{-1}(\text{int } F) \subset \text{int } f^{-1}(F)$

3) ==> 1) โดยอาศัยทฤษฎี 4.4.1 ข้อ 3

ให้ $A \subset X$ จะแสดงว่า $f(Cl_\theta A) \subset Cl_\theta f(A)$

ให้ $y \in f(Cl_\theta A)$ ดังนั้นจะมี $x \in Cl_\theta A$ ซึ่ง $f(x) = y$

จะแสดงว่า $y \in Cl_\theta f(A)$ ให้เซตเปิด V ใน Y ที่ $y \in V$

นั่นคือ $f(x) \in V$ ทำให้ $x \notin X - f^{-1}(V) = f^{-1}(Y - V)$

จาก Y – V เป็นเซตปิด และ $Y - \bar{V} \subset Y - V$

ทำให้ $f^{-1}(\overline{Y - \bar{V}}) \subset f^{-1}(Y - V)$ จากทฤษฎี 2.3.9 ได้

$$f^{-1}(\overline{Y - \bar{V}}) = f^{-1}(Y - \text{int } \bar{V}) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(\text{int } \bar{V})$$

$$= X - f^{-1}(\text{int } \bar{V})$$

เพราะฉะนั้น $x \notin X - f^{-1}(\text{int } \bar{V})$ ได้ $x \in f^{-1}(\text{int } \bar{V})$

เนื่องจาก $\bar{V}$ เป็นเซตปิดใน Y อาศัยสิ่งที่กำหนดให้ได้

$f^{-1}(\text{int } \bar{V}) \subset \text{int } f^{-1}(\bar{V})$ ดังนั้น $x \in \text{int } f^{-1}(\bar{V})$

แสดงว่ามีเซตเปิด U ใน X ที่ $x \in U$ และ $U \subset f^{-1}(\bar{V})$

เนื่องจาก (X, τ_x) เป็นปริภูมิเรกูลาร์ อาศัยทฤษฎีบท 4.3.1

มีเซตเปิด G ใน X ที่ $x \in G$ และ $\bar{G} \subset U$

นั่นคือ $\bar{G} \subset f^{-1}(\bar{V})$ ได้ $f(\bar{G}) \subset \bar{V}$

จาก $x \in Cl_\theta A$ ได้ $\bar{G} \cap A \neq \phi$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชัน ดังนั้น $f(\bar{G} \cap A) \neq \phi$

แต่ $f(\bar{G} \cap A) \subset f(\bar{G}) \cap f(A)$ จึงทำให้ $f(\bar{G}) \cap f(A) \neq \phi$

เพราะฉะนั้น $\bar{V} \cap f(A) \neq \phi$ นั่นคือ $y \in Cl_\theta f(A)$

แสดงว่า $f(Cl_\theta A) \subset Cl_\theta f(A)$ โดยทฤษฎีบท 4.4.1 ข้อ 3

ทำให้ f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X

4.5 <u>ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันต่อเนื่องแบบธีต้ากับฟังก์ชันต่อเนื่อง</u>

ในข้อสังเกต 3.5.1 ได้กล่าวไว้ว่า ให้ (X, τ_x) และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ $f : (X, \tau_x) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$ ถ้า f ต่อเนื่องบน X แล้ว f ต่อเนื่องแบบธีต้าบน X ต่อไปนี้จะเป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็นว่า ถ้า f ต่อเนื่องที่จุด $x \in X$ แล้ว f ไม่จำเป็นต้องต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด x

<u>ตัวอย่าง 4.5.1</u> ให้ $X = \{1,2,3\}$ และ $Y = \{a,b,c\}$

$\tau_x = \{\phi, \{1\}, \{1,2\}, X\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

$\tau_Y = \{\phi, \{c\}, \{a,b\}, Y\}$ เป็นโทโพโลยีบน Y

กำหนดให้ $f : (X, \tau_x) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$

โดยที่ $f(1) = a$, $f(2) = b$ และ $f(3) = c$

จะแสดงว่า f ต่อเนื่องที่จุด 2 ให้ G เป็นเซตเปิดใน Y ที่ $f(2) \in G$

ดังนั้น G คือ $\{a, b\}$ หรือ Y มีเซตเปิด $\{1,2\}$ ใน X ที่ $2 \in \{1,2\}$

และ $f(\{1,2\}) = \{a,b\}$

ดังนั้น $f(\{1,2\}) \subset G$ นั่นคือ f ต่อเนื่องที่จุด 2

จะแสดงว่า f ไม่ต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด 2

เนื่องจากมีเซตเปิด $\{a, b\}$ ใน Y ที่ $f(2) = b \in \{a,b\}$

ให้ H เป็นเซตเปิดใน X ที่ $2 \in H$ ดังนั้น H คือ $\{1,2\}$ หรือ X

ได้ $\bar{H}$ เท่ากับ X เท่านั้น

จะเห็นว่า $f(\bar{H}) = f(X) = \{a, b, c\} \not\subset \{a,b\} = \overline{\{a,b\}}$

นั่นคือ $f(\bar{H}) \not\subset \overline{\{a,b\}}$ แสดงว่า f ไม่ต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด 2

อย่างไรก็ตาม ถ้าเพิ่มเงื่อนไขให้ (X, τ_X) เป็นปริภูมิเรกูลาร์ ก็จะได้ว่า เมื่อ f ต่อเนื่องที่จุด $a \in X$ แล้ว f ต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด a ดังทฤษฎี 4.5.1 ต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 4.5.1</u> ให้ (X, τ_X) เป็นปริภูมิเรกูลาร์ และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิโทโพโลยี และ $f : (X, \tau_X) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$ ถ้า f ต่อเนื่องที่จุด $a \in X$ แล้ว f ต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด a

<u>พิสูจน์</u> ให้ $f : (X, \tau_X) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$ ต่อเนื่องที่จุด $a \in X$

ให้ G เป็นเซตเปิดใน Y ที่ $f(a) \in G$

จาก f ต่อเนื่องที่จุด a มีเซตเปิด U ใน X ที่ $a \in U$ และ $f(U) \subset G$

จาก $a \in U$ และเซตเปิด U ใน X และ (X, τ_X) เป็นปริภูมิเรกูลาร์

โดยทฤษฎีนำ 4.3.1 จะมีเซตเปิด U_1 ใน X ที่ $a \in U_1$ และ $\bar{U}_1 \subset U$

นั่นคือ $f(\bar{U}_1) \subset f(U) \subset G \subset \bar{G}$

ดังนั้น $f(\bar{U}_1) \subset \bar{G}$ แสดงว่า f ต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด a

ต่อไปจะแสดงว่าบทกลับของทฤษฎี 4.5.1 ไม่จำเป็นต้องเป็นจริง นั่นคือ ถ้า f ต่อเนื่องแบบซีต้าที่จุด $a \in X$ แล้วไม่จำเป็นที่ f ต่อเนื่องที่จุด a

<u>ตัวอย่าง 4.5.2</u> ให้ X เป็นเซตอนันต์ และ $a \in X$

$\tau_X = \{A \subset X \ / \ a \notin A$ หรือ $X - A$ เป็นเซตจำกัด$\}$

$Y = \{1,2,3\}$, $\tau_Y = \{\phi, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, Y\}$ เป็นโทโพโลยีบน Y

กำหนดให้ $f : (X, \tau_X) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$ โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ , & x \neq a \\ \\ 2 \ , & x = a \end{cases}$$

โดยตัวอย่าง 2.5.3 ได้ (X, τ_X) เป็นปริภูมิเรกูลาร์

จะแสดงว่า f ต่อเนื่องแบบซีต้าที่จุด a

ให้ G เป็นเซตเปิดใน Y ที่ $f(a) = 2 \in G$

นั่นคือได้ G เท่ากับ $\{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}$ หรือ Y ดังนั้น $\bar{G}$ เท่ากับ $\{1,2\}$ หรือ Y

มีเซตเปิด X ใน X ที่ $a \in X$

ได้ $\bar{X} = X$ และ $f(\bar{X}) = f(X) = \{1,2\}$

ดังนั้น $f(X) \subset G$

นั่นคือ f ต่อเนื่องแบบซีต้าที่จุด a

จะแสดงว่า f ไม่ต่อเนื่องที่จุด a

เนื่องจาก $\{2\}$ เป็นเซตเปิดใน Y ที่ $f(a) = 2 \in \{2\}$

ให้ U เป็นเซตเปิดใน X ที่ $a \in U$ ดังนั้น $X - U$ เป็นเซตจำกัด

ได้ U เป็นเซตไม่จำกัด นั่นคือ มี $a_1 \in U$ ที่ $a_1 \neq a$

ดังนั้น $\{a, a_1\} \subset U$ เนื่องจาก $f\{a, a_1\} = \{1,2\} = f(U)$ ได้ $f(U) \subset \{2\}$

แสดงว่า f ไม่ต่อเนื่องที่จุด a

<u>ทฤษฎี 4.5.2</u> ให้ (X, τ_X) เป็นปริภูมิเชิงโทโพโลยี และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเรกูลาร์ และ $f: (X, \tau_X) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$ ถ้า f ต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด $a \in X$ แล้ว f ต่อเนื่องที่จุด a

<u>พิสูจน์</u> ให้ $f : (X, \tau_X) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$ และ f ต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด $a \in X$

ให้ G เป็นเซตเปิดใน Y ที่ $f(a) \in G$

เนื่องจาก (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเรกูลาร์และอาศัยทฤษฎีนำ 4.3.1

จะมีเซตเปิด V ใน Y ที่ $f(a) \in V$ และ $\bar{V} \subset G$

จาก $f(a) \in V$ และ f ต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด a

แสดงว่ามี U เป็นเซตเปิดใน X ที่ $a \in U$ และ $f(\bar{U}) \subset \bar{V}$

ดังนั้น $f(\bar{U}) \subset G$ แต่ $f(U) \subset f(\bar{U})$ จึงได้ $f(U) \subset G$

นั่นคือ f ต่อเนื่องที่จุด a

ต่อไปเป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็นว่าบทกลับของทฤษฎี 4.5.2 ไม่จำเป็นต้องเป็นจริง นั่นคือ ถ้า f ต่อเนื่องจุด $a \in X$ แล้ว f ไม่จำเป็นต้องต่อเนื่องแบบธีต้าที่จุด a

<u>ตัวอย่าง 4.5.3</u> ให้ $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{a,b,c\}$

$\tau_X = \{\phi, \{1\}, \{1,2\}, X\}$ เป็นโทโพโลยีบน X

$\tau_Y = \{\phi, \{c\}, \{a,b\}, Y\}$ เป็นโทโพโลยีบน Y

ให้ $f : (X, \tau_X) \dashrightarrow (Y, \tau_Y)$

โดย $f(1) = a$, $f(2) = b$ และ $f(3) = c$

โดยตัวอย่าง 4.5.1 ได้ f ต่อเนื่องที่ 2 และ f ไม่ต่อเนื่องแบบธีต้าที่ 2

จะแสดงว่า (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเรกูลาร์ ให้ F เป็นเซตปิดใน Y

ดังนั้น F คือ $\phi, \{c\}, \{a,b\}$ หรือ Y

ถ้า $F = \phi$ และ $a, b, c \notin \phi$

จะเห็นได้ชัดว่า มี ϕ , {c}, {a,b} เป็นเซตเปิดใน Y

ที่ $\phi \subset \phi$, $c \in \{c\}$, $a,b \in \{a,b\}$ และ $\phi \cap \{c\} = \phi$, $\phi \cap \{a,b\} = \phi$

ถ้า $F = \{c\}$ และ $a,b \notin \{c\}$ มี {c}, {a,b} เป็นเซตเปิดใน Y

ที่ $\{c\} \subset \{c\}$, $a,b \in \{a,b\}$ และ $\{c\} \cap \{a,b\} = \phi$

ถ้า $F = \{a,b\}$ และ $c \notin \{a,b\}$ มี {a,b}, {c} เป็นเซตเปิดใน Y

ที่ $c \in \{c\}$, $\{a,b\} \subset \{a,b\}$ และ $\{c\} \cap \{a,b\} = \phi$

สรุปได้ว่า เมื่อ F เป็นเซตปิดใน Y และ $x \notin F$

มีเซตเปิด U_1, U_2 ใน Y ที่ $x \in U_1$, $F \subset U_2$ และ $U_1 \cap U_2 = \phi$

ดังนั้น (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิเรกูลาร์