# บทที่ 5

## บทสรุป

จากการศึกษาปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล นอกจากได้รู้นิยาม , คุณสมบัติบางอย่างของปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล และรู้ความสัมพันธ์ระหว่างปริภูมิบางปริภูมิกับปริภูมิธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล แล้วยังได้ผลเพิ่มเติมอีกดังนี้

1. สำหรับปริภูมิเชิงโทโพโลยี $(X, \tau)$ และสับเซต $A, B$ ของ $X$ จะได้ว่า

   1.1 $\text{int}\, A$ เป็นเซตเรกูลาร์-เปิด ถ้า $A$ เป็นเซตปิด

   1.2 $Cl_\theta(A \cap B) \subset Cl_\theta A \cap Cl_\theta B$

   1.3 $Cl_\theta(A \cup B) = Cl_\theta A \cup Cl_\theta B$

   1.4 $Cl_\theta A = \overline{A}$ ถ้า $A$ เป็นเซตเปิด

   1.5 $Cl_\theta(X - Cl_\theta A) = X - \text{int}(Cl_\theta A)$

   1.6 ถ้า $X$ เป็นปริภูมิยูชวล $R$ แล้ว $Cl_\theta A = \overline{A}$

2. สำหรับกลุ่ม $\{X_i \,/\, i \in I\}$ ของปริภูมิเชิงโทโพโลยี เมื่อ $I$ เป็นเซตดัชนี $\prod_{i \in I} X_i$ จะเป็นธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล ก็ต่อเมื่อ $X_i$ เป็นธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล ทุก ๆ $i \in I$

3. สำหรับปริภูมิเชิงโทโพโลยี $(X, \tau_1)$ และ $(X, \tau_2)$ และ $\tau_1 \subset \tau_2$ ถ้า $(X, \tau_2)$ ธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล แล้ว $(X, \tau_1)$ ธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

4. สำหรับปริภูมิเออริดิวซิเบิ้ล $(X, \tau)$ และสับเซตหนาแน่น $D$ ของ $X$ จะได้ปริภูมิย่อย $(D, \tau_D)$ เป็นธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

5. คุณสมบัติธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ลเป็นโทโพโลจิคัลอินแวเรียนท์ แต่ไม่มีคุณสมบัติโทโพโลจิคัลเฮริดิทารี

6. สำหรับปริภูมิเชิงโทโพโลยี $(X, \tau_X)$ และ $(Y, \tau_Y)$ และฟังก์ชัน $f$ จาก $(X, \tau_X)$ ไปยัง $(Y, \tau_Y)$ ที่เป็นฟังก์ชัน 1-1, ฟังก์ชันปิดและเปิด ถ้า $(Y, \tau_Y)$ เป็นธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล แล้ว $(X, \tau_X)$ เป็นธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

7. สำหรับปริภูมิเชิงโทโพโลยี $(X, \tau)$ จะได้ว่า $(X, \tau)$ เป็นธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล ก็ต่อเมื่อ $(X, \tau)$ ขาดตอนสุดขีดแบบธีต้า และสำหรับแต่ละฟังก์ชันต่อเนื่องค่าจริงบน $X$ เป็นฟังก์ชันคงที่

8. ปริภูมิเรกูลาร์ $(X, \tau)$ เออริดิวซิเบิ้ล ก็ต่อเมื่อ $(X, \tau)$ ธีต้า-เออริดิวซิเบิ้ล

9. สำหรับปริภูมิเชิงโทโพโลยี $(X, \tau)$ จะได้ว่า

9.1 $(X, \tau)$ เออริดิวซิเบิ้ล ก็ต่อเมื่อ $(X, \tau)$ ไม่ขาดตอนและขาดตอนสุดขีด

9.2 $(X, \tau)$ ขาดตอนสุดขีดแบบธีต้า ถ้า $(X, \tau)$ ขาดตอนสุดขีด

9.3 $(X, \tau)$ ขาดตอนสุดขีด ก็ต่อเมื่อ $Cl_\theta \bar{U}$ และ $Cl_\theta \bar{V}$ ไม่ตัดกัน สำหรับแต่ละเซตเปิด $U$ และ $V$ ที่ไม่ตัดกัน

10. สำหรับปริภูมิเชิงโทโพโลยี $(X, \tau_X)$ และ $(Y, \tau_Y)$ และฟังก์ชัน $f$ จาก $(X, \tau_X)$ ไปยัง $(Y, \tau_Y)$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

10.1 $f$ ต่อเนื่องแบบธีต้าบน $X$

10.2 สำหรับแต่ละ $x \in X$ และเซตเรกูลาร์-เปิด $V$ ใน $Y$ ที่ $f(x) \in V$ จะมีเซตเรกูลาร์-เปิด $U$ ใน $X$ ที่ $x \in U$ และ $f(\bar{U}) \subset \bar{V}$

10.3 $f(Cl_\theta A) \subset Cl_\theta f(A)$ สำหรับแต่ละสับเซต $A$ ของ $X$

10.4 $Cl_\theta f^{-1}(B) \subset f^{-1}(Cl_\theta B)$ สำหรับแต่ละสับเซต $B$ ของ $Y$

11. สำหรับปริภูมิเรกูลาร์ $(X, \tau_X)$ และปริภูมิเชิงโทโพโลยี $(Y, \tau_Y)$ และฟังก์ชัน $f$ จาก $(X, \tau_X)$ ไปยัง $(Y, \tau_Y)$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลย์กัน

11.1 $f$ ต่อเนื่องแบบธีต้าบน $X$

11.2 $\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(\bar{V})$ สำหรับแต่ละเซตเปิด $V$ ใน $Y$

11.3 $f^{-1}(\text{int } F) \subset \text{int } f^{-1}(F)$ สำหรับแต่ละเซตปิด $F$ ใน $Y$

12. สำหรับปริภูมิเชิงโทโพโลยี $(X, \tau_x)$ และ $(Y, \tau_Y)$ และฟังก์ชันเปิด $f$ จาก $(X, \tau_x)$ ไปยัง $(Y, \tau_Y)$ จะได้ว่า $f$ ต่อเนื่องแบบธีต้า ก็ต่อเมื่อ $f^{-1}(Cl_{\theta}V)$ เป็นเซตปิดใน $X$ สำหรับแต่ละเซตเปิด $V$ ใน $Y$

13. สำหรับปริภูมิเรกูลาร์ $(X, \tau_x)$ และ $(Y, \tau_Y)$ และฟังก์ชัน $f$ จาก $(X, \tau_x)$ ไปยัง $(Y, \tau_Y)$ จะได้ว่า $f$ ต่อเนื่องแบบธีต้า ที่ $a \in X$ ก็ต่อเมื่อ $f$ ต่อเนื่อง ที่ $a$