บทที่ 2
ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานเพื่อนำไปใช้อ้างอิงในบทต่อไป โดยจะกล่าวถึงนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องโดยไม่มีการพิสูจน์ ตลอดงานวิจัยนี้ฟิลด์ของสเกลาร์คือฟิลด์ของจำนวนจริง ($\mathbb{R}$)

2.1 ลำดับและอนุกรม (Sequence and Series)

นิยาม 2.1.1 ให้ (a_n) เป็นลำดับ จะกล่าวว่า (a_n) ***มีลิมิตเป็น L*** (ขณะที่ n เข้าใกล้อนันต์ ถ้าสำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้ใด ๆ แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก N_0 (อาจขึ้นอยู่กับ ε) ซึ่ง $|a_n - L| < \varepsilon$ เมื่อ $n \geq N_0$ เขียนแทนสัญลักษณ์ $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ หรือ $a_n \to L$ ขณะที่ $n \to \infty$

นิยาม 2.1.2 ถ้าลำดับ (a_n) ใด ๆ มีลิมิตเป็น L เมื่อ L เป็นจำนวนจริงแล้ว จะเรียกว่า ลำดับ (a_n) ***ลู่เข้า (Converge) สู่ L*** และเรียก (a_n) นี้ว่า ***ลำดับลู่เข้า (Convergent sequence)*** ลำดับ (a_n) ใด ๆ จะเรียกว่าเป็น ***ลำดับลู่ออก (Divergent sequence)*** ก็ต่อเมื่อ ลำดับนั้นไม่เป็นลำดับที่ลู่เข้า

นิยาม 2.1.3 ลำดับ (a_n) ใด ๆ จะเรียกว่าเป็น ***ลำดับที่มีขอบเขต (bounded sequence)*** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง $M > 0$ ที่ทำให้ $|x_n| \leq M$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

นิยาม 2.1.4 เมื่อ $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ เป็นลำดับจำกัด และ $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ เป็นลำดับอนันต์ จะเรียกการแสดงผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับในรูป $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ หรือ $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ ว่า***อนุกรม (Series)*** อนุกรมที่ได้จากลำดับจำกัด เรียกว่า ***อนุกรมจำกัด (finite series)*** และอนุกรมที่ได้จากลำดับอนันต์ เรียกว่า***อนุกรมอนันต์ (infinite series)*** เรียก a_n ว่าพจน์ที่ n ของอนุกรม เขียนแทน $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ ด้วย $\sum_{i=1}^{n} a_i$ และเขียน $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ ด้วย $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$

ผลบวกย่อยของอนุกรม คือผลรวมของพจน์ตั้งแต่พจน์ที่ 1 ถึงพจน์ที่ n ของอนุกรม เขียนแทนด้วย S_n เรียก S_n ว่า ***ผลบวกย่อยที่ n ของอนุกรม*** และเรียกลำดับ (S_n) ว่า ***ลำดับของผลบวกย่อย***

นิยาม 2.1.5 1) ถ้าลำดับของผลบวกย่อย (S_n) ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า แล้ว จะกล่าวว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าและถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n = L$ แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะลู่เข้า L โดยจะกล่าวว่า L เป็นผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เขียนเป็น $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$

2) ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ไม่ลู่เข้า จะกล่าวว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก

ทฤษฎีบท 2.1.6 ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ ย่อมลู่เข้าด้วย และ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(ดู [1] หน้า 128)

ทฤษฎีบท 2.1.7 ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ ย่อมลู่เข้า และ $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(ดู [1] หน้า 129)

ทฤษฎีบท 2.1.8 ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(ดู [1] หน้า 130)

2.2 ปริภูมิเมตริกและปริภูมินอร์ม (Metrix Spaces and Normed Spaces)

นิยาม 2.2.1 *ปริภูมิเมตริก (metrix space)* คือ คู่ลำดับ (X,d) เมื่อ X เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ d เป็น*เมตริกหรือฟังก์ชันระยะทาง*บน X นั่นคือ $d: X\times X \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติต่อไปนี้ สำหรับสมาชิก x,y และ z ใด ๆ ของ X

1) $d(x,y) \geq 0$
2) $d(x,y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$
3) $d(x,y) = d(y,x)$
4) $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$

นิยาม 2.2.2 ลำดับ (x_n) ในปริภูมิเมตริก (X,d) จะเรียกว่าเป็น*ลำดับที่ลู่เข้า (convergent)* ถ้ามี $x \in X$ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$ จะเรียก x ว่าลิมิตของลำดับ (x_n) และ เขียนแทนด้วย $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ถ้าลำดับ (x_n) ไม่เป็นลำดับลู่เข้า จะเรียกว่าเป็น*ลำดับที่ลู่ออก (divergent)*

นิยาม 2.2.3 จะเรียกลำดับ (x_n) ในปริภูมิเมตริก (X,d) ว่าเป็น*ลำดับโคชี (Cauchy sequence)* ถ้าแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $d(x_m,x_n) < \varepsilon$ สำหรับทุก $m,n \geq N_\varepsilon$ เราจะเรียกปริภูมิเมตริก X ว่าเป็น*ปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ (complete metric space)* ถ้าทุกลำดับโคชีใน X เป็นลำดับลู่เข้าใน X

นิยาม 2.2.4 ***ปริภูมินอร์ม (normed space) X*** หมายถึง ปริภูมิเวกเตอร์ที่มีนอร์ม นิยามได้บน X โดยที่ ***นอร์มบน X*** หมายถึง ฟังก์ชันค่าจริงบน X ที่แต่ละ $x \in X$ มีค่าฟังก์ชันเป็น $\|x\|$ (อ่านว่า "นอร์มของ x") ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

1) $\|x\| \geq 0$
2) $\|x\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$
3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ สำหรับ $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
4) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ สำหรับ $y \in X$

เราสามารถนิยามเมตริกบนปริภูมินอร์ม X ดังนี้ $d(x,y) = \|x-y\|$ สำหรับทุก $x,y \in X$ และ เรียกเมตริกนี้ว่า ***เมตริกที่เกิดจากนอร์ม (metrix induced by the norm)*** เขียนแทนปริภูมินอร์ม X ด้วย $(X,\|\cdot\|)$ หรือ X

นิยาม 2.2.5 ลำดับ (x_k) ในปริภูมินอร์ม X เป็นลำดับที่ลู่เข้า ถ้ามี $x \in X$ ที่ทำให้ $\lim_{k\to\infty}\|x_k - x\| = 0$ เขียนแทนด้วย $x_k \longrightarrow x$ และเรียก x ว่าเป็น***ลิมิตของลำดับ (x_k)*** ลำดับ (x_k) ในปริภูมินอร์ม X เป็น ***ลำดับโคชี*** เมื่อสำหรับทุก $\varepsilon > 0$ มี $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้ $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ สำหรับ $m,n \geq N_\varepsilon$

นิยาม 2.2.6 ***ปริภูมิบานาค (Banach space)*** หมายถึง ปริภูมินอร์มที่เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ภายใต้เมตริกที่เกิดจากนอร์ม

นิยาม 2.2.7 จะเรียกปริภูมิเมตริก (X,d) ว่า***ปริภูมิเฟรเชท (Frechet spaces)*** ถ้า (X,d) เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ และ $d(x+a,y+a) = d(x,y)$ ทุก $x,y,a \in X$

ถ้า (X,d) เป็นปริภูมิเฟรเชท และ $x \in X$ จะเรียก $d(x,0)$ ว่านอร์มของ x และเขียนแทนด้วย $\|x\|$ (อ่านว่า "นอร์มเฟรเชทของ x")

2.3 ปริภูมิลำดับ (Sequence Spaces)

นิยาม 2.3.1 ***ปริภูมิลำดับ (Sequence spaces)*** หมายถึง ปริภูมิเวกเตอร์ที่มีสมาชิกเป็นลำดับใน $\mathbb{R}$ หรือ $\mathbb{C}$ ภายใต้การบวกปกติและการคูณด้วยสเกลาร์

นิยาม 2.3.2 ให้ x เป็นลำดับใด ๆ และ $k \in \mathbb{N}$ จะเขียนแทนพจน์ที่ k ของลำดับ x ด้วย x_k ให้ e เป็นลำดับ โดยที่ $e_k = 1$ สำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$ และ e^k เป็นลำดับที่กำหนดโดย $e_n^k = \begin{cases} 1 \text{ เมื่อ } n = k \\ 0 \text{ เมื่อ } n \neq k \end{cases}$

และ x^N เป็นลำดับที่กำหนดโดย $x_k^N = \begin{cases} x_k & \text{เมื่อ } 1 \le k \le N \\ 0 & \text{เมื่อ } k > N \end{cases}$ และ $x\chi_A$ โดยที่ $A \subseteq \mathbb{N}$ และ A ไม่เป็นเซตว่าง เป็นลำดับที่กำหนดโดย $x\chi_{A_k} = \begin{cases} x_k & \text{เมื่อ } k \in A \\ 0 & \text{เมื่อ } k \notin A \end{cases}$ ให้ปริภูมิของลำดับทั้งหมดแทนด้วย W และ ϕ แทนปริภูมิของลำดับจำกัด นั่นคือ $\phi = \{ (x_k) \mid x_k = 0$ สำหรับทุก k ยกเว้นเป็นจำนวนจำกัด $\}$

ต่อไปจะกล่าวถึง ปริภูมิลำดับที่คลาสิคบางปริภูมิลำดับและนอร์มของแต่ละปริภูมิลำดับนั้น

$$\ell_p = \{ (x_k) \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \} \ (1 \le p < \infty) \ , \ \|x\|_{\ell_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\ell_\infty = \{ (x_k) \mid |x_k| \le M \ , \ \exists \ M > 0 \} \ , \ \|x\|_{\ell_\infty} = \sup_k |x_k|$$

$$c_0 = \{ (x_k) \mid \lim_{k \to \infty} x_k = 0 \} \ , \ \|x\|_{c_0} = \sup_k |x_k|$$

ต่อไปจะกล่าวถึงปริภูมิลำดับที่ศึกษาจากเอกสารหมายเลข [2],[4] และ [8] ดังนี้

$$E_r = \{ (x_k) \mid |x_k| \le Ak^r \ , \ \exists A > 0 \} \ (r > 0)$$

$$F_r = \{ (x_k) \mid \sum_{k=1}^{\infty} k^r |x_k| < \infty \} \ (r > 0)$$

$$w_0 = \{ (x_k) \mid \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k| = 0 \}$$

ปริภูมิ E_r , F_r และ w_0 เป็นปริภูมินอร์ม โดยมีนอร์มดังนี้

$$\|x\|_{E_r} = \sup_k \frac{|x_k|}{k^r}$$

$$\|x\|_{F_r} = \sum_{k=1}^{\infty} k^r |x_k|$$

$\|x\|_{w_0} = \sup_r \left\{ 2^{-r} \sum_r |x_k| \right\}$ โดยที่ $\sum_r$ เป็นผลบวกบนช่วง $2^r \le k < 2^{r+1}$ และ $r = 0,1,2,\ldots$

สำหรับปริภูมิลำดับ W เป็นปริภูมิลำดับนอร์มเฟรเชท ภายใต้นอร์มเฟรเชทที่นิยามดังนี้

$$\|x\|_w = \sum_{k=i}^{\infty} \frac{|x_k|}{2^k (1 + |x_k|)}$$

นิยาม 2.3.3 ให้ X เป็นปริภูมิลำดับที่เป็นปริภูมินอร์ม จะได้ว่า X เป็น*ปริภูมิ K (K-space)* ก็ต่อเมื่อฟังก์ชัน $P_i: X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$ ($P_i: X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ นิยามโดย $P_i(x) = x_i$ สำหรับแต่ละ $x \in X$)

นิยาม 2.3.4 ให้ X เป็นปริภูมิลำดับที่เป็นปริภูมินอร์ม เรียก X ว่าเป็น*ปริภูมิ BK (BK-space)* เมื่อ X เป็นปริภูมิบานาคและปริภูมิ K

ทฤษฎีบท 2.3.5 ปริภูมิลำดับ ℓ_∞ , c_0 , ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$, E_r , F_r เป็นปริภูมิ BK (ดู [2] และ [3])

นิยาม 2.3.6 ให้ X เป็นปริภูมิลำดับที่เป็นปริภูมินอร์ม X มี*คุณสมบัติ AK* เมื่อ X บรรจุ ϕ และแต่ละ $x = (x_k) \in X$, $x = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e^k$ นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} (x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots) = (x_1,x_2,\ldots)$

ทฤษฎีบท 2.3.7 ปริภูมิลำดับ c_0 , ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$, F_r เป็นปริภูมินอร์มที่มีคุณสมบัติ AK (ดู [2] และ [3])

ทฤษฎีบท 2.3.8 ถ้า $x,y \in \ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$ แล้ว $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ (ดู [6] หน้า 14)

2.4 ฟังก์ชันออร์โทโกนัลแอตดิทีฟและฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน (Orthogonally Additive and Superposition Functions)

นิยาม 2.4.1 ให้ X เป็นปริภูมิลำดับ เรียก X ว่า*โซลิด (solid)* ถ้า $x \in X$ และ $|y| \leq |x|$ แล้ว $y \in X$ ($|y| \leq |x|$ หมายความว่า $|y_k| \leq |x_k|$ ทุก $k \in \mathbb{N}$)

นิยาม 2.4.2 ให้ X เป็นปริภูมิลำดับ และ $(x^{(n)}) \in X$ เรียกลำดับ $(x^{(n)})$ ว่า*โดมิเนต (dominated)* ถ้ามี $y \in X$ ที่ $|x^{(n)}| \leq y$ ทุก $n \in \mathbb{N}$

นิยาม 2.4.3 ให้ X เป็นปริภูมิลำดับ และ ให้ $x = (x_k)$, $y = (y_k) \in X$ เรียก $G: X \rightarrow \mathbb{R}$ ว่าเป็น*ออร์โทโกนัลแอตดิทีฟ (orthogonally additive)* ถ้า $x,y \in X$ และ $x_k y_k = 0$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ แล้ว $G(x+y) = G(x)+G(y)$ เรียก G ว่าเป็น*อันดับต่อเนื่อง (order continuous)* ถ้าสำหรับแต่ละลำดับ $(x^{(n)})$ ที่โดมิเนต และสำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ ที่ $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$ จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} G(x^{(n)}) = G(x)$

นิยาม 2.4.4 ให้ $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ และถ้า X เป็นปริภูมิลำดับใด ๆ จะเรียกฟังก์ชัน $F: X \to W$ ที่นิยามโดย $F(x) = (f(k,x_k))_{k=1}^{\infty}$ ว่าเป็น*ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน(superposition)* และจะกล่าวว่า *f สอดคล้องเงื่อนไข A(1)* ถ้า $f(k,0) = 0$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ และ*สอดคล้องเงื่อนไข A(2)* ถ้าสำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $f(k,\cdot)$ ต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$

ทฤษฎีบท 2.4.5 ให้ X เป็นปริภูมิลำดับที่โซลิด และ $\phi \subseteq X$ จะได้ว่า $G: X \to \mathbb{R}$ เป็นออร์โทโกนัลแอตดิทีฟและเป็นอันดับต่อเนื่องบน X ก็ต่อเมื่อ มี f ที่สอดคล้องเงื่อนไข A(1) และ A(2) ที่ทำให้

1) $G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k,x_k)$

2) ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: X \to \ell_1$

(ดู [5])

ทฤษฎีบท 2.4.6 ให้ X เป็นปริภูมิลำดับที่โซลิด และเป็นปริภูมิ BK ที่มีคุณสมบัติ AK และทุก ๆ ลำดับ $(x^{(n)})$ ใน X ที่ลู่เข้า มีลำดับย่อยที่โดมิเนต จะได้ว่า $G: X \to \mathbb{R}$ เป็นออร์โทโกนัลแอตดิทีฟและต่อเนื่องบน X ก็ต่อเมื่อ มี f ที่สอดคล้องเงื่อนไข A(1) และ A(2) ที่ทำให้

1) $G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k,x_k)$

2) ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: X \to \ell_1$

(ดู [5])

ทฤษฎีบทนำ 2.4.7 ให้ X เป็นปริภูมิลำดับที่โซลิด และเป็นปริภูมิ BK จะได้ว่า ถ้า $\||x|\| = \|x\|$ ทุก $x \in X$ แล้วทุก ๆ ลำดับ $(x^{(n)})$ ใน X ที่ลู่เข้า จะมีลำดับย่อยที่โดมิเนต

(ดู [5])

ทฤษฎีบทนำ 2.4.8 ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: \ell_p \to \ell_1$ $(1 \le p < \infty)$ ก็ต่อเมื่อ มี $\alpha,\beta > 0$ และ $(c_k)\in\ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k+\alpha|t|^p$ เมื่อ $|t| \le \beta$

(ดู [5])

ทฤษฎีบท 2.4.9 $G: \ell_p \to \mathbb{R}$ เป็นออร์โทโกนัลแอตดิทีฟและต่อเนื่องบน ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ ก็ต่อเมื่อ มี f ที่สอดคล้องเงื่อนไข A(1) และ A(2) ที่ทำให้

1) $G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k,x_k)$

2) มี $\alpha,\beta > 0$ และ $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k+\alpha|t|^p$ เมื่อ $|t|\le\beta$

(ดู [5])

ทฤษฎีบทนำ 2.4.10 ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: c_0 \to \ell_1$ ก็ต่อเมื่อ มี $\alpha > 0$ และ $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k$ เมื่อ $|t| \le \alpha$

(ดู [5])

ทฤษฎีบท 2.4.11 $G: c_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ เป็นออร์โทโกนัลแอดดิทีฟและต่อเนื่องบน c_0 ก็ต่อเมื่อ มี f ที่สอดคล้องเงื่อนไข A(1) และ A(2) ที่ทำให้

1) $G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k, x_k)$

2) มี $\alpha > 0$ และ $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \leq c_k$ เมื่อ $|t| \leq \alpha$

(ดู [5])

ทฤษฎีบทนำ 2.4.12 ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: W \longrightarrow \ell_1$ ก็ต่อเมื่อ มี $L > 0$ และ $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \geq L$, $|f(k,t)| \leq c_k$ ทุก $t \in \mathbb{R}$

(ดู [7])

ทฤษฎีบท 2.4.13 $G: W \longrightarrow \mathbb{R}$ เป็นออร์โทโกนัลแอดดิทีฟและต่อเนื่องบน W ก็ต่อเมื่อ มี f ที่สอดคล้องเงื่อนไข A(1) และ A(2) ที่ทำให้

1) $G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k, x_k)$

2) มี $L > 0$ และ $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \geq L$, $|f(k,t)| \leq c_k$ ทุก $t \in \mathbb{R}$

(ดู [7])