บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

ในปัจจุบันนี้ ระบบคณิตศาสตร์ได้ถูกพัฒนามามาก เรียกว่าเป็นคณิตศาสตร์แผนใหม่ ดังนั้นเราควรจะรู้ว่า คณิตศาสตร์แผนใหม่ ถูกแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ

1. โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Structure)
2. กระบวนการของเหตุและผล (Reasoning)

1. โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ มีองค์ประกอบที่สำคัญ 4 อย่าง คือ

1.1 คำอนิยาม (Undefined Term or Primitive Term)
1.2 คำนิยาม (Defined Term)
1.3 ข้อตกลงขั้นมูลฐาน (Primitive True Statement)
1.4 ทฤษฎีบท (Theorem)

1.1 คำอนิยาม (Undefined Term or Primitive Term)

คำอนิยามเป็นคำพื้นฐานที่เราเข้าใจความหมาย โดยอาศัยความคุ้นเคย

1.2 คำนิยาม (Defined Term)

คำนิยาม หมายถึงคำหรือข้อความหรือสัญลักษณ์ที่สามารถอธิบายให้เข้าใจได้ โดยอาศัยคำพื้นฐานที่คุ้นเคยมาก่อนแล้วหรือคำนิยามที่ผ่านมา เพื่อทำให้ทุกคนเข้าใจตรงกันว่า คำหรือสัญลักษณ์ที่กล่าวถึงหมายถึงสิ่งใด มีคุณสมบัติและมีขอบเขตอย่างไร

1.3 ข้อตกลงขั้นมูลฐาน (Primitive True Statement)

ข้อตกลงขั้นมูลฐาน หมายถึง ข้อความหรือกติกาที่ยอมรับโดยไม่ต้องพิสูจน์ ข้อตกลงขั้นมูลฐานในระบบคณิตศาสตร์ มีชื่อเรียกแตกต่างกัน 3 อย่าง คือ

ก. สมมติฐาน (Assumption)
ข. สิ่งที่เห็นจริงแล้ว (Axiom)
ค. สัจจพจน์ (Postulate)

1.4 ทฤษฎีบท (Theorem)

ทฤษฎีบท หมายถึง ข้อความที่สามารถพิสูจน์ให้เห็นจริงได้โดยอ้างอิงความจริงอันก่อน ๆ ซึ่งอาจจะนำมาจากนิยาม อนิยาม ข้อตกลงขั้นมูลฐาน หรือทฤษฎีบทที่พิสูจน์มาก่อนแล้ว

2. กระบวนการของเหตุและผล เป็นกระบวนการที่นำข้อความที่เป็น "เหตุ" (hypothesis or premise) มาวิเคราะห์ แจกแจง แสดงความสัมพันธ์หรือความต่อเนื่อง เพื่อทำให้เกิดข้อความใหม่ เรียกว่า "ผลสรุป" (conclusion)

กระบวนการของเหตุและผล แบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ คือ

2.1 เหตุผลเชิงนิรนัย (Deductive Reasoning)

2.2 เหตุผลเชิงอุปนัย (Inductive Reasoning)

2.1 เหตุผลเชิงนิรนัย

เหตุผลเชิงนิรนัย เป็นกระบวนการให้เหตุผลที่เริ่มต้นด้วยความจริงที่เป็นเหตุใหญ่ (major premise) แล้วตามด้วยความจริงที่เป็นเหตุย่อย (minor premise) ซึ่งแฝงอยู่ในเหตุใหญ่ มีผลบังคับให้เกิดผลสรุปอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ เช่น

เหตุใหญ่ : สัตว์ทุกชนิดต้องตาย

เหตุย่อย : ช้างเป็นสัตว์ชนิดหนึ่ง

ผลสรุป : ช้างต้องตาย

2.2 เหตุผลเชิงอุปนัย

เหตุผลเชิงอุปนัย เป็นกระบวนการให้เหตุผล ที่เริ่มต้นด้วยเหตุที่มีน้ำหนักเท่า ๆ กัน และเป็นอิสระจากกัน จากการรวบรวมเหตุเหล่านี้ เกิดเป็นผลสรุปที่กว้างและครอบคลุมเหตุเหล่านั้นทั้งหมด เช่น

เหตุ 1 : คนทุกคนต้องตาย

เหตุ 2 : ช้างทุกตัวต้องตาย

เหตุ 3 : นกทุกตัวต้องตาย

....

เหตุ n : ม้าทุกตัวต้องตาย

ผลสรุป : สิ่งมีชีวิตทุกชีวิตต้องตาย

จะเห็นว่า ผลสรุปข้างต้นเป็นจริงนั้น เหตุผลสนับสนุนต้องมีเป็นจำนวนมาก

จากข้อความที่กล่าวมาทั้งหมดข้างต้น ได้ทำให้เราได้รู้จักกับระบบคณิตศาสตร์ ต่อไปจะกล่าวถึงนิยาม และทฤษฎีบทที่จะเป็นพื้นฐานนำไปใช้ในบทต่อ ๆไป

นิยาม 1 จำนวนเต็มคู่ คือ จำนวนเต็มที่เขียนอยู่ในรูป $2k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม
จำนวนเต็มคี่ คือ จำนวนเต็มที่เขียนอยู่ในรูป $2k + 1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

นิยาม 2 ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ที่ $a \neq 0$
จะกล่าวว่า a หาร b ลงตัว ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม c ซึ่ง $b = ac$
ถ้า a หาร b ลงตัว จะเรียก a ว่า ตัวหารลงตัว หรือ ตัวประกอบของ b
ใช้สัญลักษณ์ $a \mid b$ แทน a หาร b ลงตัว

ทฤษฎีบท 3
1. ทุก ๆจำนวนเต็ม $a \neq 0$ จะได้ว่า $a \mid a$ และ $a \mid 0$
2. ทุก ๆจำนวนเต็ม b จะได้ว่า $\pm 1 \mid b$
3. ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid c$ แล้ว $a \mid c$
4. ถ้า $a \mid b$ และ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $a \leq b$
5. ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid (bx+cy)$ สำหรับทุก ๆจำนวนเต็ม x, y
6. ถ้า $a \mid b$ แล้ว $ma \mid mb$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็ม ที่ $m \neq 0$
7. ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid a$ แล้ว $a = b$ หรือ $a = -b$
8. ถ้า $a \mid (b+c)$ และ $a \mid b$ แล้ว $a \mid c$

นิยาม 4 ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็น 0 พร้อมกัน
จะเรียก d ว่า เป็นตัวหารร่วมมากของ a และ b ก็ต่อเมื่อ
1. d เป็นจำนวนเต็มบวก
2. $d \mid a$ และ $d \mid b$
3. ถ้า $d_1 \mid a$ และ $d_1 \mid b$ แล้ว $d_1 \mid d$

ใช้สัญลักษณ์ (a,b) แทน ตัวหารร่วมมากของ a และ b

ทฤษฎีบท 5 สำหรับจำนวนเต็ม a, b ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จะมีจำนวนเต็มบวก d เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น ที่ $d = (a,b)$ นอกจากนี้ยังได้ว่า $d = am + bn$ สำหรับบางจำนวนเต็ม m, n

ทฤษฎีบท 6 a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน $(a,b) = 1$ ก็ต่อเมื่อ $1 = ax+by$ สำหรับบางจำนวนเต็ม x, y

ทฤษฎีบท 7 สำหรับจำนวนเต็ม a, b, c ซึ่งไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

1. ถ้า m เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า $(ma,mb) = m(a,b)$
2. ถ้า $a \mid bc$ และ $(a,b) = 1$ จะได้ว่า $a \mid c$

ทฤษฎีบท 8 ให้ a, b, c เป็นจำนวนธรรมชาติ

1. ถ้า $d \mid a$ และ $d \mid b$ แล้ว $\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right) = \frac{1}{d}(a,b)$
2. ถ้า $g = (a,b)$ แล้ว $\left(\frac{a}{g},\frac{b}{g}\right) = 1$

ทฤษฎีบท 9 ให้ a, b, c เป็นจำนวนธรรมชาติ ถ้า $(a,c) = (b,c) = 1$ แล้ว $(ab,c) = 1$

ทฤษฎีบท 10 ให้ a, b, c เป็นจำนวนธรรมชาติ โดยที่ $a \mid c$ และ $b \mid c$ ถ้า $(a,b) = 1$ แล้ว $ab \mid c$

นิยาม 11 จำนวนเต็ม a และ b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ ก็ต่อเมื่อ $(a,b) = 1$

นิยาม 12 ให้ a, b เป็นจำนวนธรรมชาติ
จะเรียก c ว่า ตัวคูณร่วมน้อยของ a และ b ก็ต่อเมื่อ

1. c เป็นจำนวนเต็มบวก
2. $a \mid c$ และ $b \mid c$
3. ถ้า $a \mid c_1$ และ $b \mid c_1$ แล้ว $c \mid c_1$

ทฤษฎีบท 13 ให้ m, a, b เป็นจำนวนธรรมชาติ แล้วได้ว่า

1. $[ma,mb] = m[a,b]$
2. $(a,b)[a,b] = ab$

ทฤษฎีบท 14 ให้ p, a, b เป็นจำนวนธรรมชาติ โดยที่ p เป็นจำนวนเฉพาะ ถ้า $p \mid ab$ แล้ว $p \mid a$ หรือ $p \mid b$

นิยาม 15 ถ้า $f : N \longrightarrow R$ มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ จะเรียก f ว่าเป็นลำดับจำกัด (finite sequence) และใช้สัญลักษณ์ (f_n) แทนลำดับ f_n
แต่ถ้า f มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, \ldots\}$ จะเรียก f ว่าเป็นลำดับอนันต์ (infinite sequence)

นิยาม 16 ให้ (a_n) เป็นลำดับแล้ว จะกล่าวว่า (a_n) มีลิมิตเป็น L ก็ต่อเมื่อ ถ้าสำหรับ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้ใด ๆ จะมี $n_0 \in N$ ซึ่ง $|a_n - L| < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geq n_0$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

นิยาม 17 ถ้าลำดับ (a_n) มีลิมิตเป็น L เมื่อ L เป็นจำนวนจริงแล้ว จะเรียกลำดับ (a_n) ลู่เข้าสู่ L และเรียก (a_n) นี้ว่า ลำดับลู่เข้า (convergent sequence)

นิยาม 18 ลำดับ (a_n) ใด ๆ จะถูกเรียกว่าลำดับลู่ออก (divergent sequence) ก็ต่อเมื่อลำดับนั้นไม่เป็นลำดับลู่เข้า

นิยาม 19 ลำดับ (a_n) จะเรียกว่าลำดับเพิ่ม ก็ต่อเมื่อ ถ้า $a_n < a_{n+1}$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ n

นิยาม 20 ลำดับ (a_n) จะเรียกว่าลำดับลด ก็ต่อเมื่อ ถ้า $a_n > a_{n+1}$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ n

ทฤษฎีบท 21 ถ้า (a_n) และ (b_n) เป็นลำดับลู่เข้าใด ๆ แล้วจะได้ว่า

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$
2. $\lim_{n\to\infty} k \cdot a_n = k \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ
3. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = (\lim_{n\to\infty} a_n)\cdot(\lim_{n\to\infty} b_n)$
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ เมื่อ $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$
5. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ เมื่อ $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$

ทฤษฎีบท 22 เมื่อ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นลำดับจำกัด และ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับอนันต์ จะเรียกการแสดงผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ หรือ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ ว่า อนุกรม (series)
อนุกรมที่ได้จากลำดับจำกัด เรียกว่า อนุกรมจำกัด (finite series)
อนุกรมที่ได้จากลำดับอนันต์ เรียกว่า อนุกรมอนันต์ (infinite series)
จะใช้สัญลักษณ์ Σ แทนการบวก กล่าวคือ

เขียนแทน $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ ด้วย $\sum_{i=1}^{n} a_i$

และเขียนแทน $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ ด้วย $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$

นิยาม 23 ผลบวกย่อย (partial sums) ของอนุกรม คือ ผลรวมของพจน์ตั้งแต่พจน์ที่ 1 ถึงพจน์ที่ n ของอนุกรม มักเขียนแทนด้วย S_n และเรียก S_n ว่า ผลบวกย่อยที่ n ของอนุกรม
และจะเรียกลำดับ (S_n) ว่า ลำดับของผลบวกย่อย

นิยาม 24 1. ถ้าลำดับของผลบวกย่อย (S_n) ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าแล้ว จะกล่าวว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า และถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n = L$ แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะลู่เข้าสู่ L โดยกล่าวว่า L เป็นผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เขียนเป็น $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$

2. ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ไม่ลู่เข้า จะกล่าวว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก

ทฤษฎีบท 25 ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้าแล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ ย่อมลู่เข้าด้วย และ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

ทฤษฎีบท 26 ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ ย่อมลู่เข้า

ทฤษฎีบท 27 ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า และอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่ออก แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ ย่อมลู่ออก

ทฤษฎีบท 28 ให้อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมที่ $a_n \geq 0$ และ $b_n \geq 0$ ซึ่ง $a_n \leq b_n$ ทุก ๆ ค่าของ n

1. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้าแล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ย่อมลู่เข้าด้วย
2. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออกแล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ย่อมลู่ออกด้วย