บทที่ 4

ฟังก์ชัน $\pi(x)$ และการประยุกต์

4.1 ฟังก์ชัน $\pi(x)$

ก่อนที่จะให้นิยามของฟังก์ชัน $\pi(x)$ เราจะกล่าวถึงนิยามของจำนวนที่เป็นสแคว์-ฟรี และทฤษฎีบทของจำนวนที่เป็นสแคว์-ฟรี ดังนี้

นิยาม 1 จำนวนเต็มจะถูกเรียกว่าเป็น สแคว์-ฟรี (square-free) ก็ต่อเมื่อ จำนวนเต็มนั้นไม่สามารถหารลงตัวได้ด้วยกำลังสองของจำนวนธรรมชาติใด ๆที่มากกว่า 1
ตัวอย่างจำนวนสแคว์-ฟรี ของจำนวนธรรมชาติที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 20 คือ 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19

ทฤษฎีบท 2 แต่ละจำนวนธรรมชาติ n สามารถเขียนอยู่ในรูปของ k^2j ได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น โดยที่ k, j เป็นจำนวนธรรมชาติ และ j เป็นจำนวนสแคว์-ฟรี

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนธรรมชาติที่กำหนดให้
และให้ k เป็นจำนวนธรรมชาติที่มากที่สุด ที่ทำให้ $k^2 \mid n$
ดังนั้น $n = k^2j$ โดยที่ j เป็นจำนวนธรรมชาติ
จะต้องพิสูจน์ว่า j เป็นจำนวนสแคว์-ฟรี
สมมติว่า j ไม่เป็นจำนวนสแคว์-ฟรี
ดังนั้น $j = r^2s$ โดยที่ r,s เป็นจำนวนธรรมชาติ และ $r > 1$
ดังนั้นจะได้ว่า $n = k^2(r^2s) = (kr)^2s$
นั่นคือ $(kr)^2 \mid n$ โดยที่ $kr > k$ เกิดข้อขัดแย้งกับที่กำหนดให้ที่ k เป็นจำนวนที่มากที่สุด ที่ทำให้ $k^2 \mid n$
นั่นคือ $n = k^2j$ โดยที่ k, j เป็นจำนวนธรรมชาติ และ j เป็นจำนวนสแคว์-ฟรี

ต่อไปจะต้องแสดงว่า $n = k^2j$ มีเพียงแบบเดียวเท่านั้น โดยแสดงดังนี้

สมมติว่า $n = k_1^2 j_1$ โดยที่ k_1, j_1 เป็นจำนวนธรรมชาติ และ j_1 เป็นจำนวนสแคว์-ฟรี

ให้ $d = (k, k_1)$

ดังนั้น เรามี $k = dh$, $k_1 = dh_1$ โดยที่ h, h_1 เป็นจำนวนธรรมชาติที่ $(h, h_1) = 1$

เนื่องจาก

$$n = k^2 j = k_1^2 j_1$$

$$n = d^2 h^2 j = d^2 h_1^2 j_1$$

ดังนั้น จะได้ $h^2 j = h_1^2 j_1$

แต่เพราะว่า $(h^2, h_1^2) = 1$(โดยทฤษฎีบท 9 ในบทที่ 2) นั่นคือจะได้ว่า $h^2 \mid j_1$

แต่เนื่องจาก j_1 เป็นจำนวนสแคว์-ฟรี ดังนั้นจะได้ว่า $h = 1$

และจะได้ว่า $k = dh = d$

แต่เนื่องจาก $d \mid k_1$ ดังนั้น $k \mid k_1$ จะทำให้ได้ $k \leq k_1$

แต่เรากำหนดให้ k เป็นจำนวนที่มากที่สุดที่ทำให้ $k^2 \mid n$ และจากสมการ $n = k_1^2 j_1$ ทำให้สามารถสรุปว่า $k = k_1$

ดังนั้นก็จะได้ $j = j_1$ ด้วยเช่นกัน

นั่นคือ $n = k^2j$ มีเพียงแบบเดียวเท่านั้น #

นิยาม 3 ฟังก์ชัน $\pi(x)$ คือ จำนวนของจำนวนเฉพาะที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x โดยที่ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ เช่น

$\pi(1) = 0$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = \pi(3.5) = \pi(4) = 2$,

$\pi(5) = \pi(6) = \pi(6.5) = 3$, $\pi(7) = \pi(8) = \pi(9) = \pi(10) = 4$,

$\pi(100) = 25$, $\pi(1000) = 168$, $\pi(10000) = 1229$, $\pi(10^5) = 9592$,

$\pi(10^6) = 78498$, $\pi(10^7) = 664579$, $\pi(10^8) = 5761455$,

$\pi(10^9) = 50847534$, $\pi(10^{10}) = 455052511$,$\pi(10^{11})$=4118054813,

$\pi(10^{12}) = 37607912018$, $\pi(10^{13}) = 346065536839$,

$\pi(10^{14}) = 3204941750802$, $\pi(10^{15}) = 29844570422669$,

$\pi(10^{16}) = 279238341033925$ เป็นต้น

ดังนั้นเป็นที่เห็นชัดแล้วว่า $\pi(p_n) = n$, $n = 1,2,3, \dots$; p_n คือ จำนวนเฉพาะตัวที่ n มีนักคณิตศาสตร์ชื่อ P. Erdos ได้พิสูจน์อสมการ $\pi(n) \geq \dfrac{\log n}{2 \log 2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

แต่ต่อไป นักคณิตศาสตร์ชื่อ W. Sierpinski ได้แสดงการพิสูจน์อสมการ $\pi(n) \geq \dfrac{\log n}{2 \log 2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ ในอีกรูปแบบหนึ่ง เพื่อการนำไปประยุกต์ใช้ในภายหลัง

เนื่องจากโดยทฤษฎีบท S เราได้ว่า ทุก ๆจำนวนธรรมชาติ จะสามารถเขียนอยู่ในรูป k^2s ได้เพียงแบบเดียว, $k, s \in N$ และ s เป็นสแคว์-ฟรี

นั่นคือ สำหรับแต่ละจำนวน $1, 2, 3, \dots, n$ จะได้ $k^2s \leq n$

แต่ $s \in N$ ดังนั้น $k^2 \leq n$

นั่นคือ $k \leq \sqrt{n}$

หรือกล่าวได้ว่า ค่าของ k มีได้อย่างมากที่สุด $\sqrt{n}$ ค่าที่แตกต่างกัน

จาก s เป็น สแคว์-ฟรี และ $s < n$

ดังนั้น s สามารถเขียนอยู่ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน ที่แต่ละตัวน้อยกว่าหรือเท่ากับ n (ผลคูณของจำนวนเฉพาะจะอยู่ในลำดับ $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{\pi(n)}$)

แต่เนื่องจากจำนวนของผลคูณของจำนวนเฉพาะที่อยู่ในลำดับ $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{\pi(n)}$ จะมีได้ทั้งหมด (รวมจำนวน 1) $2^{\pi(n)}$ แบบ

นั่นคือ เราสามารถสรุปว่า ค่าของ s มีค่าได้อย่างมากที่สุด $2^{\pi(n)}$ ค่าที่แตกต่างกัน

ดังนั้นจำนวนของผลคูณ k^2s (s เป็นสแคว์-ฟรี) โดยที่ $s, k < n$ มีค่าได้อย่างมากที่สุด $\sqrt{n} \cdot 2^{\pi(n)}$

แต่เนื่องจาก ทุก ๆจำนวนธรรมชาติที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ n สามารถเขียนเป็นผลคูณได้

ดังนั้นเรามี $n \leq \sqrt{n} \cdot 2^{\pi(n)}$

นั่นคือ $\sqrt{n} \leq 2^{\pi(n)}$

$\log \sqrt{n} \leq \pi(n) \cdot \log 2$ (ใส่ลอการิธึมฐานธรรมชาติ)

จะได้ว่า $\pi(n) \geq \dfrac{\log n}{2 \log 2}$ (1) #

สิ่งที่น่าสนใจในอสมการ (1) คือ ตัวอสมการ (1) เองได้ทำให้เกิดการพิสูจน์อย่างง่าย ๆ ดังนี้

ให้ k เป็นจำนวนธรรมชาติ และให้ $n = p_k$

จาก (1) จะได้ว่า $\pi(n) = \pi(p_k) = k$

โดย (1) จะได้ว่า

$$k \geq \frac{\log p_k}{2 \log 2}$$

$$k \geq \frac{1}{2} \cdot \log_2 p_k$$

$$2k \geq \log_2 p_k$$

$$p_k \leq 2^{2k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

แต่เนื่องจาก 2^{2k} เป็นจำนวนประกอบ สำหรับทุก $k = 1, 2, 3, \ldots$ และ p_k คือจำนวนเฉพาะตัวที่ k

ดังนั้น จะได้ว่า

$$p_k < 2^{2k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad (2) \qquad \#$$

4.2 การพิสูจน์สัจจพจน์ของ Bertrand (ทฤษฎีบทของ Tchebycheff) (Proof of Bertrand's Postulate. (Theorem of Tchebycheff))

นิยาม 1 กำหนดให้ [x] เป็น จำนวนเต็มที่มากที่สุดซึ่งน้อยกว่าหรือเท่ากับ x โดยที่ x เป็นจำนวนจริง เช่น $\left[\frac{3}{4}\right] = 0$, $\left[-\frac{3}{4}\right] = -1$, $\left[\sqrt{2}\right] = 1$, $\left[\pi\right] = 3$, $\left[-1.4\right] = 2$, $\left[5.8\right] = 5$ เป็นต้น

จากนิยาม 1 จะได้ว่า สำหรับทุกจำนวนจริง x จะได้ว่า $x-1 < [x] \leq x < [x]+1$

<u>หมายเหตุ</u> $[x] = x$ ก็ต่อเมื่อ x เป็นจำนวนเต็ม และนอกจากนั้น เรามี

1. ถ้า k เป็นจำนวนเต็ม และสำหรับ x ที่เป็นจำนวนจริง แล้ว $[x+k] = [x] + k$

พิสูจน์ ให้ $x = [x] + \theta$ โดยที่ $0 \leq \theta < 1$

$x + k = [x] + k + \theta$ โดยที่ $0 \leq \theta < 1$ และ k เป็นจำนวนเต็ม

แต่เนื่องจาก $[x] + k$ เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้นจะได้ว่า $[x + k] = [x] + k$ #

2. สำหรับจำนวนจริง x, y ใด ๆ จะได้ว่า $[x] + [y] \leq [x+y]$ เช่น

$$0 = \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] < \left[\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right] = 1 \text{ แต่ } \left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{1}{2}\right] = \left[\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right] = 0$$

พิสูจน์ ให้ $x = [x] + \theta_1$ โดยที่ $0 \leq \theta_1 < 1$

และให้ $y = [y] + \theta_2$ โดยที่ $0 \leq \theta_2 < 1$

จะได้ว่า $x + y = [x] + [y] + \theta_1 + \theta_2$ (1)

โดยที่ $[x] + [y]$ เป็นจำนวนเต็ม และ $0 \leq \theta_1 + \theta_2 < 2$

ดังนั้นจะได้ว่า $\theta_1 + \theta_2$ ต้องอยู่ในกรณีใดกรณีหนึ่งเท่านั้น จาก 2 กรณีต่อไปนี้

<u>กรณี 1</u> $0 \leq \theta_1 + \theta_2 < 1$

ดังนั้น จาก (1) จะได้ $[x + y] = [x] + [y]$

<u>กรณี 2</u> $1 \leq \theta_1 + \theta_2 < 2$

ดังนั้น จาก (1) จะได้ $[x + y] = [x] + [y] + 1$

นั่นคือ $[x] + [y] \leq [x+y]$ เป็นจริง ไม่ว่า $\theta_1 + \theta_2$ จะอยู่ในกรณีใด ๆ จาก 2 กรณีดังกล่าว #

3. $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in I \\ -1 & x \notin I \end{cases}$

พิสูจน์

<u>กรณี 1</u> ถ้า $x \in I$ จะได้ว่า $[x] = x$ และ $[-x] = -x$

นั่นคือ $[x] + [-x] = x + (-x) = 0$

<u>กรณี 2</u> ถ้า $x \notin I$ จะได้ว่า $x = [x] + \theta, \quad 0 < \theta < 1$

นั่นคือ $-x = -[x] - \theta$

$-x = -1 - [x] + (1 - \theta)$ โดยที่ $-1-[x] \in I$

และ $0 < 1 - \theta < 1$

จะได้ $[-x] = -1 - [x]$

ดังนั้น $[x] + [-x] = -1$ #

4. $0 \leq [x] - 2\left[\frac{x}{2}\right] \leq 1$

(นั่นคือ $[x] - 2\left[\frac{x}{2}\right] = 0$ และ 1 เท่านั้น)

พิสูจน์ จากนิยามของ $[x]$ จะได้อสมการ 2 อสมการ ดังนี้ คือ

$$x - 1 < [x] \leq x \qquad (1)$$

และ $$\frac{x}{2} - 1 < \left[\frac{x}{2}\right] \leq \frac{x}{2}$$

นั่นคือ $$x - 2 < 2\left[\frac{x}{2}\right] \leq x$$

$$-x \leq -2\left[\frac{x}{2}\right] < 2 - x \qquad (2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า

$$-1 < [x] - 2\left[\frac{x}{2}\right] < 2$$

แต่เพราะว่า $[x] - 2\left[\frac{x}{2}\right]$ เป็นจำนวนเต็ม และจำนวนเต็มในช่วง $(-1,2)$ คือ 0 และ 1 เท่านั้น

นั่นคือ $0 \leq [x] - 2\left[\frac{x}{2}\right] \leq 1$ #

ทฤษฎีบท 2 เลขชี้กำลัง a ของจำนวนเฉพาะ p ในการแยกตัวประกอบ n! ออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ คือ

$$a = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$$

พิสูจน์ ให้ n, k เป็นสองจำนวนธรรมชาติที่กำหนดให้

และให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $p \leq n$

จำนวนในลำดับ 1, 2, 3, ... , n ที่ถูกหารได้ด้วย p^k จะเขียนได้ในรูป sp^k ซึ่ง s เป็นจำนวนธรรมชาติ โดยที่ $sp^k \leq n$

นั่นคือ $s \leq \frac{n}{p^k}$ แต่เนื่องจาก $s \in N$ ดังนั้น $s = \left[\frac{n}{p^k}\right]$

นั่นคือ จะได้ เลขชี้กำลัง a ของจำนวนเฉพาะ p ที่อยู่ในการแยกตัวประกอบของ n! ออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ คือ ผลบวกจำนวนของเทอมในลำดับ 1, 2, 3, 4, ... , n ที่ถูกหารได้ด้วย $p, p^2, p^3, \ldots$ #

ตัวอย่าง 1 จงหาเลขชี้กำลังของจำนวนเฉพาะ 2 และ 3 ในการแยกตัวประกอบของ 9! ออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ

วิธีทำ เนื่องจาก $n = 9$ และ $p = 2, 3$

โดยทฤษฎีบท 2 ในหัวข้อ 4.2 จะได้ว่า

ถ้า a_1 เป็นเลขชี้กำลังของ 2 นั่นคือ
$$\begin{aligned} a_1 &= \left[\frac{9}{2}\right] + \left[\frac{9}{2^2}\right] + \left[\frac{9}{2^3}\right] \\ &= 4 + 2 + 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

ถ้า a_2 เป็นเลขชี้กำลังของ 3 นั่นคือ
$$\begin{aligned} a_2 &= \left[\frac{9}{3}\right] + \left[\frac{9}{3^2}\right] \\ &= 3 + 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$(9! = 7 \times 5 \times 3^4 \times 2^7)$ #

ตัวอย่าง 2 จงหาจำนวนของเลข 0 ที่อยู่ในตอนท้ายคำตอบของ 100!

วิธีทำ เราจะต้องหาว่า เลขชี้กำลังของ 2 และ 5 ซึ่งอยู่ในผลคูณของจำนวนเฉพาะของ 100! เป็นเท่าไร

เนื่องจาก $n = 100,\ p = 2$

โดยทฤษฎีบท 2 ในหัวข้อ 4.2 เลขชี้กำลังของ 2 ในการแยกตัวประกอบเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะของ 100! คือ
$$\left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{2^2}\right] + \left[\frac{100}{2^3}\right] + \left[\frac{100}{2^4}\right] + \left[\frac{100}{2^5}\right] + \left[\frac{100}{2^6}\right] = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$$

และเลขชี้กำลังของ 5 คือ $\left[\frac{100}{5}\right] + \left[\frac{100}{5^2}\right] = 20 + 4 = 24$

ดังนั้น คำตอบของ 100! จะมีเลข 0 ลงท้ายทั้งหมด 24 ตัว

(เพราะว่า $2^{97} \times 5^{24} = 10^{24} \times 2^{73}$)

ทฤษฎีบทประกอบ 3 $\binom{2n}{n} > \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ $n > 1$

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนประโยค $\binom{2n}{n} > \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$, $n > 1$

พิจารณา เมื่อ $n = 2$ จะได้ $\binom{4}{2} = 6 > \frac{4^2}{2\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

นั่นคือ $P(2)$ เป็นจริง

สมมติให้ $P(n)$ เป็นจริง สำหรับ $n > 1$

แต่พิจารณา
$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{2n+2}{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$$
$$= 2 \cdot \frac{2n+1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$$
$$> 2 \cdot \frac{2n+1}{n+1} \cdot \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$$ เพราะว่าให้ $P(n)$ เป็นจริง

แต่เพราะว่า $(2n+1)^2 > 4n(n+1)$ นั่นคือจะได้ว่า $2n+1 > \sqrt{4n(n+1)}$

ดังนั้น
$$\binom{2n+2}{n+1} > 2 \cdot \frac{2n+1}{n+1} \cdot \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$$
$$= \frac{2(2n+1)4^n}{\sqrt{4n(n+1)}\sqrt{n+1}}$$
$$> 2 \cdot \frac{4^n}{\sqrt{n+1}} = \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}$$
$$\binom{2n+2}{n+1} > \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}$$

นั่นคือ บทแทรก 3 เป็นจริงโดยการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ #

ทฤษฎีบทประกอบ 4 ผลคูณ P_n ของจำนวนเฉพาะที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ n จะเท่ากับจำนวนที่ไม่มากกว่า 4^n โดยที่ n เป็นจำนวนธรรมชาติ

พิสูจน์ ทฤษฎีบทประกอบ 4 นี้เป็นจริง เมื่อ $n = 1,\ n = 2$
ให้ n เป็นจำนวนธรรมชาติที่มากกว่า 2
สมมติให้ทฤษฎีบทประกอบ 4 เป็นจริง สำหรับจำนวนธรรมชาติที่น้อยกว่า n
ดังนั้น ถ้า n เป็นจำนวนคู่ที่มากกว่า 2 แล้ว $P_n = P_{n-1}$
นั่นคือทฤษฎีบทประกอบ 4 เป็นจริง สำหรับจำนวน n ที่เป็นจำนวนคู่ที่มากกว่า 2
แต่อย่างไรก็ตาม ถ้า $n = 2k + 1, k \in N$ แล้วแต่ละจำนวนเฉพาะ p ซึ่ง $k + 2 \leq p \leq 2k + 1$ คือ ตัวหารลงตัวของ $\binom{2k+1}{k}$

เพราะเนื่องจาก
$$\binom{2k+1}{k} = \frac{(2k+1)2k(2k-1)\ldots(k+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k} \qquad (1)$$

แต่เนื่องจาก
$$(1+1)^{2k+1} = \binom{2k+1}{0} + \binom{2k+1}{1} + \binom{2k+1}{2} + \ldots + \binom{2k+1}{k} + \binom{2k+1}{k+1} + \ldots + \binom{2k+1}{2k+1}$$

ดังนั้น
$$2^{2k+1} \geq \binom{2k+1}{k} + \binom{2k+1}{k+1} = 2\binom{2k+1}{k}$$
$$2^{2k} \geq \binom{2k+1}{k}$$
$$4^{k} \geq \binom{2k+1}{k}$$

ดังนั้นจะได้ว่า ผลคูณของจำนวนเฉพาะ p ทั้งหมด ซึ่ง $k + 2 \leq p \leq 2k + 1$ คือ ตัวหารลงตัวของจำนวนในสมการ (1) ซึ่งมีค่าไม่มากกว่า 4^k
จากที่สมมติว่าทฤษฎีบทประกอบ 4 เป็นจริง สำหรับจำนวนธรรมชาติที่น้อยกว่า n, ทำให้ผลคูณของจำนวนเฉพาะที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ $k + 1$ มีค่าน้อยกว่า 4^{k+1}
เรามี $P_n = P_{2k+1} < 4^k.4^{k+1} = 4^{2k+1} = 4^n$
นั่นคือ $P_n < 4^n$ #

ทฤษฎีบทประกอบ 5 ถ้า p เป็นตัวหารลงตัวเฉพาะของ $\binom{2n}{n}$ ที่ $p \geq \sqrt{2n}$ แล้ว เลขชี้กำลังของ p ในการแยกตัวประกอบของ $\binom{2n}{n}$ ออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะคือ 1

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 2 ในหัวข้อ 4.2 เลขชี้กำลังของจำนวนเฉพาะ p ในการแยกตัวประกอบออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะของ (2n)!

คือ $\left[\frac{2n}{p}\right] + \left[\frac{2n}{p^2}\right] + \left[\frac{2n}{p^3}\right] + \ldots$

และเลขชี้กำลังของจำนวนเฉพาะ p ในการแยกตัวประกอบออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะของ n! คือ $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$

แต่เนื่องจาก เรารู้ว่า $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

ดังนั้น เลขชี้กำลังของจำนวนเฉพาะ p ในการแยกตัวประกอบออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะของ $\binom{2n}{n}$ คือ a โดยที่

$$a = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right)$$

ถ้า $p \geq \sqrt{2n}$ แล้ว $p = \sqrt{2n}$ เฉพาะในกรณีที่ $n = 2$ เท่านั้น

นั่นคือสำหรับ $n \neq 2$ เรามี $p > \sqrt{2n}$ ดังนั้น $a = \left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] < 2$

เนื่องจาก a เป็นจำนวนเต็ม และจาก $a < 2$ นั่นคือ $a \leq 1$

แต่อย่างไรก็ตาม สำหรับ $n = 2$ เราคำนวณได้โดยตรง คือ จะได้ $\binom{4}{2} = 2 \cdot 3$ #

ทฤษฎีบทประกอบ 6 ตัวหารลงตัวทุกตัวของ $\binom{2n}{n}$ ซึ่งอยู่ในรูป p^r คือ จำนวนที่ไม่มากกว่า 2n โดยที่ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ r เป็นจำนวนธรรมชาติ

และ $\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเฉพาะ p ที่ $p^r \mid \binom{2n}{n}$ แล้วเลขชี้กำลังของ p ในการแยกตัวประกอบของ $\binom{2n}{n}$ ออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ คือ a

$$a = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right) \geq r$$

พิจารณา ถ้า $p^r > 2n$ แล้ว เราจะได้ $\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right] = 0, \quad k \geq r$

ทำให้ได้ว่า $$a = \sum_{k=1}^{r-1}\left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right) \tag{1}$$

ดังนั้น (1) จะได้ $a \leq r - 1$ โดยหมายเหตุ ข้อ 4 ในหัวข้อ 4.2 ซึ่งขัดแย้งกับความเป็นจริงที่ $a \geq r$

นั่นคือ $p^r \leq 2n$

ต่อไปจะพิสูจน์ส่วนที่สอง คือ จะแสดงว่า $\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}$

เนื่องจากในการแยกตัวประกอบของ $\binom{2n}{n}$ ออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ จะมีแต่จำนวนเฉพาะที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 2n เท่านั้น

ดังนั้น เราจะได้ $\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}$ #

ทฤษฎีบทประกอบ 7 ถ้า n เป็นจำนวนธรรมชาติที่มากกว่า 2 แล้วจะไม่มีจำนวนเฉพาะ p โดยที่ $\frac{2}{3}n < p \leq n$ เป็นตัวหารลงตัวของ $\binom{2n}{n}$

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนธรรมชาติมากกว่า 2

พิจารณา เมื่อ n = 3 ไม่มีจำนวนเฉพาะ p โดยที่ $2 < p \leq 3$ เป็นตัวหารลงตัวของ $\binom{6}{3} = 20$

และเมื่อ n = 4 ไม่มีจำนวนเฉพาะ p โดยที่ $\frac{8}{3} < p \leq 4$ เป็นตัวหารลงตัวของ $\binom{8}{4} = 70$

นั่นคือ ทฤษฎีบทประกอบ 7 เป็นจริง สำหรับ n = 3, 4

ต่อไปจะต้องแสดงว่าทฤษฎีบทประกอบ 7 เป็นจริง สำหรับ n > 4

ถ้า $\frac{2}{3}n < p \leq n$ แล้วจะได้ $\frac{2n}{p} < 3$ และ $\frac{n}{p} \geq 1$

นั่นคือ $\left[\frac{2n}{p}\right] \leq 2$ และ $\left[\frac{n}{p}\right] \geq 1$

ดังนั้น $\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] \le 2 - 2 = 0$

จาก $\frac{4n^2}{p^2} < 9$ ทำให้ได้ว่าสำหรับ $k > 1$ แล้วเราจะมี

$$p^k > \frac{4}{9}n^2$$

$$\frac{2n}{p^k} < \frac{9}{2n} < 1 \quad \text{สำหรับ } n > 4$$

นั่นคือ $\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right] = 0$ สำหรับทุก $k > 1$ และ $n > 4$

ดังนั้นเราสามารถสรุปว่า สำหรับ $n > 4$ เลขชี้กำลังของจำนวนเฉพาะ p ในการแยกตัวประกอบของ $\binom{2n}{n}$ ออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ เป็น 0 หรือพูดอีกนัยหนึ่งว่า ไม่มีจำนวนเฉพาะ p ที่ $\frac{2}{3}n < p \le n$ เป็นตัวหารลงตัวของ $\binom{2n}{n}$ #

ทฤษฎีบทประกอบ 8 เลขชี้กำลังของจำนวนเฉพาะ p โดยที่ $n < p < 2n$ ในการแยกตัวประกอบของ $\binom{2n}{n}$ ออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ มีค่าเท่ากับ 1

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนธรรมชาติ

สำหรับ $n = 1$ จะทำให้ไม่มีจำนวนเฉพาะ p ที่ $1 < p < 2$ ซึ่งไม่มีอะไรที่จะพิสูจน์

ต่อไปจะแสดงว่า ทฤษฎีบทประกอบ 8 เป็นจริง สำหรับ $n > 1$

พิจารณา สำหรับ $n < p < 2n$ เราจะได้ว่า $\frac{n}{p} < 1$ และ $1 < \frac{2n}{p} < 2$

นั่นคือ $\left[\frac{2n}{p}\right] = 1$ และ $\left[\frac{n}{p}\right] = 0$

สำหรับ $k \geq 2$ เรามี $\frac{2n}{p^k} \leq \frac{2n}{p^2} = \frac{2}{n} \cdot \frac{n^2}{p^2} < \frac{2}{n}$

ดังนั้น สำหรับ $n > 1$ จะได้ $\frac{2}{n} \leq 1$ ทำให้ได้ว่า $\frac{2n}{p^k} < 1$

นั่นคือ $\left[\frac{2n}{p^k}\right] = 0$ และจาก $\left[\frac{n}{p}\right] = 0$ จะได้ $\left[\frac{n}{p^k}\right] = 0$

ดังนั้น เลขชี้กำลังของจำนวนเฉพาะ p ในการแยกตัวประกอบของ $\binom{2n}{n}$

ออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ จะเท่ากับ 1 #

ทฤษฎีบทประกอบ 9 $\pi(n) \leq \frac{1}{2}n - 1$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ $n \geq 14$

พิสูจน์ พิจารณา $\pi(14) = 6 = \frac{14}{2} - 1$

นั่นคือ ทฤษฎีบทประกอบ 9 เป็นจริง สำหรับ $n = 14$

สมมติว่า n เป็นจำนวนธรรมชาติ และ $n \geq 15$

ในลำดับ $1, 2, 3, \ldots, n$; จำนวนคู่ $4, 6, 8, \ldots, 2\left[\frac{n}{2}\right]$ เป็นจำนวนประกอบ

และจำนวนของจำนวนคู่เหล่านั้น เท่ากับ $\left[\frac{n}{2}\right] - 1$

นอกจากนั้น ในลำดับ $1, 2, 3, \ldots, n$ สำหรับ $n \geq 15$ มีจำนวนคี่ที่ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ เช่น 1, 9, 15

ดังนั้น $\pi(n) \leq n - (\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 + 3) = n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 2$

แต่เนื่องจาก $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil > \frac{n}{2} - 1$

จะได้ว่า $\pi(n) < \frac{n}{2} - 1$ สำหรับ $n \geq 15$ #

ทฤษฎีบทประกอบ 10 ให้ R_n เป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ p ที่ $n < p \leq 2n$ (ให้ $R_n = 1$ ในกรณีที่ไม่มีจำนวนเฉพาะ p) แล้ว $R_n > \dfrac{4^{n/3}}{2\sqrt{n}\left(2n\right)^{\sqrt{n/2}}}$,

สำหรับทุก $n \geq 98$

พิสูจน์ จากนิยามของ R_n จะได้ทันทีว่า $R_n \left| \binom{2n}{n} \right.$

นั่นคือ จะมี Q_n โดยที่ $\binom{2n}{n} = R_n \cdot Q_n$ เมื่อ Q_n เป็นจำนวนธรรมชาติ

โดยทฤษฎีบทประกอบ 8 ในหัวข้อ 4.2 จะสรุปได้ว่าไม่มีจำนวนเฉพาะ p ที่ $n < p \leq 2n$ ปรากฏอยู่ในการแยกตัวประกอบของ Q_n ออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ

ดังนั้น แต่ละจำนวนเฉพาะ p ที่ปรากฏอยู่ในรูปการแยกตัวประกอบของ Q_n นั้นต้องมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ n

ดังนั้นโดยทฤษฎีบทประกอบ 7 ในหัวข้อ 4.2 สรุปได้ว่า แต่ละจำนวนเฉพาะ p ที่ปรากฏอยู่ในการแยกตัวประกอบของ Q_n แล้ว $p \leq \frac{2}{3}n$

นั่นคือผลคูณของจำนวนเฉพาะ p ทั้งหมดที่แตกต่างกัน โดยที่ $p \mid Q_n$ จะมีค่าไม่มากกว่าผลคูณของจำนวนเฉพาะที่ไม่มีจำนวนใดมากกว่า $\frac{2}{3}n$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 4 ในหัวข้อ 4.2 จะได้ว่าผลคูณของจำนวนเฉพาะ p ($p \leq \frac{2}{3}n$) ที่แตกต่างกันทั้งหมด $\leq 4^{2n/3}$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 5 ในหัวข้อ 4.2 และความสัมพันธ์ที่ $Q_n \mid \binom{2n}{n}$ จะได้เลขชี้กำลังของจำนวนเฉพาะ p ตัวหนึ่งในการแยกตัวประกอบของ Q_n ออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ มีค่ามากกว่า 1 เมื่อ $p < \sqrt{2n}$ เท่านั้น ดังนั้นจำนวนของจำนวนเฉพาะ p ที่ $p < \sqrt{2n}$ ตามทฤษฎีบทประกอบ 9 ในหัวข้อ 4.2 เมื่อแทนค่า n ด้วย $\sqrt{2n}$ (เพราะว่าการแทนค่านี้มีความหมายเนื่องจากเมื่อ $n \geq 98$ แล้วเรามี$\sqrt{2n} \geq 14$) จะน้อยกว่าหรือเท่ากับ $\frac{\sqrt{2n}}{2}-1$

นั่นคือ จำนวนของจำนวนเฉพาะ p ($p < \sqrt{2n}$) ทั้งหมดที่แตกต่างกันจะน้อยกว่า $\frac{\sqrt{2n}}{2}$

นั่นคือ $$\pi(\sqrt{2n}) < \frac{\sqrt{2n}}{2}$$

และโดยทฤษฎีบทประกอบ 6 ในหัวข้อ 4.2 ดังนั้น ผลคูณของจำนวนเฉพาะที่อยู่ในการแยกตัวประกอบของ Q_n ออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ p ($p < \sqrt{2n}$) คือ มีค่าน้อยกว่า $\left(\sqrt{2n}\right)^{\sqrt{2n}/2}$

แต่ $$\left(\sqrt{2n}\right)^{\sqrt{2n}/2} < \left(2n\right)^{\sqrt{2n}/2}$$

นั่นคือจะได้ว่าผลคูณของจำนวนเฉพาะที่อยู่ในการแยกตัวประกอบของ Q_n ออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ p ($p < \sqrt{2n}$) จะมีค่าน้อยกว่า $\left(2n\right)^{\sqrt{2n}/2}$

[แต่เนื่องจาก Q_n คือ ผลคูณของผลคูณของจำนวนเฉพาะ p ที่ ($p \leq \frac{2}{3}n$) กับผลคูณของจำนวนเฉพาะ p ($p < \sqrt{2n}$)]

ดังนั้น จะได้ว่า $$Q_n < 4^{2n/3} \cdot \left(2n\right)^{\sqrt{2n}/2}$$

แต่เพราะว่า $\binom{2n}{n} = R_n \cdot Q_n$ และจากทฤษฎีบทประกอบ 3 ในหัวข้อ4.2

เรามี $\binom{2n}{n} > \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ $n > 1$

ดังนั้น จะได้ $R_n \cdot Q_n > \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$

นั่นคือ $R_n > \frac{4^n}{2\sqrt{n} \cdot Q_n}$

$$R_n > \frac{4^n}{2\sqrt{n} \cdot 4^{2n/3}(2n)^{\sqrt{2n}/2}}$$

$$R_n > \frac{4^{n/3}}{2\sqrt{n}(2n)^{\sqrt{n/2}}} \quad \#$$

ทฤษฎีบทประกอบ 11 $2^k > 18(k+1)$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ $k \geq 8$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนธรรมชาติ $k \geq 8$

พิจารณา เมื่อ $k = 8$ จะได้ $2^8 = 256 > 18(8+1) = 162$ เป็นจริง

สมมติให้ $2^k > 18(k+1)$ เป็นจริง

จะต้องแสดงว่า $2^{k+1} > 18(k+2)$

เนื่องจาก
$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2^k + 2^k \\ &> 18k + 18 + 18k + 18 \\ &> 18k + 36 \\ &= 18(k+2) \end{aligned}$$

นั่นคือ $2^{k+1} > 18(k+2)$ #

ทฤษฎีบทประกอบ 12 $2^x > 18x$ สำหรับจำนวนจริง $x \geq 8$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนจริง $x \geq 8$ จะได้ว่า $[x] \geq 8$ นั่นคือ $x \geq [x] \geq 8$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทประกอบ 11 ในหัวข้อ 4.2 จะได้ว่า

$$2^x \geq 2^{[x]} > 18([x]+1) > 18x$$

นั่นคือ $2^x > 18x$ เมื่อ $x \geq 8$ #

ทฤษฎีบทประกอบ 13 $2^k > 6(k+1)$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ $k \geq 6$

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบทประกอบ 11 ในหัวข้อ 4.2 สำหรับจำนวนธรรมชาติ $k \geq 8$ เรามี $2^k > 18(k+1) > 6(k+1)$

ดังนั้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทประกอบ 13 จะพิสูจน์เฉพาะในกรณี $k = 6$ และ $k = 7$ เท่านั้น

พิจารณา เมื่อ $k = 6$ จะได้ $2^6 = 64 > 6(6+1) = 42$ เป็นจริง

และ $k = 7$ จะได้ $2^7 = 128 > 6(7+1) = 48$ เป็นจริง #

ทฤษฎีบทประกอบ 14 $2^x > 6x$ สำหรับจำนวนจริง $x \geq 6$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนจริง $x \geq 6$ จะได้ว่า $[x] \geq 6$ นั่นคือ $x \geq [x] \geq 6$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทประกอบ 13 ในหัวข้อ 4.2 จะได้ว่า

$$2^x \geq 2^{[x]} > 6([x]+1) > 6x$$

นั่นคือ $2^x > 6x$ เมื่อ $x \geq 6$ #

ทฤษฎีบทประกอบ 15 ถ้า n เป็นจำนวนธรรมชาติโดยที่ $n \geq 648$ แล้ว $R_n > 2n$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบทประกอบ 10 ในหัวข้อ 4.2 จึงเป็นการเพียงพอที่จะพิสูจน์ว่า

ถ้า $n \geq 648$ แล้ว $4^{n/3} > 4n\sqrt{n}(2n)^{\sqrt{n/2}}$ โดยแสดงดังนี้

เนื่องจาก ถ้า $n \geq 648$ แล้ว $\dfrac{\sqrt{2n}}{6} \geq 6$

และโดยทฤษฎีบทประกอบ 14 ในหัวข้อ 4.2, $2^x > 6x$ สำหรับจำนวนจริง x ที่ $x \geq 6$

ดังนั้นจะได้ $(2)^{\sqrt{2n}/6} > 6 \cdot \dfrac{\sqrt{2n}}{6} = \sqrt{2n}$

นั่นคือ $\left(2^{\sqrt{2n}/6}\right)^{\sqrt{2n}} > \left(\sqrt{2n}\right)^{\sqrt{2n}}$

$$2^{n/3} > \left(\sqrt{2n}\right)^{\sqrt{\frac{4}{2}n}} = (2n)^{\sqrt{n/2}}$$

$$2^{n/3} > (2n)^{\sqrt{n/2}}$$

แต่เนื่องจาก เมื่อ $n \geq 648$ จะได้ $\dfrac{2n}{9} > 8$

ต่อไปโดยการใช้ทฤษฎีบทประกอบ 12 ในหัวข้อ 4.2 จะได้ว่า

$$(2)^{2n/9} > 18 \cdot \frac{2n}{9} = 4n$$

นั่นคือ $(2)^{n/3} > (4n)^{3/2} = 4n\sqrt{4n} > 4n\sqrt{n}$

นั่นคือ สำหรับ $n \geq 648$ จะได้
$$\begin{aligned} 4^{n/3} &= (2)^{n/3} \cdot (2)^{n/3} \\ &> (2n)^{\sqrt{n/2}} 4n\sqrt{n} \\ &= 4n\sqrt{n}(2n)^{\sqrt{n/2}} \quad \# \end{aligned}$$

ทฤษฎีบทประกอบ 16 ถ้า $n \geq 648$ แล้วระหว่าง n และ 2n จะมีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุดสองจำนวนที่แตกต่างกัน

พิสูจน์ จากนิยามของ R_n จะได้ว่า ถ้ามีจำนวนเฉพาะอย่างมากที่สุดหนึ่งตัวระหว่าง n และ 2n แล้วเราจะมี $R_n \leq 2n$, $n \geq 648$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะขัดแย้งกับทฤษฎีบทประกอบ 15 ในหัวข้อ 4.2 ที่ว่า ถ้า n เป็นจำนวนธรรมชาติที่ $n \geq 648$ แล้ว $R_n > 2n$

นั่นคือ ถ้า $n \geq 648$ แล้วระหว่าง n และ 2n มีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุดสองจำนวนที่แตกต่างกัน #

ทฤษฎีบท 17 ถ้า n เป็นจำนวนธรรมชาติที่มากกว่า 5 แล้วระหว่าง n และ 2n จะมีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุดสองจำนวนที่แตกต่างกัน

พิสูจน์ สำหรับ n = 6 ทฤษฎีบท 17 เป็นจริง เพราะว่าระหว่าง 6 และ 12 มีจำนวนเฉพาะสองจำนวน คือ 7, 11

และทฤษฎีบท 17 เป็นจริง โดยทฤษฎีบทประกอบ 16 ในหัวข้อ 4.2 สำหรับ $n \geq 648$

ดังนั้นจะพิสูจน์ว่า ทฤษฎีบทเป็นจริง สำหรับ $7 \leq n \leq 647$ โดยแสดงดังนี้

ให้ลำดับของจำนวนเฉพาะ $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_m$ ที่ $q_0 = 7$, $q_k < 2q_{k-2}$, สำหรับ $k = 2, 3, 4, \ldots, m$ และ $q_{m-1} > 647$

ให้ n เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ ที่ $7 \leq n \leq 647$

เทอมแรกของลำดับ $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_m$ มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ n และเทอมรองสุดท้ายของลำดับ $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_m$ มีค่ามากกว่า 647 และมากกว่าหรือเท่ากับ n นั่นคือ ด้วยวิธีนี้ มีดัชนีล่าง k ที่มากที่สุด ซึ่ง $k < m-1$ โดยที่ $q_k \leq n$ เรามี $k+2 \leq m$, $n < q_{k+1}$

ดังนั้น จะได้ความสัมพันธ์ $q_{k+2} < 2q_k \leq 2n$

$$n < q_{k+1} < q_{k+2} < 2q_k \leq 2n$$

นั่นคือ ระหว่าง n และ 2n จะมีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุด 2 ตัว คือ q_{k+1} และ q_{k+2} #

<u>หมายเหตุ</u> โดยการใช้ตารางของจำนวนเฉพาะ เราสามารถตรวจอย่างง่ายๆว่า ลำดับของจำนวนเฉพาะ $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_m$ ดังกล่าวข้างต้นนี้ คือ ลำดับ 7, 11, 13, 19, 23, 37, 43, 73, 83, 139, 163, 277, 317, 547, 631, 653, 1259

ตัวอย่าง 3 จำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุด 2 จำนวนที่แตกต่างกันที่อยู่ระหว่าง n และ 2n สำหรับจำนวนธรรมชาติ n ที่มากกว่า 5 ดังต่อไปนี้

n = 6, **7, 11**, 12 = 2n

n = 7, **11, 13**, 14 = 2n

n = 8, **11, 13**, 16 = 2n

n = 9, **11, 13, 17**, 18 = 2n

n = 10, **11, 13, 17, 19**, 20 = 2n

n = 11, **13, 17, 19**, 22 = 2n

n = 12, **13, 17, 19, 23**, 24 = 2n

n = 13, **17, 19, 23**, 26 = 2n

n = 14, **17, 19, 23**, 28 = 2n

n = 15, **17, 19, 23, 29**, 30 = 2n

ทฤษฎีบท 18 (Tchebycheff) ถ้า n เป็นจำนวนธรรมชาติที่มากกว่า 3 แล้วระหว่าง n และ 2n − 2 มีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุดหนึ่งจำนวน

พิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนธรรมชาติที่มากกว่า 3

พิจารณา สำหรับ n = 4 ทฤษฎีบทเป็นจริง เพราะว่ามีจำนวนเฉพาะคือ 5 อยู่ระหว่าง 4 และ 6

และ n = 5 ทฤษฎีบทเป็นจริง เพราะว่ามีจำนวนเฉพาะคือ 7 อยู่ระหว่าง 5 และ 8

ต่อไปจะต้องแสดงว่า ทฤษฎีบท 18 เป็นจริง สำหรับ $n > 5$ โดยแสดงดังนี้

จากทฤษฎีบท 17 ในหัวข้อ 4.2 จะมีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุดสองจำนวนที่แตกต่างกัน ที่อยู่ระหว่าง n และ 2n สมมติให้ คือ p และ q

ถ้าให้ q เป็นจำนวนเฉพาะตัวที่มากที่อยู่ระหว่าง n และ 2n

ดังนั้นเราจะพิจารณา q ออกเป็น 2 กรณี คือ

<u>กรณี 1</u> ถ้า $q = 2n - 1$
เนื่องจาก $2n - 2$ เป็นจำนวนประกอบ
ดังนั้นจะพบว่า p ซึ่งเป็นจำนวนเฉพาะตัวที่เหลือที่อยู่ระหว่าง n และ 2n นั้น ต้องมีค่าน้อยกว่า 2n-2
นั่นคือ เรามีจำนวนเฉพาะ p ที่ $n < p < 2n - 2$

<u>กรณี 2</u> ถ้า $q < 2n - 1$
แต่เพราะว่า $p < q$ และเนื่องจาก $2n - 2$ เป็นจำนวนประกอบ
ดังนั้น เราก็ยังคงมีจำนวนเฉพาะ p ที่ $n < p < 2n - 2$ #

ตัวอย่าง 4 จำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุด 1 จำนวนที่อยู่ระหว่าง n และ 2n - 2 สำหรับจำนวนธรรมชาติ n ที่มากกว่า 3 ดังต่อไปนี้

n = 4, **5**, 6 = 2n - 2

n = 5, **7**, 8 = 2n - 2

n = 6, **7**, 10 = 2n - 2

n = 7, **11**, 12 = 2n - 2

n = 8, **11**, **13**, 14 = 2n - 2

n = 9, **11**, **13**, 16 = 2n - 2

n = 10, **11**, **13**, **17**, 18 = 2n - 2

บทแทรก 19 ถ้า n เป็นจำนวนธรรมชาติที่มากกว่า 1 แล้วระหว่าง n และ 2n จะมีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุดหนึ่งจำนวน

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 18 ในหัวข้อ 4.2 ทำให้บทแทรกนี้เป็นจริงสำหรับจำนวนธรรมชาติ n ที่ $n > 3$ ดังนั้น เราเพียงแต่ตรวจสอบว่า สำหรับ n = 2 และ 3 บทแทรก 19 นี้ ยังคงเป็นจริงหรือไม่ ดังต่อไปนี้
สำหรับ n = 2 มีจำนวนเฉพาะคือ 3 อยู่ระหว่าง 2 และ 4
นั่นคือ บทแทรก 19 เป็นจริง
และสำหรับ n = 3 มีจำนวนเฉพาะคือ 5 อยู่ระหว่าง 3 และ 6
นั่นคือ บทแทรก 19 เป็นจริง #

บทแทรก 20 $p_k < 2^k$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ k ที่มากกว่า 1

พิสูจน์ จะพิสูจน์โดยใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ให้จำนวนธรรมชาติ k มากกว่า 1

เนื่องจาก เรารู้ว่า $p_2 = 3 < 2^2$ เป็นจริง

สมมติให้ สำหรับจำนวนธรรมชาติ k, $p_k < 2^k$ เป็นจริง

โดยบทแทรก 19 ในหัวข้อ 4.2 ได้ว่า มีจำนวนเฉพาะ p ระหว่าง 2^k และ $2 \cdot 2^k$

ดังนั้น จากที่สมมติไว้ จะทำให้จำนวนเฉพาะ p ตัวนั้น ต้องมากกว่า p_k

แต่เนื่องจาก $p_k < p_{k+1}$ สำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ k

นั่นคือ $p_{k+1} \leq p < 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$

ดังนั้น $p_k < 2^k$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ k ที่มากกว่า 1 #

บทแทรก 21 ในการแยกตัวประกอบออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะของ n! ที่ $n > 1$ จะมีตัวประกอบเฉพาะอย่างน้อยที่สุดหนึ่งจำนวนที่มีเลขชี้กำลังเป็น 1

พิสูจน์ สำหรับ $n = 2$ บทแทรกนี้เป็นจริง

ต่อไปจะพิจารณา จำนวนธรรมชาติ n ออกเป็น 2 กรณี คือ

<u>กรณี 1</u> ถ้า $n = 2k > 1$, k เป็นจำนวนธรรมชาติที่มากกว่า 1

โดยบทแทรก 19 ในหัวข้อ 4.2 จะได้ว่า ระหว่าง k และ 2k มีจำนวนเฉพาะ p

อย่างน้อยหนึ่งตัว ที่ $k < p < 2k$

ทำให้ได้ว่า $k < p < 2k = n = 2k < 2p$

$$p < n < 2p$$

จะได้ว่า p เป็นตัวหารลงตัวเพียงตัวหนึ่งเท่านั้นของตัวประกอบของ

ผลคูณ $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ ที่มีเลขชี้กำลังเป็น 1

นั่นคือจะมีตัวประกอบเฉพาะอย่างน้อยที่สุดหนึ่งจำนวนที่เลขชี้กำลังเป็น 1

<u>กรณี 2</u> แต่ถ้า $n = 2k+1 > 1$, k เป็นจำนวนธรรมชาติ

ถ้า $k = 1$ จะได้ $n = 3$ นั่นคือ บทแทรกนี้เป็นจริง

ถ้า $k > 1$ จะได้ว่า

โดยบทแทรก 19 ในหัวข้อ 4.2 จะมีจำนวนเฉพาะ p อย่างน้อยหนึ่งตัว ที่

$k < p < 2k$

ดังนั้น $k < p < 2k < 2k + 1 = n$

ทำให้ได้ว่า $2k < 2p$

แต่เนื่องจาก $2k$ และ $2p$ ต่างเป็นจำนวนคู่ จึงทำให้ค่าของทั้งสองจำนวนต่างกันอยู่สองเป็นอย่างน้อย

ดังนั้น $2k + 1 < 2p$

นั่นคือจะได้ว่า $k < p < 2k + 1 = n < 2p$

$$p < n < 2p$$

จะได้ว่า p เป็นตัวหารลงตัวเพียงตัวหนึ่งเท่านั้นของตัวประกอบของผลคูณ $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ ที่มีเลขชี้กำลังเป็น 1

นั่นคือจะมีตัวประกอบเฉพาะอย่างน้อยที่สุดหนึ่งจำนวนที่เลขชี้กำลังเป็น 1 #

ตัวอย่าง 5 การแยกตัวประกอบออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะของ $n!$ ที่ $n > 1$

$n = 2$, $2! = 2$

$n = 3$, $3! = 2 \times 3$

$n = 4$, $4! = 2^3 \times 3$

$n = 5$, $5! = 2^3 \times 3 \times 5$

$n = 6$, $6! = 2^4 \times 3^2 \times 5$

$n = 7$, $7! = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$

$n = 8$, $8! = 2^7 \times 3^2 \times 5 \times 7$

$n = 9$, $9! = 2^7 \times 3^4 \times 5 \times 7$

$n = 10$, $10! = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$

$n = 11$, $11! = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7 \times 11$

$n = 12$, $12! = 2^{10} \times 3^5 \times 5^2 \times 7 \times 11$

บทแทรก 22 สำหรับจำนวนธรรมชาติ n ที่มากกว่า 1 n! ไม่สามารถเขียนในรูปจำนวนธรรมชาติจำนวนหนึ่งที่ยกกำลัง k , $k > 1$

พิสูจน์ เป็นผลโดยตรงจากบทแทรก 21 ในหัวข้อ 4.2 #

ทฤษฎีบท 23 $p_{k+2} < 2 \cdot p_k$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ $k > 3$

พิสูจน์ ให้ k เป็นจำนวนธรรมชาติที่มากกว่า 3

จะได้ $p_k > p_3 = 5$

จากทฤษฎีบท 17 ในหัวข้อ 4.2 ได้ว่า ระหว่าง p_k และ $2 \cdot p_k$ มีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุดสองจำนวนที่แตกต่างกัน

และเนื่องจากจำนวนเฉพาะที่น้อยที่สุดสองจำนวนที่มากกว่า p_k คือ p_{k+1} และ p_{k+2}

นั่นคือ เราต้องมี $p_{k+2} < 2 \cdot p_k$ #

<u>ข้อสังเกต</u> จากการพิสูจน์ทฤษฎีบท 23 ทำให้เราสรุปว่า ทฤษฎีบท 17 ทำให้เกิดทฤษฎีบท 23

ต่อไปเราสามารถแสดงได้ว่า ทฤษฎีบท 23 ก็ทำให้เกิดทฤษฎีบท 17 โดยแสดงได้ดังนี้

พิจารณาจำนวนธรรมชาติ n ที่มากกว่า 5 ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 กรณี คือ

<u>กรณี 1</u> สำหรับ $n = 6$ จะได้ว่าระหว่าง 6 และ 12 มีจำนวนเฉพาะ 2 จำนวน คือ 7, 11

<u>กรณี 2</u> ให้ n เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ ที่มากกว่า 6 นั่นคือ $n \geq 7$

ให้ p_k เป็นจำนวนเฉพาะที่มากที่สุด ที่ $p_k \leq n$

แต่เนื่องจาก $p_4 = 7 \leq n$

ดังนั้น จะได้ $k = 4 > 3$ และ $p_{k+1} > n$

โดยทฤษฎีบท 23 ในหัวข้อ 4.2 จะได้ว่า $p_{k+2} < 2 \cdot p_k$

$$p_{k+2} < 2 \cdot p_k \leq 2n$$

$$n < p_{k+1} < p_{k+2} < 2 \cdot p_k \leq 2n$$

นั่นคือ จะได้ว่าระหว่าง n และ 2n มีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุด 2 จำนวน คือ p_{k+1} และ p_{k+2} #

นั่นคือ ทฤษฎีบท 17 ในหัวข้อ 4.2 สมมูลกับทฤษฎีบท 23 ในหัวข้อ 4.2

บทแทรก 24 $p_{k+1} < 2 \cdot p_k$ สำหรับ $k = 1, 2, 3, \ldots$

พิสูจน์ ให้ $k = 1, 2, 3, \ldots$

เราจะพิจารณา k ออกเป็น 2 กรณี คือ

<u>กรณี 1</u> $k = 1, 2, 3$

ถ้า $k = 1$ จะได้ว่า $p_2 = 3 < 4 = 2p_1$

ถ้า $k = 2$ จะได้ว่า $p_3 = 5 < 6 = 2p_2$

ถ้า $k = 3$ จะได้ว่า $p_4 = 7 < 10 = 2p_3$

<u>กรณี 2</u> $k > 3$

จากทฤษฎีบท 23 ในหัวข้อ 4.2 จะได้ว่า $p_{k+2} < 2 \cdot p_k$

$$p_{k+1} < p_{k+2} < 2 \cdot p_k$$

ดังนั้น $p_{k+1} < 2 \cdot p_k$

นั่นคือ $p_{k+1} < 2 \cdot p_k$ สำหรับ $k = 1, 2, 3, \ldots$ #

บทแทรก 25 $p_{k+2} < p_k + p_{k+1}$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ k ที่มากกว่า 1

พิสูจน์ ให้ k = 2, 3, 4, ...

เราจะพิจารณา k ออกเป็น 2 กรณี คือ

<u>กรณี 1</u> k = 2, 3

ถ้า k = 2 จะได้ว่า $p_4 = 7 < 3 + 5 = p_2 + p_3$

ถ้า k = 3 จะได้ว่า $p_5 = 11 < 5 + 7 = p_3 + p_4$

<u>กรณี 2</u> $k > 3$

จากทฤษฎีบท 23 ในหัวข้อ 4.2 จะได้ว่า $p_{k+2} < 2p_k$

$$p_k < p_{k+1} < p_{k+2} < 2p_k$$

$$p_{k+2} < 2p_k = p_k + p_k < p_k + p_{k+1}$$

ดังนั้น $p_{k+2} < p_k + p_{k+1}$

นั้นคือ $p_{k+2} < p_k + p_{k+1}$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ k ที่มากกว่า 1 #

4.3 อสมการสำหรับฟังก์ชัน $\pi(x)$ (Inequalities for the function $\pi(x)$)

4.3.1 การสร้างบทแทรกอันสืบเนื่องมาจากทฤษฎีบทประกอบ 10 ในหัวข้อ 4.2

โดยแสดงดังนี้

เนื่องจาก R_n เป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ p ทั้งหลาย ที่ $n < p < 2n$

$\pi(2n) - \pi(n)$ เป็นจำนวนของจำนวนเฉพาะ p ทั้งหลายเหล่านี้

โดยบทแทรก 19 ในหัวข้อ 4.2 สำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ $n > 1$ จะมีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุดหนึ่งจำนวนที่อยู่ระหว่าง n และ 2n

นอกเหนือไปจากนั้น แต่ละตัวของจำนวนเฉพาะเหล่านี้จะมีค่าน้อยกว่า 2n แล้วจะได้ว่า

$$R_n \leq (2n)^{\pi(2n)-\pi(n)}$$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 10 ในหัวข้อ 4.2 สำหรับจำนวนธรรมชาติ $n \geq 98$ จะได้

$$R_n > \frac{4^{n/3}}{2\sqrt{n}\,(2n)^{\sqrt{n/2}}}$$

ดังนั้นจะได้ว่า $$(2n)^{\pi(2n)-\pi(n)} \geq R_n > \frac{4^{n/3}}{2\sqrt{n}\,(2n)^{\sqrt{n/2}}}$$

$$(2n)^{\pi(2n)-\pi(n)} > \frac{4^{n/3}}{2\sqrt{n}\,(2n)^{\sqrt{n/2}}}$$

ใส่ลอการิทึม ฐานธรรมชาติ (e)

$$\begin{aligned}
(\pi(2n) - \pi(n)) \log 2n &> \frac{n}{3} \log 4 - \log 2\sqrt{n} - \log (2n)^{\sqrt{n/2}} \\
&= \frac{n}{3}\left(\log 4 - \frac{3}{n} \log 2\sqrt{n} - \frac{3}{n}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^{1/2} \cdot \log 2n \right) \\
&= \frac{n}{3}\left(\log 4 - \frac{3}{n} \log (4n)^{1/2} - \frac{3\log 2n}{\sqrt{2n}} \right) \\
&= \frac{n}{3}\left(\log 4 - \frac{3}{2n}\log 4n - \frac{3\log 2n}{\sqrt{2n}} \right)
\end{aligned}$$

$$(\pi(2n) - \pi(n)) \log 2n > \frac{n}{3}\left(\log 4 - \frac{3}{2n}\log 4n - \frac{3\log 2n}{\sqrt{2n}} \right)$$

$$\pi(2n) - \pi(n) \quad > \quad \frac{n}{3\log 2n}\left(\log 4 - \frac{3}{2n}\log 4n - \frac{3\log 2n}{\sqrt{2n}}\right) \qquad (3)$$

แต่เนื่องจากเรารู้ว่า $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} (\pi(2n) - \pi(n)) = +\infty$

นั่นคือ จะได้บทแทรกดังนี้

บทแทรก 1 "สำหรับทุก ๆจำนวนธรรมชาติ k จะมีจำนวนธรรมชาติ m_k ที่สำหรับ $n \geq m_k$ และมีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุด k จำนวนที่อยู่ระหว่าง n และ 2n"

ตัวอย่าง 1 พิจารณาจำนวนเฉพาะที่อยู่ระหว่าง n และ 2n ดังต่อไปนี้

n = 2, **3**, 4 = 2n

n = 3, **5**, 6 = 2n

n = 4, **5**, **7**, 8 = 2n

n = 5, **7**, 10 = 2n

n = 6, **7**, **11**, 12 = 2n

n = 7, **11**, **13**, 14 = 2n

n = 8, **11**, **13**, 16 = 2n

n = 9, **11**, **13**, **17**, 18 = 2n

n = 10, **11**, **13**, **17**, **19**, 20 = 2n

n = 11, **13**, **17**, **19**, 22 = 2n

n = 12, **13**, **17**, **19**, **23**, 24 = 2n

n = 13, **17**, **19**, **23**, 26 = 2n

n = 14, **17**, **19**, **23**, 28 = 2n

n = 15, **17**, **19**, **23**, **29**, 30 = 2n

n = 16, **17**, **19**, **23**, **29**, **31**, 32 = 2n

n = 17, **19**, **23**, **29**, **31**, 34 = 2n

n = 18, **19**, **23**, **29**, **31**, 36 = 2n

n = 19, **23**, **29**, **31**, **37**, 38 = 2n

n = 20, **23**, **29**, **31**, **37**, 40 = 2n

n = 21, 23, 29, 31, 37, 41, 42 = 2n

n = 22, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 44 = 2n

n = 23, 29, 31, 37, 41, 43, 46 = 2n

n = 24, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 48 = 2n

n = 25, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 50 = 2n

n = 26, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 52 = 2n

n = 27, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 54 = 2n

n = 28, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 56 = 2n

ดังนั้น จะพบว่า

ถ้า $k = 1$ จะมีจำนวนธรรมชาติ $m_k = 2$ ที่สำหรับ $n \geq m_k = 2$ มีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุด 1 จำนวน ที่อยู่ระหว่าง n(=2) และ 2n(=4)

ถ้า $k = 2$ จะมีจำนวนธรรมชาติ $m_k = 6$ ที่สำหรับ $n \geq m_k = 6$ มีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุด 2 จำนวน ที่อยู่ระหว่าง n(=6) และ 2n(=12)

ถ้า $k = 3$ จะมีจำนวนธรรมชาติ $m_k = 9$ ที่สำหรับ $n \geq m_k = 9$ มีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุด 3 จำนวน ที่อยู่ระหว่าง n(=9) และ 2n(=18)

ถ้า $k = 4$ จะมีจำนวนธรรมชาติ $m_k = 15$ ที่สำหรับ $n \geq m_k = 15$ มีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุด 4 จำนวน ที่อยู่ระหว่าง n(=15) และ 2n(=30) #

4.3.2 ศึกษา $\pi(2n) - \pi(n)$ อยู่ในช่วงใด สำหรับจำนวนธรรมชาติ $n > 1$ โดยแสดงดังนี้

1. จะแสดงว่า $\pi(2n) - \pi(n)$ มากกว่า $\dfrac{n}{3 \cdot \log 2n}$

พิจารณา เนื่องจาก สำหรับ $n \geq 2500$,

$$\frac{3\log 4n}{2n} + \frac{3\log 2n}{\sqrt{2n}} = 6\cdot\left(\frac{\log 4n}{4n} + \frac{\log\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}}\right)$$

$$\leq 6\cdot\left(\frac{\log 4\cdot 2500}{4\cdot 2500} + \frac{\log\sqrt{2\cdot 2500}}{\sqrt{2\cdot 2500}}\right) < 0.37$$

[เพราะว่า $\dfrac{\log x}{x}$ เป็นฟังก์ชันลด สำหรับ $x > e$]

นั่นคือ $\log 4 - \dfrac{3\log 4n}{2n} - \dfrac{3\log 2n}{\sqrt{2n}} \;>\; 1.38 - 0.37 \;>\; 1$ (4)

จาก (3) และ (4) จะได้ $\pi(2n) - \pi(n) > \dfrac{n}{3 \cdot \log 2n}$ สำหรับ $n \geq 2500$

และเนื่องจากสามารถพิสูจน์ให้เห็นได้โดยการคำนวณ สำหรับ $n < 2500$ แล้ว

$\pi(2n) - \pi(n) > \dfrac{n}{3 \cdot \log 2n}$ ยังคงเป็นจริง

ดังนั้น $\pi(2n) - \pi(n) > \dfrac{n}{3 \cdot \log 2n}$ สำหรับ $n > 1$ (5)

2. จะแสดงว่า $\pi(2n) - \pi(n)$ น้อยกว่า $\dfrac{7n}{5 \cdot \log n}$

เนื่องจากสำหรับจำนวนธรรมชาติ n, เรามี

$$(1+1)^{2n} > \binom{2n}{n}$$
$$2^{2n} > \binom{2n}{n}$$
$$4^{n} > \binom{2n}{n}$$

แต่เนื่องจากเราทราบว่า $R_n \mid \binom{2n}{n}$

ดังนั้น $R_n < 4^n$

แต่จากนิยามของ R_n เราสรุปว่า $R_n \geq n^{\pi(2n) - \pi(n)}$

ดังนั้น $n^{\pi(2n) - \pi(n)} < 4^n$

ใส่ลอการิทึมฐานธรรมชาติ (e)

จะได้ว่า $\log (n^{\pi(2n) - \pi(n)}) < \log 4^n$

นั่นคือ $\pi(2n) - \pi(n) < \dfrac{n \cdot \log 4}{\log n}$

แต่เนื่องจาก $\log_e 4 < \frac{7}{5}$ ดังนั้นจะได้ $\pi(2n) - \pi(n) < \frac{7n}{5 \cdot \log n}$

และจาก (5) จะได้ว่า สำหรับ $n > 1$

$$\frac{n}{3 \cdot \log 2n} < \pi(2n) - \pi(n) < \frac{7n}{5 \cdot \log n} \qquad (6)$$

4.3.3 จะแสดงว่า $\frac{n}{12 \log n} < \pi(n) < \frac{4n}{\log n}$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ $n > 1$

โดยแสดงดังนี้

1. จะแสดงว่า $\pi(n) > \frac{n}{12 \log n}$

จาก (6) จะได้ $\pi(2n) > \frac{n}{3 \cdot \log 2n}$ สำหรับ $n > 1$

และเนื่องจาก สำหรับ $n \geq 4$ เรามี $n > \frac{n}{2} \geq [\frac{n}{2}] > \frac{n}{2} - 1 > \frac{n}{4}$ และ $\log 2 \cdot [\frac{n}{2}] \leq \log n$

ดังนั้น $\pi(n) \geq \pi(2[\frac{n}{2}]) > \dfrac{\left[\frac{n}{2}\right]}{3\log 2\left[\frac{n}{2}\right]} > \frac{n/4}{3 \log n} = \frac{n}{12 \log n}$ สำหรับ $n \geq 4$

และเนื่องจากสามารถแสดงให้เห็นได้โดยการคำนวณ สำหรับ n = 2, 3 แล้ว $\pi(n) > \frac{n}{12 \log n}$ ยังคงเป็นจริง

ดังนั้น จะได้ว่า $\pi(n) > \frac{n}{12 \log n}$ สำหรับ $n > 1$ (7)

2. จะแสดงว่า $\pi(n) < \dfrac{4n}{\log n}$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ $n > 1$

โดยจะแสดงว่า

$$\pi(2^k) < \frac{2^{k+1}}{k\log 2} \quad \text{เป็นจริง สำหรับจำนวนธรรมชาติ } k \tag{8}$$

เนื่องจาก $\log 2 < 1$ ทำให้สามารถแสดงให้เห็นโดยการคำนวณว่า สำหรับ $k \leq 6$

แล้ว $\pi(2^k) < \dfrac{2^{k+1}}{k\log 2}$ เป็นจริง

นั่นคือ จะต้องพิสูจน์ส่วนที่เหลือว่า สำหรับ $k \geq 6$ แล้ว $\pi(2^k) < \dfrac{2^{k+1}}{k\log 2}$ เป็นจริง โดยใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction)

สมมติให้ สำหรับจำนวนธรรมชาติ $k \geq 6$ แล้ว $\pi(2^k) < \dfrac{2^{k+1}}{k\log 2}$ เป็นจริง

เราจะต้องแสดงให้ได้ว่า $\pi(2^{k+1}) < \dfrac{2^{k+2}}{(k+1)\log 2}$ โดยแสดงดังนี้

เมื่อแทนค่า n ด้วย 2^k ลงใน (6) จะได้

$$\pi(2\cdot 2^k) - \pi(2^k) < \frac{7\cdot 2^k}{5\log 2^k}$$

$$\begin{aligned}
\pi(2^{k+1}) &< \pi(2^k) + \frac{7\cdot 2^k}{5\log 2^k} \\
&< \frac{2^{k+1}}{k\log 2} + \frac{7\cdot 2^k}{5k\cdot\log 2} \\
&= \frac{2^{k+1}}{k\log 2}\left(1+\frac{7}{10}\right)
\end{aligned}$$

แต่เพราะว่า สำหรับ $k \geq 6$ เราจะมี $(k+1)\left(1+\dfrac{7}{10}\right) < 2k$

ดังนั้น $\pi(2^{k+1}) < \dfrac{2^{k+1}}{k\log 2}\cdot\left(1+\dfrac{7}{10}\right) < \dfrac{2^{k+1}}{k\log 2}\cdot\dfrac{2k}{k+1} = \dfrac{2^{k+2}}{(k+1)\log 2}$

จะได้ว่า อสมการ (8) เป็นจริง โดยการพิสูจน์แบบการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ต่อไป ให้ n เป็นจำนวนธรรมชาติที่มากกว่า 1 แล้วจะมีจำนวนธรรมชาติ k ที่ $2^k \le n < 2^{k+1}$

ดังนั้น $(k+1)\cdot\log 2 > \log n$

นั่นคือ โดยอสมการ (8) เรามี

$$\pi(n) \le \pi(2^{k+1}) < \frac{2^{k+2}}{(k+1)\log 2} = \frac{4\cdot 2^k}{(k+1)\log 2} \le \frac{4n}{(k+1)\log 2} < \frac{4n}{\log n}$$

ดังนั้น $\pi(n) < \frac{4n}{\log n}$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ n ที่มากกว่า 1 (9)

นั่นคือจากอสมการ (7) และ (9) จะได้ว่า สำหรับจำนวนธรรมชาติ $n > 1$

$$\frac{n}{12\log n} < \pi(n) < \frac{4n}{\log n} \qquad (9*)$$

4.3.4 จะแสดงว่า $\frac{n\log n}{4} < p_n < 36n\log n$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ $n > 1$

โดยแสดงดังนี้

โดยการแทนค่า n ด้วย p_n ในอสมการ (9*) และอาศัยความจริงที่ว่า $\pi(p_n) = n$ จะได้ว่า

$$\frac{p_n}{12\log p_n} < \pi(p_n) = n < \frac{4p_n}{\log p_n}$$

$$\frac{p_n}{12\log p_n} < n < \frac{4p_n}{\log p_n}$$

แต่เนื่องจาก $p_n > n$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$

ทำให้เราสรุปว่า $p_n > \frac{n}{4}\log p_n > \frac{n\log n}{4}$ และ $p_n < 12n\log p_n$

ดังนั้น $\frac{n\log n}{4} < p_n < 12n\cdot\log p_n$ สำหรับ $n > 1$ (9′)

แต่เนื่องจาก $p_n < 12n\log p_n$ นั่นคือ $\log p_n < \log 12 + \log n + \log\log p_n$

แต่จากบทแทรก 20 ในหัวข้อ 4.2 เราจะได้ $p_n < 2^n$ สำหรับ $n > 1$

นั่นคือ $\log p_n < n \log 2$ และ $\log \log p_n < \log n + \log \log 2$

และเนื่องจาก $\log 2 < 1$

ดังนั้น สำหรับ $n \geq 12$ เรามี $n > 12 \log 2$

$$\log n > \log 12 + \log \log 2$$

นั่นคือ สำหรับ $n \geq 12$ เรามี

$$\begin{aligned} \log p_n &< \log 12 + \log n + \log \log p_n \\ &< \log 12 + \log n + \log n + \log \log 2 \\ &< 2 \log n + \log 12 + \log \log 2 \\ &< 3 \cdot \log n \end{aligned}$$

และเนื่องจากสามารถแสดงให้เห็นได้โดยการคำนวณ สำหรับ $n = 2, 3, 4, \ldots, 11$ แล้ว

$$\log p_n < 3 \log n \quad \text{เป็นจริง} \tag{9''}$$

ดังนั้น แทนค่า (9″) ลงใน (9′) จะได้ว่า

$$\frac{n \log n}{4} < p_n < 36 n \log n \quad \text{สำหรับ } n > 1 \tag{10}$$

4.3.5 สร้างบทแทรกที่สืบเนื่องมาจากอสมการ (7) ในหัวข้อ 4.3.3

จากอสมการ (7) จะได้บทแทรกดังนี้

บทแทรก 1 สำหรับทุก ๆจำนวนธรรมชาติ s จะมีจำนวนธรรมชาติจำนวนหนึ่งที่สามารถเขียนอยู่ในรูปผลบวกของสองจำนวนเฉพาะ ได้มากกว่า s แบบที่แตกต่างกัน

พิสูจน์ สมมติว่า มีจำนวนธรรมชาติจำนวนหนึ่งคือ s ซึ่งไม่มีจำนวนธรรมชาติใดที่เขียนอยู่ในรูปผลบวกของสองจำนวนเฉพาะได้มากกว่า s แบบ

ให้ n เป็นจำนวนธรรมชาติที่มากกว่า 1

ต่อไปให้พิจารณาคู่อันดับทั้งหมด (p,q) ที่ p, q เป็นจำนวนเฉพาะที่ไม่มากกว่า n

จะพบว่า จำนวนของคู่อันดับ (p,q) ทั้งหมดเป็น $\left[\pi(n)\right]^2$

เราจะแบ่งเซตของ (p,q) ออกเป็นคลาส คือ (p,q) อยู่ในคลาส k ก็ต่อเมื่อ $p + q = k$

เนื่องจาก $p \leq n$ และ $q \leq n$ ดังนั้น $p + q = k \leq 2n$

โดยสมมติฐาน สำหรับ $k \leq 2n$ ที่กำหนดให้ ในคลาส k มีคู่อันดับที่แตกต่างกันอย่างมากที่สุด s คู่อันดับ

เนื่องจาก จำนวนของคลาสทั้งหมดน้อยกว่า 2n จะได้จำนวนของคู่อันดับทั้งหลายน้อยกว่า 2ns

นั่นคือ $\left[\pi(n)\right]^2 < 2ns$

เนื่องจาก โดยอสมการ (7) จะได้ว่า $\left[\pi(n)\right]^2 > \dfrac{n^2}{12^2(\log n)^2}$

ดังนั้น $2ns > \left[\pi(n)\right]^2 > \dfrac{n^2}{12^2(\log n)^2}$

$$2ns > \frac{n^2}{12^2(\log n)^2}$$

$$2 \cdot 12^2 s (\log n)^2 > n$$

แต่เนื่องจาก เรารู้ว่า $e^x > \dfrac{x^3}{3!}$ สำหรับทุก $x \geq 0$

ดังนั้น ถ้า $x = \log n$ จะได้ $e^{\log n} > \dfrac{(\log n)^3}{3!}$

$$6n > (\log n)^3$$

จะได้ว่า $6 \cdot [2 \cdot 12^2 \cdot s (\log n)^2] > 6n > (\log n)^3$

นั่นคือ $12^3 \cdot s (\log n)^2 > (\log n)^3$ สำหรับ $n > 1$

ดังนั้น $12^3 \cdot s > \log n$ สำหรับ n ทั้งหมดที่ $n > 1$ ที่ซึ่งประพจน์นี้จะไม่เป็นจริง สำหรับ n ที่มีค่ามากเพียงพอ

ดังนั้น สมมติฐานที่ว่า สำหรับจำนวนธรรมชาติ s จำนวนหนึ่ง ไม่มีจำนวนธรรมชาติที่สามารถเขียนอยู่ในรูปผลบวกของสองจำนวนเฉพาะที่มากกว่า s แบบ ก็เกิดการขัดแย้ง #

<u>หมายเหตุ</u> จำนวนที่สามารถเขียนอยู่ในรูปผลบวกของสองจำนวนเฉพาะที่มากกว่าหนึ่งแบบ ต้องเป็นจำนวนคู่เท่านั้นและเราไม่ถือว่าผลบวกของสองจำนวนเฉพาะ 2 รูปแบบแตกต่างกัน ถ้าเพียงแต่สลับลำดับการเขียนของจำนวนเฉพาะในผลบวกนั้น

ที่จริงแล้ว ถ้าจำนวนคี่ n คือผลบวกของสองจำนวนเฉพาะแล้ว หนึ่งจำนวนของจำนวนเฉพาะนั้นต้องเป็นเลขคู่ ซึ่งก็คือ 2 ทำให้ได้ว่า จำนวนเฉพาะอีกตัวคือ n - 2 และเราพบว่าการเขียนในรูปผลบวกของสองจำนวนเฉพาะนี้ มีเพียงแบบเดียวเท่านั้น ซึ่งแตกต่างไปจากความเป็นลำดับของผลบวกที่กล่าวข้างต้น

ตัวอย่าง 1 **พิจารณาตัวอย่างของจำนวนธรรมชาติที่มากกว่า 1 ซึ่งเขียนอยู่ในรูปผลบวกของสองจำนวนเฉพาะ ดังต่อไปนี้**

4 = 2 + 2
6 = 3 + 3
8 = 3 + 5
10 = 3 + 7, 5 + 5
12 = 5 + 7
14 = 3 + 11, 7 + 7
16 = 3 + 13, 5 + 11
18 = 5 + 13, 7 + 11
20 = 3 + 17
22 = 3 + 19, 5 + 17, 11 + 11
24 = 5 + 19, 7 + 17, 11 + 13
26 = 3 + 23, 7 + 19, 13 + 13
28 = 5 + 23, 11 + 17
30 = 7 + 23, 11 + 19, 13 + 17
32 = 3 + 29, 13 + 19
34 = 3 + 31, 5 + 29, 17 + 17, 23 + 11
36 = 5 + 31, 7 + 29, 13 + 23, 17 + 19
38 = 7 + 31, 19 + 19
40 = 3 + 37, 11 + 29, 17 + 23
42 = 5 + 37, 11 + 31, 13 + 29, 19 + 23

ดังนั้น จะพบว่า

ถ้า s = 1 จะมีจำนวนธรรมชาติคือ 10 เป็นต้น ที่ซึ่ง 10 สามารถเขียนอยู่ในรูปผลบวกของสองจำนวนเฉพาะได้มากกว่า 1 แบบที่แตกต่างกัน

ถ้า s = 2 จะมีจำนวนธรรมชาติคือ 22 เป็นต้น ที่ซึ่ง 22 สามารถเขียนอยู่ในรูปผลบวกของสองจำนวนเฉพาะได้มากกว่า 2 แบบที่แตกต่างกัน

ถ้า s = 3 จะมีจำนวนธรรมชาติคือ 34 เป็นต้น ที่ซึ่ง 34 สามารถเขียนอยู่ในรูปผลบวกของสองจำนวนเฉพาะได้มากกว่า 3 แบบที่แตกต่างกัน #

โดยการดัดแปลงเล็กน้อยของการพิสูจน์บทแทรก 1 ในหัวข้อ 4.3.5 ก็สามารถพิสูจน์ได้ว่า สำหรับจำนวนธรรมชาติ s จะมีจำนวนธรรมชาติจำนวนหนึ่งที่สามารถเขียนอยู่ในรูปผลบวกของกำลังสองของจำนวนเฉพาะสามจำนวนได้มากกว่า s แบบที่แตกต่างกัน

นักคณิตศาสตร์ ชื่อ P. Erdos ได้พิสูจน์ว่า สำหรับแต่ละจำนวนธรรมชาติ s จะมีจำนวนธรรมชาติจำนวนหนึ่งที่สามารถเขียนอยู่ในรูปผลบวกของกำลังสองของจำนวนเฉพาะ 2 จำนวนได้มากกว่า s แบบที่แตกต่างกัน

4.3.6 การแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi(n)}{n} = 0$

โดยแสดงดังนี้

จากอสมการ (9) จะได้ $\dfrac{\pi(n)}{n} < \dfrac{4}{\log n}$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ n ที่มากกว่า 1

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi(n)}{n} = 0$

4.3.7 การแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log p_n}{\log n} = 1$

โดยแสดงดังนี้

จากอสมการ (10) ใส่ลอการิทึม ฐานธรรมชาติ (e) จะได้

$$\log n + \log\log n - \log 4 < \log p_n < \log 36 + \log n + \log\log n$$

$$1 + \frac{\log\log n - \log 4}{\log n} < \frac{\log p_n}{\log n} < 1 + \frac{\log 36 + \log\log n}{\log n}$$

จะได้ $$\lim_{n\to\infty} \frac{\log p_n}{\log n} = 1 \qquad (11)$$

4.3.8 การแสดงว่าอนุกรมของส่วนกลับของจำนวนเฉพาะที่เรียงกันเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ โดยแสดงดังนี้

จากอสมการ (10) : $\frac{n\log n}{4} < p_n < 36n\log n$ สำหรับ $n > 1$

ดังนั้นจะได้ว่า $p_k < 36k\log k$ สำหรับ $k = 2, 3, 4, \ldots$

$$\frac{1}{p_k} > \frac{1}{36k\log k} \quad \text{สำหรับ } k = 2, 3, 4, \ldots$$

นั่นคือ สำหรับจำนวนธรรมชาติ n ที่มากกว่า 2 เราจะได้ว่า $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{p_k} > \frac{1}{36}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\log k}$

แต่เนื่องจากเรารู้ว่า $\log(1+x) < x$ สำหรับ $0 < x < 1$

จะได้ $\log(k+1) - \log k = \log(1+\frac{1}{k}) < \frac{1}{k}$ สำหรับ $k = 2, 3, 4, \ldots$

ดังนั้น $\frac{\log(k+1)}{\log k} - \frac{\log k}{\log k} < \frac{1}{k\log k}$

$$\frac{\log(k+1)}{\log k} < \frac{1}{k\log k} + 1$$

$$\log\frac{\log(k+1)}{\log k} < \log(1+\frac{1}{k\log k}) < \frac{1}{k\log k}$$

นั่นคือ $\frac{1}{k\log k} > \log\log(k+1) - \log\log k$ สำหรับ $k = 2, 3, 4, \ldots$

ดังนั้น สำหรับจำนวนธรรมชาติ $n > 2$ เรามี

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\log k} > \log\log(n+1) - \log\log 2 > \log\log(n+1) \quad [\text{เพราะว่า } \log\log 2 < 0]$$

แต่จากอสมการ $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{p_k} > \frac{1}{36}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\log k}$

จะได้ว่า $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{p_k} > \frac{1}{36}\log\log(n+1)$

จากนี้ เราก็พบว่าอนุกรมของส่วนกลับของจำนวนเฉพาะที่เรียงกัน เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

นั่นคือ อนุกรม $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \ldots$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

4.4 ทฤษฎีบทจำนวนเฉพาะ และผลที่ติดตามมา (The prime number theorem and its consequences)

จากอสมการ (9*), สำหรับจำนวนธรรมชาติ n ที่มากกว่า 1

$$\frac{n}{12\log n} < \pi(n) < \frac{4n}{\log n}$$

$$\frac{1}{12} < \pi(n)\cdot\frac{\log n}{n} < 4$$

$$\frac{1}{12} < \pi(n) : \frac{n}{\log n} < 4$$

นั่นคือ จะมีจำนวนบวก (เช่น $a = \frac{1}{12}$, $b = 4$) โดยที่

$$a < \pi(n) : \frac{n}{\log n} < b \quad \text{สำหรับจำนวนธรรมชาติ } n > 1$$

ในปี ค.ศ. 1896 นักคณิตศาสตร์ ชื่อ J. Hadamard และ Ch. de la Vallee Poussin ได้พิสูจน์ว่า

$$\lim_{x\to\infty}\left(\pi(x):\frac{x}{\log x}\right) = 1 \qquad (12)$$

ในปัจจุบันนี้ สืบเนื่องจากวิธีพิสูจน์แบบใหม่ของนักคณิตศาสตร์ ชื่อ A. Selberg และ P. Erdos ที่ได้พิสูจน์สมการ (12) ไว้ด้วยวิธีง่ายๆ ทำให้รู้จักสมการ (12) ภายใต้ชื่อ ทฤษฎีบทจำนวนเฉพาะ แต่เราจะไม่เสนอการพิสูจน์ไว้ ณ ที่นี้

ถ้า $\pi(n) : \frac{n}{\log n} = h(n)$ แล้ว ตัวอย่างของ h(n) ดังนี้

$h(10^3) = 1.159$, $h(10^4) = 1.132$, $h(10^5) = 1.104$

$h(10^6) = 1.084$, $h(10^7) = 1.071$, $h(10^8) = 1.061$

$h(10^9) = 1.053$, $h(10^{10}) = 1.048$

ค่าประมาณที่ดีกว่าสำหรับฟังก์ชัน $\pi(x)$ คือ $\int_0^x \frac{dt}{\log t}$

J.E. Littlewood ได้พิสูจน์ว่า ผลต่าง $\pi(x) - \int_0^x \frac{dt}{\log t}$ จะมีค่าเป็นบวกอยู่จำนวนอนันต์ค่า และมีค่าเป็นลบอยู่จำนวนอนันต์ค่าด้วย สำหรับ x ที่เป็นจำนวนธรรมชาติ

การพิสูจน์ทฤษฎีบทของ Littlewood ที่ถูกกล่าวถึงในที่นี้ ต้องการวิธีวิเคราะห์ และสามารถหาอ่านได้ในหนังสือของ K. Prachar ชื่อ Primzahverteilung (Berlin - Gottingen - Heidelberg 1957, reprint 1978)

4.4.1 การพิสูจน์ $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n \log n} = 1$

โดยแสดงดังนี้

ในสมการ (12) ถ้าเราให้ $x = p_n$ และโดยความจริงที่ว่า $\pi(p_n) = n$

เราจะได้ $$\lim_{x\to\infty} \left(\pi(p_n) : \frac{p_n}{\log p_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n \log p_n}{p_n} = 1$$

โดยสมการ (11) คือ $$\lim_{n\to\infty} \frac{\log p_n}{\log n} = 1$$

แต่เนื่องจาก $$\lim_{n\to\infty} \frac{n\log p_n \cdot \log n}{p_n \cdot \log n} = 1$$

จะได้ว่า $$\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \log n}{p_n} = 1$$

นั่นคือ $$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n \log n} = 1 \qquad (13)$$

ดังนั้นผลที่ติดตามมา คือ ค่าประมาณสำหรับ p_n คือ จำนวน $n \log n$, สำหรับ n ที่มีค่ามากพอ

(J.B. Rosser ได้พิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนธรรมชาติ n ทั้งหมด อสมการ $p_n > n \log n$ เป็นจริง)

รายละเอียดที่มากไปกว่านี้ของ $\pi(n)$ เล่าโดยทฤษฎีบทของ J.B. Rosser และ D. Schoenfeld ที่ว่า

$$\frac{n}{\log n - \frac{1}{2}} < \pi(n) < \frac{n}{\log n - \frac{3}{2}}$$ สำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ n ที่ $n \geq 67$ (14)

และเห็นได้ชัดว่า สมการ (12) เป็นผลสืบเนื่องมาจากอสมการ (14)

4.4.2 การพิสูจน์ $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(bx)}{\pi(ax)} = \frac{b}{a}$ **โดยใช้สมการ (12) และ** $\lim_{x\to\infty} \frac{\log ax}{\log bx} = 1$,

$0 < a < b$ โดยแสดงดังนี้

ให้ a, b เป็นจำนวนจริง 2 จำนวน ที่ $0 < a < b$

เนื่องจากเรารู้ว่า $$\lim_{x\to\infty} \frac{\log ax}{\log bx} = 1$$

โดยสมการ (12) เรามี $$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(bx)}{bx}\log bx = 1$$

และ $$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(ax)}{ax}\log ax = 1$$

ดังนั้น $$\frac{\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(bx)}{bx}\log bx}{\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(ax)}{ax}\log ax} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(bx)}{bx}\log bx \cdot \frac{ax}{\pi(ax)\cdot \log ax} = 1$$

$$\frac{a}{b}\cdot \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(bx)}{\pi(ax)} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(bx)}{\pi(ax)} = \frac{b}{a}$$ #

นั่นคือ จะเกิดบทแทรกดังนี้

บทแทรก 1 ถ้าให้ $0 < a < b$ ดังนั้นจะได้ว่า $\pi(bx) > \pi(ax)$ สำหรับ x ที่มีค่ามากพอ

พิสูจน์ ให้ $0 < a < b$ ดังนั้น $\frac{b}{a} > 1$ และเนื่องจาก $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(bx)}{\pi(ax)} = \frac{b}{a}$

ดังนั้น ให้ $\varepsilon = \frac{b}{a} - 1 > 0$

นั่นคือ จะมี N เป็นจำนวนนับ ที่ทำให้

$$\left|\frac{\pi(bx)}{\pi(ax)} - \frac{b}{a}\right| < \frac{b}{a} - 1 \quad \forall x \geq N$$

$$1 - \frac{b}{a} < \frac{\pi(bx)}{\pi(ax)} - \frac{b}{a} < \frac{b}{a} - 1$$

$$1 < \frac{\pi(bx)}{\pi(ax)}$$

นั่นคือ $\pi(bx) > \pi(ax)$ สำหรับ x ที่มีค่ามากพอ #

สิ่งนี้ใช้พิสูจน์ข้อความที่ติดตามมา คือ

4.4.3 การสร้างบทแทรกอันสืบเนื่องมาจากบทแทรก 1 ในหัวข้อ 4.4.2

โดยแสดงดังนี้

บทแทรก 1 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงบวก 2 จำนวน และ $a < b$ แล้ว สำหรับจำนวนจริง x ที่มีค่ามากพอ จะมีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุดหนึ่งจำนวนระหว่าง ax และ bx (โดยเฉพาะ ถ้า $a = 1$ และ $b = 1+\varepsilon$ สำหรับ ε ที่เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น มีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุดหนึ่งจำนวน ที่อยู่ระหว่าง n และ $n(1+\varepsilon)$ สำหรับ n ที่มีค่ามากพอ)

พิสูจน์ ให้ $0 < a < b$ และ x เป็นจำนวนจริงที่มีค่ามากพอ
และสมมติให้ ไม่มีจำนวนเฉพาะที่อยู่ระหว่าง ax และ bx
นั่นคือ $\pi(bx) = \pi(ax)$ ซึ่งจะเกิดการขัดแย้งกับบทแทรก 1 ในหัวข้อ 4.4.2
ดังนั้นจะมีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุดหนึ่งจำนวนระหว่าง ax และ bx สำหรับ x ที่มีค่ามากพอ #

บทแทรก 2 สำหรับลำดับจำกัดของตัวเลข $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m$ ใด ๆ จะมีจำนวนเฉพาะ
* จำนวนหนึ่งที่ m หลักแรกเป็น $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m$

พิสูจน์ ให้ $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m$ เป็นลำดับจำกัดของตัวเลขโดดใด ๆ
ให้ a คือจำนวนที่ประกอบด้วยตัวเลข $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m$
จากการประยุกต์สมการ (12) จะได้ว่า
$\pi(an) < \pi((a+1)n)$ เป็นจริง สำหรับ n ที่มีค่ามากพอ
นั่นคือ มีจำนวนธรรมชาติ s จำนวนหนึ่ง ที่
$\pi(a \times 10^s) < \pi((a+1) \times 10^s)$
ทำให้มีจำนวนเฉพาะ p จำนวนหนึ่ง ที่ $a \times 10^s < p < (a+1) \times 10^s$
ด้วยวิธีนี้ ตัวเลข m หลักแรกของจำนวนเฉพาะ p ก็เหมือนกับตัวเลขของ a
หมายความว่าตัวเลข m หลักแรกของจำนวนเฉพาะ p คือ $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m$ #

4.4.4 การพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_{\pi(nx)}}{nx} = 1$

โดยแสดงดังนี้
ให้ x เป็นจำนวนจริงจำนวนหนึ่งที่มากกว่า 0
สำหรับจำนวนธรรมชาติ n ที่มีค่ามากพอ เราจะได้ $nx > 2$
ดังนั้น $\pi(nx) \geq 1$
โดยสมการ (13) จะได้

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{\pi(nx)}}{\pi(nx) \cdot \log \pi(nx)} = 1 \qquad (15)$$

แต่จากสมการ (12) เรามี

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(nx)\log nx}{nx} = 1 \qquad (16)$$

ใส่ลอการิธึมฐานธรรมชาติ (e)

นั่นคือ จะได้ว่า $\log \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi(nx)\log nx}{nx} = \log 1$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\log \pi(nx) + \log\log nx - \log nx\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log nx}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\log\pi(nx)+\log\log nx-\log nx\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\pi(nx)+\log\log nx-\log nx}{\log nx} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\pi(nx)}{\log nx}+\lim_{n\to\infty}\frac{\log\log nx}{\log nx}-\lim_{n\to\infty}\frac{\log nx}{\log nx} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\pi(nx)}{\log nx}+0-1 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\pi(nx)}{\log nx} = 1 \qquad (17)$$

จากสมการ (15), (16) และ (17) เราสรุปว่า

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_{\pi(nx)}}{\pi(nx)\cdot\log\pi(nx)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(nx)\log nx}{nx}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\log\pi(nx)}{\log nx} = 1$$

ดังนั้น $$\lim_{n\to\infty}\frac{p_{\pi(nx)}}{nx} = 1 \qquad \#$$

นักคณิตศาสตร์ชื่อ H. Steinhaus เป็นผู้สังเกตว่า ด้วยวิธีการดังกล่าวข้างต้นจากสมการ (12) จะทำให้เกิดความจริงที่ว่า

" สำหรับทุกจำนวนจริง x ที่มากกว่า 0 จะมีลำดับอนันต์ของจำนวนเฉพาะ $q_1, q_2, q_3, \cdots$ ที่ $\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{n} = x$ " เช่น

ถ้าให้ x = 2, และพิจารณาเมื่อกำหนดให้

n = 1, $\pi(nx) = \pi(2) = 1$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_1 = 2$ แล้วกำหนดให้เป็น $2 = q_1$

n = 2, $\pi(nx) = \pi(4) = 2$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_2 = 3$ แล้วกำหนดให้เป็น $3 = q_2$

n = 3, $\pi(nx) = \pi(6) = 3$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_3 = 5$ แล้วกำหนดให้เป็น $5 = q_3$

n = 4, $\pi(nx) = \pi(8) = 4$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_4 = 7$ แล้วกำหนดให้เป็น $7 = q_4$

$n = 5,\quad \pi(nx) = \pi(10) = 4$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_4 = 7$ แล้วกำหนดให้เป็น $7 = q_5$

$n = 6,\quad \pi(nx) = \pi(12) = 5$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_5 = 11$ แล้วกำหนดให้เป็น $11 = q_6$

$n = 7,\quad \pi(nx) = \pi(14) = 6$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_6 = 13$ แล้วกำหนดให้เป็น $13 = q_7$

$n = 8,\quad \pi(nx) = \pi(16) = 6$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_6 = 13$ แล้วกำหนดให้เป็น $13 = q_8$

$n = 9,\quad \pi(nx) = \pi(18) = 7$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_7 = 17$ แล้วกำหนดให้เป็น $17 = q_9$

$n = 10,\quad \pi(nx) = \pi(20) = 8$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_8 = 19$ แล้วกำหนดให้เป็น $19 = q_{10}$

$n = 11,\quad \pi(nx) = \pi(22) = 8$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_8 = 19$ แล้วกำหนดให้เป็น $19 = q_{11}$

$n = 12,\quad \pi(nx) = \pi(24) = 9$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_9 = 23$ แล้วกำหนดให้เป็น $23 = q_{12}$

$n = 13,\quad \pi(nx) = \pi(26) = 9$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_9 = 23$ แล้วกำหนดให้เป็น $23 = q_{13}$

$n = 14,\quad \pi(nx) = \pi(28) = 9$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_9 = 23$ แล้วกำหนดให้เป็น $23 = q_{14}$

$n = 15,\quad \pi(nx) = \pi(30) = 10$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_{10} = 29$ แล้วกำหนดให้เป็น $29 = q_{15}$

$n = 16,\quad \pi(nx) = \pi(32) = 11$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_{11} = 31$ แล้วกำหนดให้เป็น $31 = q_{16}$

....

นั่นคือจะพบว่า มีลำดับอนันต์ของจำนวนเฉพาะ $q_1, q_2, q_3, \ldots$ ที่ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q_n}{n} = x$

ถ้าให้ $x = 3$, และพิจารณาเมื่อกำหนดให้

$n = 1,\quad \pi(nx) = \pi(3) = 2$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_2 = 3$ แล้วกำหนดให้เป็น $3 = q_1$

$n = 2,\quad \pi(nx) = \pi(6) = 3$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_3 = 5$ แล้วกำหนดให้เป็น $5 = q_2$

$n = 3,\quad \pi(nx) = \pi(9) = 4$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_4 = 7$ แล้วกำหนดให้เป็น $7 = q_3$

$n = 4,\quad \pi(nx) = \pi(12) = 5$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_5 = 11$ แล้วกำหนดให้เป็น $11 = q_4$

$n = 5,\quad \pi(nx) = \pi(15) = 6$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_6 = 13$ แล้วกำหนดให้เป็น $13 = q_5$

$n = 6,\quad \pi(nx) = \pi(18) = 7$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_7 = 17$ แล้วกำหนดให้เป็น $17 = q_6$

$n = 7,\quad \pi(nx) = \pi(21) = 8$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_8 = 19$ แล้วกำหนดให้เป็น $19 = q_7$

$n = 8,\quad \pi(nx) = \pi(24) = 9$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_9 = 23$ แล้วกำหนดให้เป็น $23 = q_8$

$n = 9, \quad \pi(nx) = \pi(27) = 9$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_9 = 23$ แล้วกำหนดให้เป็น $23 = q_9$

$n = 10, \quad \pi(nx) = \pi(30) = 10$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_{10} = 29$ แล้วกำหนดให้เป็น $29 = q_{10}$

$n = 11, \quad \pi(nx) = \pi(33) = 11$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_{11} = 31$ แล้วกำหนดให้เป็น $31 = q_{11}$

$n = 12, \quad \pi(nx) = \pi(36) = 11$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_{11} = 31$ แล้วกำหนดให้เป็น $31 = q_{12}$

$n = 13, \quad \pi(nx) = \pi(39) = 12$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_{12} = 37$ แล้วกำหนดให้เป็น $37 = q_{13}$

$n = 14, \quad \pi(nx) = \pi(42) = 13$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_{13} = 41$ แล้วกำหนดให้เป็น $41 = q_{14}$

$n = 15, \quad \pi(nx) = \pi(45) = 14$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_{14} = 43$ แล้วกำหนดให้เป็น $43 = q_{15}$

$n = 16, \quad \pi(nx) = \pi(48) = 15$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_{15} = 47$ แล้วกำหนดให้เป็น $47 = q_{16}$

$n = 17, \quad \pi(nx) = \pi(51) = 15$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_{15} = 47$ แล้วกำหนดให้เป็น $47 = q_{17}$

$n = 18, \quad \pi(nx) = \pi(54) = 16$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_{16} = 53$ แล้วกำหนดให้เป็น $53 = q_{18}$

$n = 19, \quad \pi(nx) = \pi(57) = 16$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_{16} = 53$ แล้วกำหนดให้เป็น $53 = q_{19}$

$n = 20, \quad \pi(nx) = \pi(60) = 17$ จะได้ $p_{\pi(nx)} = p_{17} = 59$ แล้วกำหนดให้เป็น $59 = q_{20}$

....

นั่นคือจะพบว่า มีลำดับอนันต์ของจำนวนเฉพาะ $q_1, q_2, q_3, \ldots$ ที่ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q_n}{n} = x$

4.4.5 การพิสูจน์ว่าเซตของเศษส่วนจำนวนเฉพาะ เป็นเซตหนาแน่นในเซตของจำนวนจริงบวก

โดยแสดงดังนี้

โดยบทแทรก 1 ในหัวข้อ 4.4.3 จะได้ว่า

" ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง 2 จำนวนใด ๆ ที่ $0 < a < b$ และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่มีค่ามากพอแล้ว จะมีจำนวนเฉพาะ p อย่างน้อยที่สุดหนึ่งจำนวน ที่ $aq < p < bq$ "

นั่นคือ จะได้ว่า " $a < \dfrac{p}{q} < b$ "

ดังนั้น $\left\{ \dfrac{p}{q} \,\middle|\, p, q \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ} \right\}$ เป็นเซตหนาแน่นในเซตของจำนวนจริงบวก