

บทที่ 5

บทสรุป

จากการศึกษาในบทที่ 3 และ 4 เราได้ทฤษฎีบท ทฤษฎีบทประกอบ และบทแทรกต่างๆ ที่เกี่ยวกับจำนวนเฉพาะ และฟังก์ชัน $\pi(x)$ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 ถ้าจำนวนธรรมชาติ n เป็นจำนวนประกอบ แล้ว n มีตัวหารลงตัว คือ a ที่ $1 < a \leq \sqrt{n}$

ทฤษฎีบท 2 ทุกจำนวนธรรมชาติ $n > 1$ มีตัวหารลงตัวที่เป็นจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุดหนึ่งจำนวน

บทแทรก 3 ทุกๆจำนวนประกอบ n มีตัวหารลงตัวที่เป็นจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุดหนึ่งจำนวนที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ $\sqrt{n}$

บทแทรก 4 ทุกๆจำนวนธรรมชาติที่มากกว่า 1 จะเป็นผลคูณอย่างจำกัดของตัวประกอบเฉพาะ (รวมไปถึงผลคูณของ 1 กับจำนวนเฉพาะ)

ทฤษฎีบท 5 จำนวนธรรมชาติใดๆ สามารถเขียนได้ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะเพียงแบบเดียวเท่านั้น (โดยไม่คิดถึงลำดับของแต่ละจำนวนในผลคูณ)

ทฤษฎีบท 6 ถ้าจำนวนธรรมชาติ $n > 2$ แล้ว มีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุดหนึ่งจำนวนที่อยู่ระหว่าง n และ $n!$

ทฤษฎีบท 7 ถ้า n และ r เป็นจำนวนธรรมชาติ ที่ $n > 1$ และถ้า n เทอมของลำดับเลขคณิต คือ $m, m+r, \dots, m+(n-1)r$ เป็นจำนวนเฉพาะดี แล้วผลต่าง r จะถูกหารลงตัวได้ด้วยทุกจำนวนเฉพาะที่น้อยกว่า n

บทแทรก 8 ถ้ามีลำดับเลขคณิตค่าเพิ่มขึ้น ที่ประกอบด้วยจำนวนเฉพาะ n จำนวนที่มากกว่า 2 แล้วผลต่างของลำดับเลขคณิตถูกหารได้ด้วยผลคูณ P_n ของจำนวนเฉพาะทั้งหมดที่น้อยกว่า n และผลต่างของลำดับเลขคณิตนี้มากกว่าหรือเท่ากับ P_n

ทฤษฎีบท 9 ถ้าให้ a, b เป็นจำนวนธรรมชาติ โดยที่ $(a, b) = 1$ แล้วจะมีจำนวนเฉพาะเป็นจำนวนไม่จำกัดในรูปของ $ak + b$ สำหรับ k ที่เป็นจำนวนธรรมชาติ

ทฤษฎีบท 10 ถ้าให้ a, b เป็นจำนวนธรรมชาติ โดยที่ $(a, b) = 1$ แล้วจะมีจำนวนเฉพาะ p อย่างน้อยที่สุดหนึ่งจำนวนที่อยู่ในรูปของ $ak + b$ สำหรับ k ที่เป็นจำนวนธรรมชาติ

ทฤษฎีบท 11 เลขชี้กำลัง a ของจำนวนเฉพาะ p ในการแยกตัวประกอบ $n!$ ออกเป็นผลคูณของ

$$\text{จำนวนเฉพาะ คือ } a = \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots$$

ทฤษฎีบทประกอบ 12 $\binom{2n}{n} > \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ $n > 1$

ทฤษฎีบทประกอบ 13 ผลคูณ P_n ของจำนวนเฉพาะที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ n จะเท่ากับจำนวนที่ไม่มากกว่า 4^n โดยที่ n เป็นจำนวนธรรมชาติ

ทฤษฎีบทประกอบ 14 ถ้า p เป็นตัวหารลงตัวเฉพาะของ $\binom{2n}{n}$ ที่ $p \geq \sqrt{2n}$ แล้ว เลขชี้กำลัง

ของ p ในการแยกตัวประกอบออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ

ของ $\binom{2n}{n}$ คือ 1

ทฤษฎีบทประกอบ 15 ตัวหารลงตัวของ $\binom{2n}{n}$ ซึ่งอยู่ในรูป p^r คือ จำนวนที่ไม่มากกว่า $2n$

โดยที่ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ r เป็นจำนวนธรรมชาติ

$$\text{และ } \binom{2n}{n} \leq (2n)\pi(2n)$$

ทฤษฎีบทประกอบ 16 ถ้า n เป็นจำนวนธรรมชาติมากกว่า 2 แล้วจะไม่มีจำนวนเฉพาะ p

$$\text{โดยที่ } \frac{2}{3}n < p \leq n \text{ เป็นตัวหารลงตัวของ } \binom{2n}{n}$$

ทฤษฎีบทประกอบ 17 เลขชี้กำลังของจำนวนเฉพาะ p โดยที่ $n < p < 2n$ ในการแยก

$$\text{ตัวประกอบของ } \binom{2n}{n} \text{ ออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ มีค่าเป็น 1}$$

ทฤษฎีบทประกอบ 18 $\pi(n) \leq \frac{1}{2}n - 1$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ $n \geq 14$

ทฤษฎีบทประกอบ 19 ให้ R_n เป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ p ที่ $n < p \leq 2n$ (ให้ $R_n = 1$

$$\text{ในกรณีที่ไม่มีจำนวนเฉพาะ } p \text{ ดังกล่าว) แล้ว } R_n > \frac{4^{n/3}}{2\sqrt{n}(2n)^{\sqrt{n}/2}}$$

สำหรับทุก $n \geq 98$

ทฤษฎีบทประกอบ 20 $2^k > 18(k+1)$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ $k \geq 8$

ทฤษฎีบทประกอบ 21 $2^x > 18x$ สำหรับจำนวนจริง $x \geq 8$

ทฤษฎีบทประกอบ 22 $2^k > 6(k+1)$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ $k \geq 6$

ทฤษฎีบทประกอบ 23 $2^x > 6x$ สำหรับจำนวนจริง $x \geq 6$

ทฤษฎีบทประกอบ 24 ถ้า n เป็นจำนวนธรรมชาติโดยที่ $n \geq 648$ แล้ว $R_n > 2n$

ทฤษฎีบทประกอบ 25 ถ้า $n \geq 648$ แล้วระหว่าง n และ $2n$ จะมีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุดสองจำนวนที่แตกต่างกัน

ทฤษฎีบท 26 ถ้า n เป็นจำนวนธรรมชาติที่มากกว่า 5 แล้วระหว่าง n และ $2n$ จะมีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุดสองจำนวนที่แตกต่างกัน

ทฤษฎีบท 27 (Tchebycheff) ถ้า n เป็นจำนวนธรรมชาติที่มากกว่า 3 แล้วระหว่าง n และ $2n - 2$ มีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุดหนึ่งจำนวน

บทแทรก 28 ถ้า n เป็นจำนวนธรรมชาติที่มากกว่า 1 แล้วระหว่าง n และ $2n$ มีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุดหนึ่งจำนวน

บทแทรก 29 $p_k < 2^k$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ k ที่มากกว่า 1

บทแทรก 30 ในการแยกตัวประกอบของ $n!$ ออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ ที่ $n > 1$ จะมีตัวประกอบเฉพาะอย่างน้อยที่สุดหนึ่งจำนวนที่มีเลขชี้กำลังเป็น 1

บทแทรก 31 สำหรับจำนวนธรรมชาติ n ที่มากกว่า 1 $n!$ ไม่สามารถเขียนในรูปจำนวนธรรมชาติจำนวนหนึ่งที่ยกกำลังที่ k , $k > 1$

ทฤษฎีบท 32 $p_{k+2} < 2p_k$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ $k > 3$

บทแทรก 33 $p_{k+1} < 2p_k$ สำหรับ $k = 1, 2, 3, \dots$

บทแทรก 34 $p_{k+2} < p_k + p_{k+1}$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ k ที่มากกว่า 1

บทแทรก 35 สำหรับทุก ๆ จำนวนธรรมชาติ k จะมีจำนวนธรรมชาติ m_k ที่สำหรับ $n \geq m_k$ และมีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุด k จำนวนที่อยู่ระหว่าง n และ $2n$

บทแทรก 36 สำหรับทุก ๆ จำนวนธรรมชาติ s จะมีจำนวนธรรมชาติจำนวนหนึ่งที่สามารถเขียนอยู่ในรูปผลบวกของสองจำนวนเฉพาะ ได้มากกว่า s แบบที่แตกต่างกัน

บทแทรก 37 ถ้าให้ $0 < a < b$ ดังนั้นจะได้ว่า $\pi(bx) > \pi(ax)$ สำหรับ x ที่มีค่ามากพอ

บทแทรก 38 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงบวก 2 จำนวน และ $a < b$ แล้ว สำหรับจำนวนจริง x ที่มีค่ามากพอ จะมีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยที่สุดหนึ่งจำนวนระหว่าง ax และ bx

บทแทรก 39 สำหรับลำดับจำกัดของตัวเลข $c_1, c_2, c_3, \dots, c_m$ ใดๆ จะมีจำนวนเฉพาะจำนวนหนึ่งที่ m หลักแรกเป็น $c_1, c_2, c_3, \dots, c_m$

อสมการต่าง ๆ

$$(1). \quad \pi(2n) - \pi(n) > \frac{n}{3 \log 2n} \left(\log 4 - \frac{3}{2n} \log 4n - \frac{3 \log 2n}{\sqrt{2n}} \right)$$

$$(2). \quad \log 4 - \frac{3}{2n} \log 4n - \frac{3 \log 2n}{\sqrt{2n}} > 1.38 - 0.37 > 1 \quad \text{สำหรับ } n > 2500$$

$$(3). \quad \pi(2n) - \pi(n) > \frac{n}{3 \log 2n} \quad \text{สำหรับ } n > 1$$

$$(4). \quad \frac{n}{3 \log 2n} < \pi(2n) - \pi(n) < \frac{7n}{5 \log n} \quad \text{สำหรับ } n > 1$$

$$(5). \quad \pi(n) > \frac{n}{12 \log n} \quad \text{สำหรับ } n > 1$$

$$(6). \quad \pi(2^k) < \frac{2^{k+1}}{k \log 2} \quad \text{สำหรับจำนวนธรรมชาติ } k$$

$$(7). \quad \pi(n) < \frac{4n}{\log n} \quad \text{สำหรับจำนวนธรรมชาติ } n > 1$$

$$(8). \quad \frac{n \log n}{4} < p_n < 36n \log n \quad \text{สำหรับ } n > 1$$

$$(9). \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log p_n}{\log n} = 1$$

$$(10). \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\pi(x); \frac{x}{\log x} \right] = 1$$

$$(11). \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{n \log n} = 1$$

$$(12). \quad \frac{n}{\log n - \frac{1}{2}} < \pi(n) < \frac{n}{\log n - \frac{3}{2}} \quad \text{สำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ } n \text{ ที่ } n \geq 67$$

$$(13). \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{\pi(nx)}}{\pi(nx) \cdot \log \pi(nx)} = 1$$

$$(14). \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(nx) \cdot \log nx}{nx} = 1$$

$$(15). \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \pi(nx)}{\log nx} = 1$$

$$(16). \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{\pi(nx)}}{nx} = 1$$

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright© by Chiang Mai University
 All rights reserved

ตารางจำนวนเฉพาะ

**	97	229	379	541	691	863	1039	1223	1427	1583
2	101	233	383	547	701	877	1049	1229	1429	1597
3	103	239	389	557	709	881	1051	1231	1433	1601
5	107	241	397	563	719	883	1061	1237	1439	1607
7	109	251	401	569	727	887	1063	1249	1447	1609
11	113	257	409	571	733	907	1069	1259	1451	1613
13	127	263	419	577	739	911	1087	1277	1453	1619
17	131	269	421	587	743	919	1091	1279	1459	1621
19	137	271	431	593	751	929	1093	1283	1471	1627
23	139	277	433	599	757	937	1097	1289	1481	1637
29	149	281	439	601	761	941	1103	1291	1483	1657
31	151	283	443	607	769	947	1109	1297	1487	1663
37	157	293	449	613	773	953	1117	1301	1489	1667
41	163	307	457	617	787	967	1123	1303	1493	1669
43	167	311	461	619	797	971	1129	1307	1499	1693
47	173	313	463	631	809	977	1151	1319	1511	1697
53	179	317	467	641	811	983	1153	1321	1523	1699
59	181	331	479	643	821	991	1163	1327	1531	1709
61	191	337	487	647	823	997	1171	1361	1543	1721
67	193	347	491	653	827	1009	1181	1367	1549	1723
71	197	349	499	659	829	1013	1187	1373	1553	1733
73	199	353	503	661	839	1019	1193	1381	1559	1741
79	211	359	509	673	853	1021	1201	1399	1567	1747
83	223	367	521	677	857	1031	1213	1409	1571	1753
89	227	373	523	683	859	1033	1217	1423	1579	1759

1777	1987	2153	2357	2557	2741	2953	3181	3371	3571
1788	1993	2161	2371	2579	2749	2957	3187	3373	3581
1787	1997	2179	2377	2591	2753	2963	3191	3389	3583
1789	1999	2203	2381	2593	2767	2969	3203	3391	3593
1801	2003	2207	2383	2609	2777	2971	3209	3407	3607
1811	2011	2213	2389	2617	2789	2999	3217	3413	3613
1823	2017	2221	2393	2621	2791	3001	3221	3433	3617
1831	2027	2237	2399	2633	2797	3011	3229	3449	3623
1847	2029	2239	2411	2647	2801	3019	3251	3457	3631
1861	2039	2243	2417	2657	2803	3023	3253	3461	3637
1867	2053	2251	2423	2659	2819	3037	3257	3463	3643
1871	2063	2267	2437	2663	2833	3041	3259	3467	3659
1873	2069	2269	2441	2671	2837	3049	3271	3469	3671
1877	2081	2273	2447	2677	2843	3061	3299	3491	3673
1879	2083	2281	2459	2683	2851	3067	3301	3499	3677
1889	2087	2287	2467	2687	2857	3079	3307	3511	3691
1901	2089	2293	2473	2689	2861	3083	3313	3517	3697
1907	2099	2297	2477	2693	2879	3089	3319	3527	3701
1913	2111	2309	2503	2699	2887	3109	3323	3529	3709
1931	2113	2311	2521	2707	2897	3119	3329	3533	3719
1933	2129	2333	2531	2711	2903	3121	3331	3539	3727
1949	2131	2339	2539	2713	2909	3137	3343	3541	3733
1951	2137	2341	2543	2719	2917	3163	3347	3547	3739
1973	2141	2347	2549	2729	2927	3167	3359	3557	3761
1979	2143	2351	2551	2731	2939	3169	3361	3559	3767

3769	3989	4201	4409	4637	4831	5039	5279	5483	5693
3779	4001	4211	4421	4639	4861	5051	5281	5501	5701
3793	4003	4217	4423	4643	4871	5059	5297	5503	5711
3797	4007	4219	4441	4649	4877	5077	5303	5507	5717
3803	4013	4229	4447	4651	4889	5081	5309	5519	5737
3821	4019	4231	4451	4657	4903	5087	5323	5521	5741
3823	4021	4241	4457	4663	4909	5099	5333	5527	5743
3833	4027	4243	4463	4673	4919	5101	5347	5531	5749
3847	4049	4253	4481	4679	4931	5107	5351	5557	5779
3851	4051	4259	4483	4691	4933	5113	5381	5563	5783
3853	4057	4261	4493	4703	4937	5119	5387	5569	5791
3863	4073	4271	4507	4721	4943	5147	5393	5573	5801
3877	4079	4273	4513	4723	4951	5153	5399	5581	5807
3881	4091	4283	4517	4729	4957	5167	5407	5591	5813
3889	4093	4289	4519	4733	4967	5171	5413	5623	5821
3907	4099	4297	4523	4751	4969	5179	5417	5639	5827
3911	4111	4327	4547	4759	4973	5189	5419	5641	5839
3917	4127	4337	4549	4783	4987	5197	5431	5647	5843
3919	4129	4339	4561	4787	4993	5209	5437	5651	5849
3923	4133	4349	4567	4789	4999	5227	5441	5653	5851
3929	4139	4357	4583	4793	5003	5231	5443	5657	5857
3931	4153	4363	4591	4799	5009	5233	5449	5659	5861
3943	4157	4373	4597	4801	5011	5237	5471	5669	5867
3947	4159	4391	4603	4813	5021	5261	5477	5683	5869
3967	4177	4397	4621	4817	5023	5273	5479	5689	5879

5881	6133	6337	6571	6793	6997	7237	7499	7687	7919
5897	6143	6343	6577	6803	7001	7243	7507	7691	7927
5903	6151	6353	6581	6823	7013	7247	7517	7699	7933
5923	6163	6359	6599	6827	7019	7253	7523	7703	7937
5927	6173	6361	6607	6829	7027	7283	7529	7717	7949
5939	6197	6367	6619	6833	7039	7297	7537	7723	7951
5953	6199	6373	6637	6841	7043	7307	7541	7727	7963
5981	6203	6379	6653	6857	7057	7309	7547	7741	7993
5987	6211	6389	6659	6863	7069	7321	7549	7753	8009
6007	6217	6397	6661	6869	7079	7331	7559	7757	8011
6011	6221	6421	6673	6871	7103	7333	7561	7759	8017
6029	6229	6427	6679	6883	7109	7349	7573	7789	8039
6037	6247	6449	6689	6899	7121	7351	7577	7793	8053
6043	6257	6451	6691	6907	7127	7369	7583	7817	8059
6047	6263	6469	6701	6911	7129	7393	7589	7823	8069
6053	6269	6473	6703	6917	7151	7411	7591	7829	8081
6067	6271	6481	6709	6947	7159	7417	7603	7841	8087
6073	6277	6491	6719	6949	7177	7433	7607	7853	8089
6079	6287	6521	6733	6959	7187	7451	7621	7867	8093
6089	6299	6529	6737	6961	7193	7457	7639	7873	8101
6091	6301	6547	6761	6967	7207	7459	7643	7877	8111
6101	6311	6551	6763	6971	7211	7477	7649	7879	8117
6113	6317	6553	6779	6977	7213	7481	7669	7883	8123
6121	6323	6563	6781	6983	7219	7487	7673	7901	8147
6131	6329	6569	6791	6991	7229	7489	7681	7907	8161

8167	8387	8629	8831	9049	9283	9479	9733	9931	10177
8171	8389	8641	8837	9059	9293	9491	9739	9941	10181
8179	8419	8647	8839	9067	9311	9497	9743	9949	10193
8191	8423	8663	8849	9091	9319	9511	9749	9967	10211
8209	8429	8669	8861	9103	9323	9521	9767	9973	10223
8219	8431	8677	8863	9109	9337	9533	9769	10007	10243
8221	8443	8681	8867	9127	9341	9539	9781	10009	10247
8231	8447	8689	8887	9133	9343	9547	9787	10037	10253
8233	8461	8693	8893	9137	9349	9551	9791	10039	10259
8237	8467	8699	8923	9151	9371	9587	9803	10061	10267
8243	8501	8707	8929	9157	9377	9601	9811	10067	10271
8263	8513	8713	8933	9161	9391	9613	9817	10069	10273
8269	8521	8719	8941	9173	9397	9619	9829	10079	10289
8273	8527	8731	8951	9181	9403	9623	9833	10091	10301
8287	8537	8737	8963	9187	9413	9629	9839	10093	10303
8291	8539	8741	8969	9199	9419	9631	9851	10099	10313
8293	8543	8747	8971	9203	9421	9643	9857	10103	10321
8297	8563	8753	8999	9209	9431	9649	9859	10111	10331
8311	8573	8761	9001	9221	9433	9661	9871	10133	10333
8317	8581	8779	9007	9227	9437	9677	9883	10139	10337
8329	8597	8783	9011	9239	9439	9679	9887	10141	10343
8353	8599	8803	9013	9241	9461	9689	9901	10151	10357
8363	8609	8807	9029	9257	9463	9697	9907	10159	10369
8369	8623	8819	9041	9277	9467	9719	9923	10163	10391
8377	8627	8821	9043	9281	9473	9721	9929	10169	10399

10427	10657	10891	11149	11393	11657	11897	12109	12347
10429	10663	10903	11159	11399	11677	11903	12113	12373
10433	10667	10909	11161	11411	11681	11909	12119	12377
10453	10687	10937	11171	11423	11689	11923	12143	12379
10457	10691	10939	11173	11437	11699	11927	12149	12391
10459	10709	10949	11177	11443	11701	11933	12157	12401
10463	10711	10957	11197	11447	11717	11939	12161	12409
10477	10723	10973	11213	11467	11719	11941	12163	12413
10487	10729	10979	11239	11471	11731	11953	12197	12421
10499	10733	10987	11243	11483	11743	11959	12203	12433
10501	10739	10993	11251	11489	11777	11969	12211	12437
10513	10753	11003	11257	11491	11779	11971	12227	12451
10529	10771	11027	11261	11497	11783	11981	12239	12457
10531	10781	11047	11273	11503	11789	11987	12241	12473
10559	10789	11057	11279	11519	11801	12007	12251	12479
10567	10799	11059	11287	11527	11807	12011	12253	12487
10589	10831	11069	11299	11549	11813	12037	12263	12491
10597	10837	11071	11311	11551	11821	12041	12269	12497
10601	10847	11083	11317	11579	11827	12043	12277	12503
10607	10853	11087	11321	11587	11831	12049	12281	12511
10613	10859	11093	11329	11593	11833	12071	12289	12517
10627	10861	11113	11351	11597	11839	12073	12301	12527
10631	10867	11117	11353	11617	11863	12097	12323	12539
10639	10883	11119	11369	11621	11867	12101	12329	12541
10651	10889	11131	11383	11633	11887	12107	12343	12547

12553	12601	12641	12689	12739	12791	12829	12899	...	...
12569	12611	12647	12697	12743	12799	12841	12907	...	...
12577	12613	12653	12703	12757	12809	12853	12911	...	...
12583	12619	12659	12713	12763	12821	12889	12917	...	...
12589	12637	12671	12721	12781	12823	12893	12919	...	...

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
 Copyright© by Chiang Mai University
 All rights reserved