บทที่ 3
ขอบเขตของตัวดำเนินการซูเปอร์โพซิชัน

การศึกษาทฤษฎีของตัวแทน (Representations Theory) ของฟังก์ชันออร์โทโกนัลแอตดิทีฟที่ต่อเนื่องและที่เป็นอันดับต่อเนื่องนั้น นับว่ามีความสำคัญที่จะช่วยทำให้เราได้เห็นลักษณะและคุณสมบัติของฟังก์ชันเหล่านั้นได้ง่ายขึ้น ดังนั้นในบทนี้จะให้ทฤษฎีของตัวแทนของฟังก์ชันดังกล่าวบนปริภูมิลำดับ E_r , F_r และ ℓ_∞ โดยอาศัยฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชันมาช่วยในการหาลักษณะนั้น ๆ ตลอดจนให้ลักษณะของฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชันที่ส่งจากปริภูมิลำดับ E_r , F_r และ ℓ_∞ ไปยังปริภูมิ ℓ_1 และ ให้ลักษณะของฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชันที่มีขอบเขตที่ส่งจากปริภูมิลำดับ ℓ_p , ℓ_∞ , c_0 , E_r , F_r และ W ไปยังปริภูมิ ℓ_1

3.1 ลักษณะของฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชันที่มีขอบเขตที่ส่งจากปริภูมิ ℓ_p ไปยังปริภูมิ ℓ_1

จากทฤษฎีบท 2.4.9 ทำให้เราทราบถึงทฤษฎีของตัวแทนของฟังก์ชันออร์โทโกนัลแอตดิทีฟที่ต่อเนื่องบนปริภูมิลำดับ ℓ_p โดยอาศัยฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชันที่ได้จากทฤษฎีบทนำ 2.4.8 สำหรับหัวข้อนี้จะหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะทำให้ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต

นิยาม 3.1.1 จะกล่าวว่า $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *สอดคล้องเงื่อนไข T(1)* ถ้ามี $\alpha,\beta > 0$ และ $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k+\alpha|t|^p$ เมื่อ $|t| \le \beta$ และ f *สอดคล้องเงื่อนไข A(2′)* ถ้าแต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $f(k,\cdot)$ มีขอบเขตทุก ๆ สับเซตที่มีขอบเขตของจำนวนจริง

ข้อสังเกต 3.1.2 เงื่อนไข A(2) ในนิยาม 2.4.4 จะได้เงื่อนไข A(2′) เป็นจริง

นิยาม 3.1.3 ให้ X,Y เป็นปริภูมิลำดับที่บานาค จะกล่าวว่า $F: X \to Y$ เป็น*ฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ (locally bounded)* ที่ $z \in X$ ถ้ามี $\alpha,\beta > 0$ ที่ทำให้ถ้า $x \in X$ ซึ่ง $\|x-z\|_X \le \alpha$ แล้ว $\|F(x)-F(z)\|_Y \le \beta$

ทฤษฎีบทนำ 3.1.4 ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ จะได้ว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ ทุก ๆ $z \in \mathbb{R}$ แล้ว f สอดคล้องเงื่อนไข A(2′)

พิสูจน์ ให้ E เป็นเซตที่มีขอบเขตใน $\mathbb{R}$ เลือก $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ที่ $E \subseteq [a,b]$ ให้ $z \in [a,b]$ โดยการกำหนดให้จะมี α_z , $\beta_z > 0$ ที่ทำให้

$$\text{ถ้า } |x-z| \le \alpha_z \text{ แล้ว } |f(x)-f(z)| \le \beta_z \qquad (*)$$

เนื่องจาก $|x-z| < \alpha_z$ ทุก $x \in B(z,\alpha_z)$ โดย (*) จะได้ว่า $|f(x)-f(z)| \le \beta_z$ ทุก $x \in B(z,\alpha_z)$ ดังนั้น

$$|f(x)| \le \beta_z+|f(z)| \text{ ทุก } x \in B(z,\alpha_z) \qquad (**)$$

เนื่องจาก $[a,b] \subset \bigcup_{z\in[a,b]} B(z,\alpha_z)$ และ $[a,b]$ เป็นเซตคอมแพค ดังนั้น จะมี $z_1,z_2,\ldots,z_n \in [a,b]$ สำหรับบาง $n\in\mathbb{N}$ ที่ทำให้ $[a,b]\subset\bigcup_{k=1}^{n} B(z_k,\alpha_{z_k})$ โดย (**) จะได้ว่า สำหรับแต่ละ i ที่ $1 \le i \le n$, $|f(x)| \le \beta_{z_i} + |f(z_i)|$ ทุก $x\in B(z_i,\alpha_{z_i})$ ให้ $M = \max\{ \beta_{z_i} + |f(z_i)| : 1\le i\le n \}$ ดังนั้น $|f(x)|\le M$ ทุก $x \in \bigcup_{i=1}^{n} B(z_i,\alpha_{z_i})$ แต่ $E \subseteq [a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(z_i,\alpha_{z_i})$ นั่นคือ $|f(x)| \le M$ ทุก $x \in E$ ❑

ทฤษฎีบท 3.1.5 ให้ $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สอดคล้องเงื่อนไข A(1) และ T(1) จะได้ว่า ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: \ell_p \to \ell_1$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ทุก ๆ $z\in\ell_p$ ก็ต่อเมื่อ $f(k,\cdot)$ สอดคล้องเงื่อนไข A(2′)

พิสูจน์ ($\Leftarrow$) ให้ $z = (z_k) \in \ell_p$ จะแสดงว่า $F: \ell_p \to \ell_1$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ ที่ z นั่นคือ จะหา $\eta,\gamma > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $x \in \ell_p$ ซึ่ง $\|x-z\|_{\ell_p} \le \eta$ แล้ว $\|F(x)-F(z)\|_{\ell_1} \le \gamma$ เนื่องจาก f สอดคล้องเงื่อนไข T(1) ดังนั้นจะมี $\alpha,\beta > 0$ และ $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$,

$$|f(k,t)| \le c_k+\alpha|t|^p \text{ เมื่อ } |t| \le \beta \qquad (*)$$

ให้ $\eta = \dfrac{\beta}{2}$ และ $x \in \ell_p$ ซึ่ง $\|x-z\|_{\ell_p} \le \eta$ เนื่องจาก $z \in \ell_p$ ดังนั้น $\|z\|_{\ell_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ และ $\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|^p < \infty$ จะได้ว่า $|z_k|^p \to 0$ เมื่อ $k \to \infty$ และจะได้ว่า จะมี $r \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$\|z\chi_{\{r,r+1,\ldots\}}\|_{\ell_p} = \left(\sum_{k=r}^{\infty}|z_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \eta$$

เนื่องจาก $\|x-z\|_{\ell_p} \le \eta$ ดังนั้น $\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k - z_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \eta$ พิจารณา

$$\left(\sum_{k=r}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=r}^{\infty}|(x_k - z_k) + z_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=r}^{\infty}|x_k - z_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=r}^{\infty}|z_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\le \eta+\eta = 2\eta = 2\left(\frac{\beta}{2}\right) = \beta$$

ดังนั้น $\left(\sum_{k=r}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \beta$ หรือ $\sum_{k=r}^{\infty}|x_k|^p \le \beta^p$ จะได้ว่า $|x_k|^p \le \beta^p$ หรือ $|x_k| \le \beta$ ทุก $k = r,r+1,\ldots$ โดย (*) จะได้ว่า $|f(k,x_k)| \le c_k+\alpha|x_k|^p$ ทุก $k = r,r+1,\ldots$ ดังนั้น

$$\sum_{k=r+1}^{\infty}|f(k,x_k)| \le \sum_{k=r+1}^{\infty}\left(c_k + \alpha|x_k|^p\right) = \sum_{k=r+1}^{\infty}c_k + \alpha\sum_{k=r+1}^{\infty}|x_k|^p \le \sum_{k=1}^{\infty}|c_k| + \alpha\beta^p = \|(c_k)\|_{\ell_1} + \alpha\beta^p$$

นั่นคือ

$$\sum_{k=r+1}^{\infty}|f(k,x_k)| \le \|(c_k)\|_{\ell_1} + \alpha\beta^p \qquad (**)$$

เนื่องจาก f สอดคล้องเงื่อนไข A($2'$) ดังนั้นให้ $m_k = \sup_{|t-z_k|\le\eta} |f(k,t)|$ เพราะว่า $\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k - z_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \eta$

จะได้ว่า $|x_k - z_k| \le \eta$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ ดังนั้น

$$|f(k,x_k)| \le m_k \text{ ทุก } k \in \mathbb{N} \qquad (***)$$

เนื่องจาก $F(x) = (f(k,x_k))_{k=1}^{\infty}$ และจาก (**) และ (***) จะได้ว่า

$$\|F(x)\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{\infty}|f(k,x_k)| = \sum_{k=1}^{r}|f(k,x_k)| + \sum_{k=r+1}^{\infty}|f(k,x_k)| \le \sum_{k=1}^{r} m_k + \|(c_k)\|_{\ell_1} + \alpha\beta^p$$

$$= M + \|(c_k)\|_{\ell_1} + \alpha\beta^p \text{ โดยที่ } M = \sum_{k=1}^{r} m_k$$

นั่นคือ

$$\|F(x) - F(z)\|_{\ell_1} \le \|F(x)\|_{\ell_1} + \|F(z)\|_{\ell_1} \le M + \|(c_k)\|_{\ell_1} + \alpha\beta^p + \|F(z)\|_{\ell_1}$$

เนื่องจาก $\|F(z)\|_{\ell_1} < \infty$ ดังนั้น $\|F(x) - F(z)\|_{\ell_1} \le \gamma$ เมื่อ $\gamma = M + \|(c_k)\|_{\ell_1} + \alpha\beta^p + \|F(z)\|_{\ell_1}$

($\Longrightarrow$) จะแสดงว่า f สอดคล้องเงื่อนไข A($2'$) โดยการแสดงว่า แต่ละ $k \in \mathbb{N}$ และ $b \in \mathbb{R}$, $f(k,\cdot)$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ ที่ b ให้ $k \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{R}$ และ $y = (y_n)$ โดยที่ $y_n = \begin{cases} b & \text{เมื่อ } n = k \\ 0 & \text{เมื่อ } n \ne k \end{cases}$

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p = |b|^p < \infty$ ดังนั้น $y \in \ell_p$ โดยสมมุติฐานจะได้ว่า F เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ ที่ y ดังนั้น จะมี $\alpha, \beta > 0$ ที่ทำให้

$$\text{ถ้า } x \in \ell_p \text{ ซึ่ง } \|x - y\|_{\ell_p} \le \alpha \text{ แล้ว } \|F(x) - F(y)\|_{\ell_1} \le \beta \qquad (*)$$

ให้ $a \in \mathbb{R}$ ที่ $|a-b| \le \alpha$ และ $x = (x_n)$ โดยที่ $x_n = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } n = k \\ 0 & \text{เมื่อ } n \ne k \end{cases}$ เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p = |a|^p < \infty$

ดังนั้น $x \in \ell_p$ จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n - y_n|^p = |a-b|^p \le \alpha^p$ เพราะฉะนั้น

$$\|x - y\|_{\ell_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le (\alpha^p)^{\frac{1}{p}} = \alpha$$

โดย (*) จะได้ว่า $\|F(x) - F(y)\|_{\ell_1} \le \beta$ และเนื่องจาก f สอดคล้องเงื่อนไข A(1) จะได้ว่า $f(n,0) = 0$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ นั่นคือ $|f(k,a) - f(k,b)| = \sum_{n=1}^{\infty}|f(n,x_n) - f(n,y_n)| = \|F(x) - F(y)\|_{\ell_1} \le \beta$ เพราะฉะนั้น แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $f(k,\cdot)$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ ทุก ๆ $b \in \mathbb{R}$ และโดยทฤษฎีบทนำ 3.1.4 จะได้ว่า แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $f(k,\cdot)$ สอดคล้องเงื่อนไข A($2'$) ❑

บทแทรก 3.1.6 ให้ $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ สอดคล้องเงื่อนไข A(1) และ A(2) จะได้ว่า ถ้าฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: \ell_p \to \ell_1$ แล้ว F เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ ทุก ๆ $z \in \ell_p$

พิสูจน์ เนื่องจากฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: \ell_p \to \ell_1$ โดยทฤษฎีบทนำ 2.4.8 จะได้ว่า $f(k,\cdot)$ สอดคล้องเงื่อนไข T(1) และเนื่องจาก f สอดคล้องเงื่อนไข A(2) ดังนั้น $f(k,\cdot)$ สอดคล้องเงื่อนไข A($2'$) และโดยทฤษฎีบท 3.1.5 จะได้บทแทรกนี้เป็นจริง ❑

นิยาม 3.1.7 ให้ X,Y เป็นปริภูมิลำดับที่บานาค จะกล่าวว่าฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: X \to Y$ เป็นฟังก์ชันที่***มีขอบเขต (bounded)*** ถ้าทุก ๆ $\rho > 0$, $\sup\{\|F(x)\|_Y : x \in X , \|x\|_X \le \rho\} < \infty$

ทฤษฎีบท 3.1.8 ให้ X,Y เป็นปริภูมิลำดับที่บานาค จะได้ว่า ถ้าฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: X \to Y$ มีขอบเขต แล้ว F เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ ทุก ๆ $z \in X$

พิสูจน์ ให้ $z \in X$, $\eta > 0$ และ $x \in X$ ที่ $\|x-z\|_X \le \eta$ เนื่องจาก $\|x\|_X - \|z\|_X \le \|x-z\|_X \le \eta$ ดังนั้น $\|x\|_X \le \eta+\|z\|_X$ ให้ $\rho = \eta+\|z\|_X$ จะได้ว่า $\|x\|_X \le \rho$ เนื่องจาก F มีขอบเขต ดังนั้น

$$\|F(x)\|_Y \le \sup\{\|F(x')\|_Y : x' \in X , \|x'\|_X \le \rho\} < \infty$$

ให้ $M = \sup\{\|F(x')\|_Y : x' \in X , \|x'\|_X \le \rho\}$ จะได้ว่า

$$\|F(x)-F(z)\|_Y \le \|F(x)\|_Y + \|F(z)\|_Y \le M+\|F(z)\|_Y$$

นั่นคือ $\|F(x)-F(z)\|_Y \le \beta$ เมื่อ $\beta = M+\|F(z)\|_Y$ ❑

บทแทรก 3.1.9 ให้ $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ สอดคล้องเงื่อนไข A(1) จะได้ว่า ถ้าฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: \ell_p\to\ell_1$ มีขอบเขต แล้ว f สอดคล้องเงื่อนไข A($2'$)

พิสูจน์ เนื่องจาก $F: \ell_p \to \ell_1$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทนำ 2.4.8 จะได้ว่า f สอดคล้องเงื่อนไข T(1) และโดยทฤษฎีบท 3.1.5 และทฤษฎีบท 3.1.8 จะได้บทแทรกนี้เป็นจริง ❑

ต่อไปจะหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะทำให้ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: \ell_p \to \ell_1$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต

ทฤษฎีบทนำ 3.1.10 ให้ $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สอดคล้องเงื่อนไข $A(1)$, $A(2')$, $P \geq 1$ และทุก ๆ $\beta > 0$ จะมี $\alpha(\beta) > 0$ ซึ่งทุก ๆ $x = (x_k) \in \phi$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(k,x_k)| \leq \alpha(\beta) \text{ เมื่อ } \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p \leq \beta$$

แล้วจะได้ว่า จะมี $c(\beta) = (c_k(\beta)) \in \ell_1$ ซึ่ง $c_k(\beta) \geq 0$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ และ $\|c(\beta)\|_{\ell_1} \leq \alpha(\beta)$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$,

$$|f(k,t)| \leq c_k(\beta)+\frac{2\alpha(\beta)}{\beta}|t|^p \text{ เมื่อ } |t|^p \leq \beta$$

พิสูจน์ ให้ $\beta > 0$ โดยสมมุติฐานจะมี $\alpha(\beta) > 0$ ซึ่งทุก ๆ $x = (x_k) \in \phi$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(k,x_k)| \leq \alpha(\beta) \text{ เมื่อ } \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p \leq \beta \qquad (*)$$

สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ กำหนดให้

$$h_\beta(k,t) = \max\{0,|f(k,t)|-\frac{2\alpha(\beta)}{\beta}|t|^p\} \text{ และ } c_k(\beta) = \sup\{\, h_\beta(k,t) : |t|^p \leq \beta \,\}$$

ให้ $k \in \mathbb{N}$ และ $t \in \mathbb{R}$ ที่ $|t|^p \leq \beta$

กรณีที่ 1 $h_\beta(k,t) = 0$ จะเห็นได้ชัดว่า

$$|f(k,t)| \leq \frac{2\alpha(\beta)}{\beta}|t|^p = c_k(\beta)+\frac{2\alpha(\beta)}{\beta}|t|^p$$

กรณีที่ 2 $h_\beta(k,t) \neq 0$ จะได้ว่า $h_\beta(k,t) = |f(k,t)|-\frac{2\alpha(\beta)}{\beta}|t|^p$ ดังนั้น

$$|f(k,t)| = h_\beta(k,t)+\frac{2\alpha(\beta)}{\beta}|t|^p \leq c_k(\beta)+\frac{2\alpha(\beta)}{\beta}|t|^p$$

เพราะฉะนั้น แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \leq c_k(\beta)+\frac{2\alpha(\beta)}{\beta}|t|^p$ เมื่อ $|t|^p \leq \beta$

ต่อไปจะแสดงว่า $(c_k(\beta)) \in \ell_1$ โดยที่ $\|(c_k(\beta))\|_{\ell_1} \leq \alpha(\beta)$ เนื่องจาก f สอดคล้องเงื่อนไข $A(2')$ ดังนั้น $h_\beta(k,t)$ มีขอบเขตบนสับเซตที่มีขอบเขตของ $\mathbb{R}$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ และจากนิยามของ $c_k(\beta)$ จะได้ว่า ทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $y = (y_k)$ ซึ่ง $|y_k|^p \leq \beta$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$,

$$c_k(\beta) \leq h_\beta(k,y_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}$$

ให้ y' เป็นลำดับที่ $y'_k = \begin{cases} y_k\ , & h_\beta(k,y_k) \neq 0 \\ 0\ , & h_\beta(k,y_k) = 0 \end{cases}$ และให้ $m \in \mathbb{N}$ พิจารณา $\sum_{k=1}^{m}|y'_k|^p$ จะได้ว่า จะมีลำดับจำกัด (m_i) โดยที่ $m_1 = 1 < m_2 < \ldots < m_\ell = m$ บาง $\ell \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$\sum_{k=1}^{m}|y'_k|^p = \sum_{k=1}^{m_2-1}|y'_k|^p + \sum_{k=m_2}^{m_3-1}|y'_k|^p + \ldots + \sum_{k=m_{\ell-1}}^{m}|y'_k|^p \qquad (**)$$

ที่ซึ่ง $\frac{\beta}{2} \leq \sum_{k=m_i}^{m_{i+1}-1}|y'_k|^p \leq \beta$ สำหรับ $i = 1,2,\ldots,\ell-2$ และ $0 \leq \sum_{k=m_{\ell-1}}^{m}|y'_k|^p \leq \beta$

ให้ $z^{(i)} = y'\chi_{\{m_i, m_i+1,\ldots,m_{i+1}-1\}}$ สำหรับ $i = 1,2,\ldots,\ell-2$ และ $z^{(\ell-1)} = y'\chi_{\{m_{\ell-1}, m_{\ell-1}+1,\ldots,m_\ell=m\}}$ พิจารณา สำหรับ $i = 1,2,\ldots,\ell-1$ จะได้ว่า $z^{(i)} \in \phi$ และจาก (**) จะได้ว่า $\sum_{k=1}^{\infty}|z_k^{(i)}|^p \leq \beta$ โดย (*) จะได้ว่า $\sum_{k=1}^{\infty}|f(k,z_k^{(i)})| \leq \alpha(\beta)$ แต่ f สอดคล้องเงื่อนไข A(1) ดังนั้นสำหรับ $i=1,2,\ldots,\ell-2$

$$\sum_{k=m_i}^{m_{i+1}-1}|f(k,z_k^{(i)})| \leq \alpha(\beta) \text{ และ } \sum_{k=m_{\ell-1}}^{m}|f(k,z_k^{(\ell-1)})| \leq \alpha(\beta) \qquad (***)$$

และจะได้ว่า

$$h_\beta(k,z_k^{(i)}) = |f(k,z_k^{(i)})| - \frac{2\alpha(\beta)}{\beta}|z_k^{(i)}|^p \qquad (****)$$

ทุก $i = 1,2,\ldots,\ell-1$ ทุก $k \in \mathbb{N}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m}c_k(\beta) &\leq \sum_{k=1}^{m}\left(h_\beta(k,y_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m_2-1}h_\beta(k,y_k) + \sum_{k=m_2}^{m_3-1}h_\beta(k,y_k) + \ldots + \sum_{k=m_{\ell-1}}^{m}h_\beta(k,y_k) + \sum_{k=1}^{m}\frac{\varepsilon}{2^k} \\
&= \sum_{k=1}^{m_2-1}h_\beta(k,y'_k) + \sum_{k=m_2}^{m_3-1}h_\beta(k,y'_k) + \ldots + \sum_{k=m_{\ell-1}}^{m}h_\beta(k,y'_k) + \sum_{k=1}^{m}\frac{\varepsilon}{2^k} \\
&= \sum_{k=1}^{m_2-1}h_\beta(k,z_k^{(1)}) + \sum_{k=m_2}^{m_3-1}h_\beta(k,z_k^{(2)}) + \ldots + \sum_{k=m_{\ell-1}}^{m}h_\beta(k,z_k^{(\ell-1)}) + \sum_{k=1}^{m}\frac{\varepsilon}{2^k} \\
&= \sum_{k=1}^{m_2-1}\left(|f(k,z_k^{(1)})| - \frac{2\alpha(\beta)}{\beta}|z_k^{(1)}|^p\right) + \sum_{k=m_2}^{m_3-1}\left(|f(k,z_k^{(2)})| - \frac{2\alpha(\beta)}{\beta}|z_k^{(2)}|^p\right) \\
&\quad + \ldots + \sum_{k=m_{\ell-1}}^{m}\left(|f(k,z_k^{(\ell-1)})| - \frac{2\alpha(\beta)}{\beta}|z_k^{(\ell-1)}|^p\right) + \sum_{k=1}^{m}\frac{\varepsilon}{2^k}
\end{aligned}$$

(โดย(****))

$$\le (\ell-1)\alpha(\beta)-\frac{2\alpha(\beta)}{\beta}\sum_{k=1}^{m}|y_k'|^p+\sum_{k=1}^{m}\frac{\varepsilon}{2^k} \quad \text{(โดย (***))}$$

$$=(\ell-1)\alpha(\beta)-\frac{2\alpha(\beta)}{\beta}\left[\sum_{k=1}^{m_2-1}|y_k'|^p+\sum_{k=m_2}^{m_3-1}|y_k'|^p+\ldots+\sum_{k=m_{\ell-1}}^{m}|y_k'|^p\right]+\sum_{k=1}^{m}\frac{\varepsilon}{2^k}$$

$$\le (\ell-1)\alpha(\beta)-\frac{2\alpha(\beta)}{\beta}\left[(\ell-2)\frac{\beta}{2}+0\right]+\sum_{k=1}^{m}\frac{\varepsilon}{2^k} \quad \text{(โดย (**))}$$

$$=(\ell-1)\alpha(\beta)-(\ell-2)\alpha(\beta)+\sum_{k=1}^{m}\frac{\varepsilon}{2^k}$$

$$=\alpha(\beta)+\varepsilon\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}$$

เพราะฉะนั้น

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k(\beta)=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}c_k(\beta)\le\lim_{m\to\infty}\left[\alpha(\beta)+\varepsilon\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}\right]=\alpha(\beta)+\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

ดังนั้น $\sum_{k=1}^{\infty}c_k(\beta)\le\alpha(\beta)+\varepsilon$ แต่เนื่องจาก ε เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่มากกว่า 0 เพราะฉะนั้น $\sum_{k=1}^{\infty}c_k(\beta)\le\alpha(\beta)$ และเนื่องจาก $c_k(\beta)\ge 0$ ทุก $k\in\mathbb{N}$ ดังนั้น

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k(\beta)|=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(\beta)\le\alpha(\beta)$$

แสดงว่า $(c_k(\beta))\in\ell_1$ และ $\|(c_k(\beta))\|_{\ell_1}\le\alpha(\beta)$

นั่นคือ สำหรับแต่ละ $k\in\mathbb{N}$,

$$|f(k,t)|\le c_k(\beta)+\frac{2\alpha(\beta)}{\beta}|t|^p \text{ เมื่อ } |t|^p\le\beta$$

โดยที่ $(c_k(\beta))\in\ell_1$ ซึ่ง $\|(c_k(\beta))\|_{\ell_1}\le\alpha(\beta)$ และ $c_k(\beta)\ge 0$ ทุก $k\in\mathbb{N}$ ❑

ทฤษฎีบท 3.1.11 ให้ $f:\mathbb{N}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ สอดคล้องเงื่อนไข A(1) จะได้ว่า ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F:\ell_p\to\ell_1$ มีขอบเขต ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $\rho>0$ จะมี $c(\rho)=(c_k(\rho))\in\ell_1$ และ $\alpha(\rho)>0$ ที่ทำให้แต่ละ $k\in\mathbb{N}$, $|f(k,t)|\le c_k(\rho)+\alpha(\rho)|t|^p$ เมื่อ $|t|\le\rho$

พิสูจน์ ($\Leftarrow$) โดยสมมุติฐานและโดยทฤษฎีบทนำ 2.4.8 จะได้ว่า $F:\ell_p\to\ell_1$ ให้ $\rho>0$ และ $x\in\ell_p$ ที่ $\|x\|_{\ell_p}\le\rho$ จะแสดงว่า $\|F(x)\|_{\ell_1}\le M$ สำหรับบาง $M>0$ เนื่องจาก $\|x\|_{\ell_p}\le\rho$ จะได้ว่า $\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\rho$ หรือ $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\le\rho^p$ เพราะฉะนั้น $|x_k|^p\le\rho^p$ หรือ $|x_k|\le\rho$ ทุก $k\in\mathbb{N}$ โดยสมมุติฐานจะได้ว่า จะมี $c(\rho)=(c_k(\rho))\in\ell_1$ และ $\alpha(\rho)>0$ ที่ทำให้แต่ละ $k\in\mathbb{N}$,

$$|f(k,x_k)|\le c_k(\rho)+\alpha(\rho)|x_k|^p$$

เนื่องจาก $F(x) = (f(k,x_k))_{k=1}^{\infty}$ ดังนั้น

$$\|F(x)\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{\infty}|f(k,x_k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty}c_k(\rho)+\alpha(\rho)\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty}|c_k(\rho)|+\alpha(\rho)\cdot\rho^p$$

นั่นคือ

$$\|F(x)\|_{\ell_1} \leq M \text{ เมื่อ } M = \|c(\rho)\|_{\ell_1}+\alpha(\rho)\cdot\rho^p$$

เพราะฉะนั้น $\sup\{\ \|F(x')\|_{\ell_1} : x' \in \ell_p , \|x'\|_{\ell_p} \leq \rho\ \} < \infty$

($\Longrightarrow$) ให้ $\rho > 0$ ดังนั้นสำหรับแต่ละ $x \in \phi$ ที่ $\|x\|_{\ell_p} \leq \rho$ จะได้ว่า $\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \rho$ หรือ $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p \leq \rho^p$ และเนื่องจาก F มีขอบเขตจะได้ว่า $\sum_{k=1}^{\infty}|f(k,x_k)| = \|F(x)\|_{\ell_1} \leq M(\rho) < \infty$ ทุก $x \in \phi$ ที่ $\|x\|_{\ell_p} \leq \rho$ เมื่อ $M(\rho) = \sup\{\ \|F(x')\|_{\ell_1} : x' \in \ell_p , \|x'\|_{\ell_p} \leq \rho\ \}$ โดยบทแทรก 3.1.9 จะได้ว่า $f(k,\cdot)$ สอดคล้องเงื่อนไข $A(2')$ และจากทฤษฎีบทนำ 3.1.10 จะได้ว่า จะมี $c(\rho) = (c_k(\rho)) \in \ell_1$ ที่ $c_k(\rho) \geq 0$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ และ $\|c(\rho)\|_{\ell_1} \leq M(\rho)$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \leq c_k(\rho)+\frac{2M(\rho)}{\rho^p}|t|^p$ เมื่อ $|t|^p \leq \rho^p$ ให้ $\alpha(\rho) = \frac{2M(\rho)}{\rho^p}$ นั่นคือ แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \leq c_k(\rho)+\alpha(\rho)|t|^p$ เมื่อ $|t| \leq \rho$ ❑

ตัวอย่าง 3.1.12 ให้ $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(k,t) = \left(\frac{1}{2^k}+|t|^p\right)|t|$ ทุก $k\in\mathbb{N}$ ทุก $t\in\mathbb{R}$

จะเห็นได้ชัดว่า $f(k,0) = 0$ ทุก $k\in\mathbb{N}$ ดังนั้น $f(k,\cdot)$ สอดคล้องเงื่อนไข A(1) ให้ $\rho>0$ และ $t\in\mathbb{R}$, $|t| \leq \rho$ ดังนั้น สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$,

$$|f(k,t)| = \left(\frac{1}{2^k}+|t|^p\right)|t| \leq \left(\frac{1}{2^k}+|t|^p\right)\rho = \frac{\rho}{2^k}+\rho|t|^p$$

ให้ $\alpha(\rho) = \rho$ และ $(c_k(\rho)) = \left(\frac{\rho}{2^k}\right)$ จะได้ $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k(\rho)| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho}{2^k} = \rho\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \rho < \infty$ ดังนั้น $(c_k(\rho)) \in \ell_1$ และโดยทฤษฎีบท 3.1.11 จะได้ว่า $F: \ell_p \rightarrow \ell_1$ เป็นฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชันที่มีขอบเขต ❑

3.2 ลักษณะของฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชันที่มีขอบเขตที่ส่งจากปริภูมิ c_0 และ ℓ_∞ ไปยังปริภูมิ ℓ_1

ในส่วนแรกของหัวข้อนี้จะให้ทฤษฎีของตัวแทนของฟังก์ชันออร์โทโกนัลแอตดิทีฟที่เป็นอันดับต่อเนื่องบนปริภูมิลำดับ ℓ_∞

ทฤษฎีบทนำ 3.2.1 ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: \ell_\infty \to \ell_1$ ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $\alpha > 0$ จะมี $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k$ เมื่อ $|t| \le \alpha$

พิสูจน์ ($\Leftarrow$) ให้ $(x_k) \in \ell_\infty$ ดังนั้น $|x_k| \le M$ สำหรับบาง $M > 0$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ โดยการสมมุติฐานจะมี $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,x_k)| \le c_k$ เพราะฉะนั้น

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(k,x_k)| \le \sum_{k=1}^{\infty} c_k \le \sum_{k=1}^{\infty}|c_k| < \infty$$

ดังนั้น $F((x_k)) = (f(k,x_k))_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$ นั่นคือ $F: \ell_\infty \to \ell_1$

($\Rightarrow$) ให้ $F : \ell_\infty \to \ell_1$ และสำหรับ $\alpha > 0$ และแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ กำหนดให้

$$A(\alpha) = \{ t \in \mathbb{R} : |t| \le \alpha \} \text{ และ } B(k,\alpha) = \sup\{ |f(k,t)| : t \in A(\alpha) \}$$

จะได้ว่า $|f(k,t)| \le B(k,\alpha)$ เมื่อ $t \in A(\alpha)$ หรือ $|t| \le \alpha$ ต่อไปจะแสดงว่า $(B(k,\alpha))_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$ ทุก $\alpha > 0$ สมมุติให้ มี $\alpha_1 > 0$ ที่ทำให้ $(B(k,\alpha_1))_{k=1}^{\infty} \notin \ell_1$ ดังนั้น $\sum_{k=1}^{\infty}|B(k,\alpha_1)| = \infty$ แต่ $B(k,\alpha_1) \ge 0$ เพราะฉะนั้น $\sum_{k=1}^{\infty}B(k,\alpha_1) = \sum_{k=1}^{\infty}|B(k,\alpha_1)| = \infty$

และจะได้ว่า จะมีลำดับของจำนวนเต็ม $n_0=0 < n_1 < n_2 < \dots < n_j < \dots$ ที่ทำให้ $\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} B(k,\alpha_1) > 1$

และจะได้ว่า สำหรับแต่ละ $j \in \mathbb{N}$ จะมี $\varepsilon_j > 0$ ที่ทำให้

$$\left(\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} B(k,\alpha_1)\right) - (n_j - n_{j-1})\varepsilon_j > 1$$

สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ จะมี $j \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n_{j-1}+1 \le k \le n_j$ เนื่องจาก $B(k,\alpha_1) = \sup\{ |f(k,t)| : t \in A(\alpha_1) \}$ ดังนั้นจะมี $x_k \in A(\alpha_1)$ ที่ทำให้ $|f(k,x_k)| \ge B(k,\alpha_1) - \varepsilon_j$ ดังนั้น

$$\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}|f(k,x_k)| \ge \left(\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} B(k,\alpha_1)\right) - \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}\varepsilon_j = \left(\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} B(k,\alpha_1)\right) - (n_j - n_{j-1})\varepsilon_j > 1$$

แสดงว่า

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(k,x_k)| = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}|f(k,x_k)| > \sum_{j=1}^{\infty}1 = \infty \qquad (*)$$

เนื่องจาก $|x_k| \leq \alpha_1$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $(x_k) \in \ell_\infty$ แต่จาก (*) จะได้ว่า

$$F((x_k)) = (f(k,x_k))_{k=1}^{\infty} \notin \ell_1$$

ซึ่งขัดแย้งกับ $F : \ell_\infty \to \ell_1$ ดังนั้นที่สมมุติให้ไม่จริง เพราะฉะนั้น ทุก ๆ $\alpha > 0$ จะได้ว่า $(B(k,\alpha))_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$ นั่นคือ ทุก ๆ $\alpha > 0$ จะมี $(c_k)=(B(k,\alpha))_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \leq c_k$ เมื่อ $|t| \leq \alpha$ ☐

ทฤษฎีบท 3.2.2 $G : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ เป็นออร์โทโกนัลแอตดิทีฟและอันดับต่อเนื่องบน ℓ_∞ ก็ต่อเมื่อ มี $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ที่สอดคล้องเงื่อนไข A(1) และ A(2) ซึ่งทำให้

1. $G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k,x_k)$
2. ทุก ๆ $\alpha > 0$ จะมี $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \leq c_k$ เมื่อ $|t| \leq \alpha$

พิสูจน์ เนื่องจาก ℓ_∞ เป็นโซลิด และ $\phi \subseteq \ell_\infty$ โดยทฤษฎีบท 2.4.5 และทฤษฎีบทนำ 3.2.1 จะได้ทฤษฎีบทนี้เป็นจริง ☐

จากทฤษฎีบทนำ 3.2.1 ทำให้เราทราบถึงเงื่อนไขที่จะทำให้ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: \ell_\infty \to \ell_1$ ซึ่งเงื่อนไขที่ได้นั้นทำให้ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: \ell_\infty \to \ell_1$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต และมีขอบเขตเฉพาะที่ด้วย ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.3 ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: \ell_\infty \to \ell_1$ มีขอบเขต ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $\rho>0$ จะมี $c(\rho)=(c_k(\rho)) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \leq c_k(\rho)$ เมื่อ $|t| \leq \rho$

พิสูจน์ ($\Leftarrow$) โดยสมมุติฐานและทฤษฎีบทนำ 3.2.1 จะได้ว่า $F: \ell_\infty \to \ell_1$ ให้ $\rho > 0$ และ $x \in \ell_\infty$ ที่ $\|x\|_{\ell_\infty} \leq \rho$ จะแสดงว่า $\|F(x)\|_{\ell_1} \leq M$ สำหรับบาง $M > 0$ เนื่องจาก $\|x\|_{\ell_\infty} \leq \rho$ ดังนั้น $|x_k| \leq \rho$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ โดยสมมุติฐานจะได้ว่า จะมี $c(\rho)=(c_k(\rho)) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$,$|f(k,x_k)| \leq c_k(\rho)$ เนื่องจาก $F(x) = (f(k,x_k))_{k=1}^{\infty}$ ดังนั้น

$$\|F(x)\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{\infty} |f(k,x_k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\rho) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(\rho)| = \|c(\rho)\|_{\ell_1}$$

นั่นคือ

$$\|F(x)\|_{\ell_1} \leq M \text{ เมื่อ } M = \|c(\rho)\|_{\ell_1}$$

เพราะฉะนั้น $\sup \{ \|F(x')\|_{\ell_1} : x' \in \ell_\infty , \|x'\|_{\ell_\infty} \leq \rho \} < \infty$

($\Rightarrow$) เนื่องจาก $F: \ell_\infty \to \ell_1$ โดยทฤษฎีบทนำ 3.2.1 จะได้ว่า ทุก ๆ $\rho>0$ จะมี $c(\rho)=(c_k(\rho))\in\ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k\in\mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k(\rho)$ เมื่อ $|t| \le \rho$ $\square$

บทแทรก 3.2.4 ถ้าทุก ๆ $\rho > 0$ มี $c(\rho) = (c_k(\rho)) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k(\rho)$ เมื่อ $|t| \le \rho$ แล้ว $F: \ell_\infty \to \ell_1$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ ทุก ๆ $z \in \ell_\infty$

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 3.2.3 และทฤษฎีบท 3.1.8 จะได้บทแทรกนี้เป็นจริง $\square$

จากทฤษฎีบท 2.4.11 ทำให้เราทราบถึงทฤษฎีของตัวแทนของฟังก์ชันออร์โทโกนัลแอตดิทีฟที่ต่อเนื่องบนปริภมิลำดับ c_0 โดยอาศัยฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชันที่ได้จากทฤษฎีบทนำ 2.4.10 สำหรับหัวข้อนี้จะหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะทำให้ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต

นิยาม 3.2.5 จะกล่าวว่า $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *สอดคล้องเงื่อนไข $T(2)$* ถ้ามี $\alpha > 0$ และ $(c_k)\in\ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k$ เมื่อ $|t| \le \alpha$

ทฤษฎีบท 3.2.6 ให้ $f:\mathbb{N}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ สอดคล้องเงื่อนไข A(1) และ T(2) จะได้ว่า ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: c_0\to\ell_1$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ทุก ๆ $z \in c_0$ ก็ต่อเมื่อ $f(k,\cdot)$ สอดคล้องเงื่อนไข $A(2')$

พิสูจน์ ($\Leftarrow$) ให้ $z = (z_k) \in c_0$ จะแสดงว่า $F: c_0 \to \ell_1$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ ที่ z นั่นคือ จะหา $\eta,\gamma > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $x \in c_0$ ซึ่ง $\|x-z\|_{c_0} \le \eta$ แล้ว $\|F(x)-F(z)\|_{\ell_1} \le \gamma$ เนื่องจาก f สอดคล้องเงื่อนไข $T(2)$ ดังนั้นจะมี $\alpha > 0$ และ $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$,

$$|f(k,t)| \le c_k \text{ เมื่อ } |t| \le \alpha \qquad (*)$$

ให้ $\eta = \dfrac{\alpha}{2}$ และ $x \in c_0$ ซึ่ง $\|x-z\|_{c_0} \le \eta$ เนื่องจาก $z \in c_0$ ดังนั้น $\|z\|_{c_0} = \sup_k|z_k|$ และ $\lim_{k\to\infty}|z_k| = 0$ และจะได้ว่า จะมี $r \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$\left\|z\chi_{\{r,r+1,\ldots\}}\right\|_{c_0} = \sup_{k\ge r}|z_k| \le \eta$$

เนื่องจาก $\|x-z\|_{c_0} \le \eta$ ดังนั้น $\sup_k |x_k-z_k| \le \eta$ และสำหรับ $k \ge r$ จะได้ว่า

$$|x_k| \le \sup_{k\ge r} |x_k| = \sup_{k\ge r} |(x_k-z_k)+z_k| \le \sup_{k\ge r}\left(|x_k - z_k|+|z_k|\right) \le \sup_{k\ge r} |x_k-z_k|+\sup_{k\ge r} |z_k|$$

$$\le \eta+\eta = 2\eta = 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \alpha$$

นั่นคือ $|x_k| \le \alpha$ ทุก $k \ge r$ โดย (*) จะได้ว่า $|f(k,t)| \le c_k$ ทุก $k \ge r$ ดังนั้น

$$\sum_{k=r+1}^{\infty}|f(k,x_k)| \le \sum_{k=r+1}^{\infty}c_k \le \sum_{k=1}^{\infty}|c_k| = \|(c_k)\|_{\ell_1} \qquad (**)$$

เนื่องจาก f สอดคล้องเงื่อนไข $A(2')$ ดังนั้นให้ $m_k = \sup_{|t-z_k|\le\eta}|f(k,t)|$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ เพราะว่า $\sup_k |x_k-z_k| \le \eta$ จะได้ว่า $|x_k-z_k| \le \eta$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ ดังนั้น

$$|f(k,x_k)| \le m_k \text{ ทุก } k \in \mathbb{N} \qquad (***)$$

เนื่องจาก $F(x) = (f(k,x_k))_{k=1}^{\infty}$ และจาก (**) และ (***) จะได้ว่า

$$\|F(x)\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{\infty}|f(k,x_k)| = \sum_{k=1}^{r}|f(k,x_k)| + \sum_{k=r+1}^{\infty}|f(k,x_k)| \le \sum_{k=1}^{r}m_k + \|(c_k)\|_{\ell_1} = M + \|(c_k)\|_{\ell_1}$$

โดยที่ $M = \sum_{k=1}^{r}m_k$ นั่นคือ

$$\|F(x)-F(z)\|_{\ell_1} \le \|F(x)\|_{\ell_1} + \|F(z)\|_{\ell_1} \le M + \|(c_k)\|_{\ell_1} + \|F(z)\|_{\ell_1}$$

เนื่องจาก $\|F(z)\|_{\ell_1} < \infty$ ดังนั้น $\|F(x)-F(z)\|_{\ell_1} \le \gamma$ เมื่อ $\gamma = M + \|(c_k)\|_{\ell_1} + \|F(z)\|_{\ell_1} < \infty$

($\Longrightarrow$) จะแสดงว่า f สอดคล้องเงื่อนไข $A(2')$ โดยการแสดงว่า แต่ละ $k \in \mathbb{N}$ และ $b \in \mathbb{R}$, $f(k,\cdot)$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ ที่ b ให้ $k \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{R}$ และ $y = (y_n)$ โดยที่ $y_n = \begin{cases} b & \text{เมื่อ } n = k \\ 0 & \text{เมื่อ } n \ne k \end{cases}$

เนื่องจาก $y_n \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ ดังนั้น $y \in c_0$ โดยการกำหนดให้ จะได้ว่า F เป็นฟังก์ชันที่มีของเขตเฉพาะที่ ที่ y ดังนั้น จะมี $\alpha, \beta > 0$ ที่ทำให้

$$\text{ถ้า } x \in c_0 \text{ ซึ่ง } \|x-y\|_{c_0} \le \alpha \text{ แล้ว } \|F(x)-F(y)\|_{\ell_1} \le \beta \qquad (*)$$

ให้ $a \in \mathbb{R}$ ที่ $|a-b| \le \alpha$ และ $x = (x_n)$ โดยที่ $x_n = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } n = k \\ 0 & \text{เมื่อ } n \ne k \end{cases}$ เนื่องจาก $x_n \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ ดังนั้น $x \in c_0$ จะได้ว่า $\|x-y\|_{c_0} = \sup_n |x_n-y_n| = |a-b| \le \alpha$ โดย (*) จะได้ว่า $\|F(x)-F(y)\|_{\ell_1} \le \beta$ และเนื่องจาก f สอดคล้องเงื่อนไข A(1) จะได้ว่า $f(n,0) = 0$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ นั่นคือ $|f(k,a)-f(k,b)| = \sum_{n=1}^{\infty}|f(n,x_n)-f(n,y_n)| = \|F(x)-F(z)\|_{\ell_1} \le \beta$ เพราะฉะนั้นแต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $f(k,\cdot)$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ ทุก ๆ $b \in \mathbb{R}$ และโดยทฤษฎีบทนำ 3.1.4 จะได้ว่าแต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $f(k,\cdot)$ สอดคล้องเงื่อนไข $A(2')$ ❑

บทแทรก 3.2.7 ให้ $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ สอดคล้องเงื่อนไข A(1) และ A(2) จะได้ว่า ถ้าฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: c_0 \to \ell_1$ แล้ว F เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ ทุก ๆ $z \in c_0$

พิสูจน์ เนื่องจาก $F: c_0 \to \ell_1$ โดยทฤษฎีบทนำ 2.4.10 จะได้ว่า $f(k,\cdot)$ สอดคล้องเงื่อนไข T(2) และเนื่องจาก f สอดคล้องเงื่อนไข A(2) และจากข้อสังเกต 3.1.2 จะได้ว่า $f(k,\cdot)$ สอดคล้องเงื่อนไข $A(2')$ และโดยทฤษฎีบท 3.2.6 จะได้บทแทรกนี้เป็นจริง ❑

บทแทรก 3.2.8 ให้ $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ สอดคล้องเงื่อนไข A(1) จะได้ว่า ถ้าฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: c_0\to\ell_1$ มีขอบเขต แล้ว f สอดคล้องเงื่อนไข $A(2')$

พิสูจน์ เนื่องจาก $F: c_0 \to \ell_1$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทนำ 2.4.10 จะได้ว่า f สอดคล้องเงื่อนไข T(2) และโดยทฤษฎีบท 3.1.8 และทฤษฎีบท 3.2.6 จะได้บทแทรกนี้เป็นจริง ❑

พิจารณา ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: c_0 \to \ell_1$ ที่ f สอดคล้องเงื่อนไข T(2) จะได้ว่า F เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ ทุก ๆ $z \in c_0$ แต่ F ไม่จำเป็นที่จะต้องมีขอบเขตเสมอไป ดังตัวอย่าง ต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.2.9 ให้ $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(k,t) = \left|\frac{t}{2}\right|^k$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ ทุก $t \in \mathbb{R}$ จะเห็นได้ชัดว่า แต่ละ $k\in\mathbb{N}$, $f(k,0)=0$ และแต่ละ $k\in\mathbb{N}$, $f(k,\cdot)$ ต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$ นั่นคือ $f(k,\cdot)$ สอดคล้องเงื่อนไข A(1) และ A(2) และแต่ละ $k\in\mathbb{N}$, $|f(k,t)| = \left|\frac{t}{2}\right|^k = \frac{|t|^k}{2^k} \le \frac{1}{2^k}$ เมื่อ $|t|\le 1$ และ $\left(\frac{1}{2^k}\right)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$ ดังนั้น $f(k,\cdot)$ สอดคล้องเงื่อนไข T(2) ($c_k = \frac{1}{2^k}$ ทุก $k \in \mathbb{N}$, $\alpha = 1$) โดยทฤษฎีบทนำ 2.4.10 จะได้ว่า $F: c_0 \to \ell_1$ เป็นฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน และโดยบทแทรก 3.2.7 จะได้ว่า F เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ ทุก ๆ $z \in c_0$ ต่อไปจะแสดงว่า $F: c_0 \to \ell_1$ ไม่เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต สมมุติให้ F เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต ดังนั้น ทุก ๆ $\rho > 0$

$$\sup \{ \|F(x)\|_{\ell_1} : x \in c_0 , \|x\|_{c_0} \le \rho \} < \infty$$

ให้ $\rho = 2$ และสำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ กำหนดให้ $x^{(n)}$ เป็นลำดับที่ $x_k^{(n)} = \begin{cases} 2 & , k \le n \\ \frac{1}{2^{k-n}} & , k > n \end{cases}$ จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$, $x^{(n)} \in c_0$ และ $\|x^{(n)}\|_{c_0} = \sup_k x_k^{(n)} \le \rho$ และจะได้ว่า แต่ละ $n \in \mathbb{N}$, $F(x^{(n)}) = (f(k,x_k^{(n)}))_{k=1}^{\infty}$ โดยที่ $f(k,x_k^{(n)}) = \begin{cases} 1 & , k \le n \\ \frac{1}{2^{(k-n+1)k}} & , k > n \end{cases}$ เพราะฉะนั้นสำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$, $\|F(x^{(n)})\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{n} 1 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{(k-n+1)k}} = n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{(k-n+1)k}}$ ดังนั้น

$$\sup\{\|F(x^{(n)})\|_{\ell_1} : x^{(n)} \in c_0 , \|x^{(n)}\|_{c_0} \le \rho , n \in \mathbb{N}\} = \infty$$

ซึ่งขัดแย้งกับที่สมมุติให้ นั่นคือ F ไม่เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต ❑

ต่อไปจะหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะทำให้ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: c_0 \to \ell_1$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต

ทฤษฎีบทนำ 3.2.10 ให้ $f: \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สอดคล้องเงื่อนไข $A(2')$ และ ทุก ๆ $\beta > 0$ จะมี $\alpha(\beta) > 0$ ที่ทำให้

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(k,x_k)| \le \alpha(\beta) \text{ เมื่อ } |x_k| \le \beta \text{ ทุก } k \in \mathbb{N}$$

แล้วจะได้ว่า จะมี $c(\beta) = (c_k(\beta)) \in \ell_1$ ที่ $c_k(\beta) \ge 0$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ และ $\|c(\beta)\|_{\ell_1} \le \alpha(\beta)$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k(\beta)$ เมื่อ $|t| \le \beta$

พิสูจน์ ให้ $\beta > 0$ และสำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ กำหนดให้

$$A(\beta) = \{ t \in \mathbb{R} : |t| \le \beta \} \text{ และ } c_k(\beta) = \sup \{ |f(k,t)| : t \in A(\beta) \}$$

ดังนั้นแต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k(\beta)$ เมื่อ $|t| \in A(\beta)$ หรือ $|t| \le \beta$ ต่อไปจะแสดงว่า $(c_k(\beta)) \in \ell_1$ และ $\|c(\beta)\|_{\ell_1} \le \alpha(\beta)$ เนื่องจาก f สอดคล้องเงื่อนไข $A(2')$ จะได้ว่า ทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $x=(x_k)$ ซึ่ง $x_k \in A(\beta)$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $c_k(\beta) \le |f(k,x_k)| + \frac{\varepsilon}{2^k}$ เนื่องจาก $x_k \in A(\beta)$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ ดังนั้นโดยสมมุติฐาน จะมี $\alpha(\beta) > 0$ ที่ทำให้ $\sum_{k=1}^{\infty} |f(k,x_k)| \le \alpha(\beta)$ ดังนั้น $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(\beta) \le \sum_{k=1}^{\infty} |f(k,x_k)| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \alpha(\beta) + \varepsilon$ เนื่องจาก ε เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่มากกว่า 0 ดังนั้น $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(\beta) \le \alpha(\beta)$ แต่ $c_k(\beta) \ge 0$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(\beta)| = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\beta) \le \alpha(\beta)$

แสดงว่า $(c_k(\beta)) \in \ell_1$ และ $\|c(\beta)\|_{\ell_1} \le \alpha(\beta)$ นั่นคือ จะมี $c(\beta) = (c_k(\beta)) \in \ell_1$ ที่ $c_k(\beta) \ge 0$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ และ $\|c(\beta)\|_{\ell_1} \le \alpha(\beta)$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k(\beta)$ เมื่อ $|t| \le \beta$ ❑

ทฤษฎีบท 3.2.11 ให้ $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ จะได้ว่า ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: c_0 \to \ell_1$ มีขอบเขต ก็ต่อเมื่อทุก ๆ $\rho > 0$ จะมี $c(\rho) = (c_k(\rho)) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k(\rho)$ เมื่อ $|t| \le \rho$

พิสูจน์ $(\Leftarrow)$ โดยสมมุติฐานและทฤษฎีบทนำ 2.4.10 จะได้ว่า $F: c_0 \to \ell_1$ ให้ $\rho > 0$ และ $x \in c_0$ ที่ $\|x\|_{c_0} \le \rho$ จะแสดงว่า $\|F(x)\|_{\ell_1} \le M$ สำหรับบาง $M > 0$ เนื่องจาก $\|x\|_{c_0} \le \rho$ ดังนั้น $|x_k| \le \rho$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ โดยสมมุติฐานจะได้ว่า จะมี $c(\rho) = (c_k(\rho)) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,x_k)| \le c_k(\rho)$ เนื่องจาก $F(x) = (f(k,x_k))_{k=1}^{\infty}$ ดังนั้น

$$\|F(x)\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{\infty}|f(k,x_k)| \le \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\rho) \le \sum_{k=1}^{\infty}|c_k(\rho)| = \|c(\rho)\|_{\ell_1}$$

นั่นคือ

$$\|F(x)\|_{\ell_1} \le M \text{ เมื่อ } M = \|c(\rho)\|_{\ell_1}$$

เพราะฉะนั้น $\sup\{\|F(x')\|_{\ell_1} : x' \in c_o , \|x'\|_{c_0} \le \rho\} < \infty$

$(\Rightarrow)$ ให้ $\rho > 0$ ดังนั้นสำหรับแต่ละ $x \in c_0$ ที่ $\|x\|_{c_0} \le \rho$ จะได้ว่า $|x_k| \le \rho$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ และเนื่องจาก F มีขอบเขตจะได้ว่า $\sum_{k=1}^{\infty}|f(k,x_k)| = \|F(x)\|_{\ell_1} \le \alpha(\rho) < \infty$ ทุก $x \in c_0$ ที่ $\|x\|_{c_0} \le \rho$ เมื่อ $\alpha(\rho) = \sup\{\|F(x')\|_{\ell_1} : x' \in c_0 , \|x'\|_{c_0} \le \rho\}$ โดยบทแทรก 3.2.8 จะได้ว่า $f(k,\cdot)$ สอดคล้องเงื่อนไข $A(2')$ และโดยทฤษฎีบทนำ 3.2.10 จะได้ว่า จะมี $c(\rho) = (c_k(\rho)) \in \ell_1$ ที่ $c_k(\rho) \ge 0$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ และ $\|c(\rho)\|_{\ell_1} \le \alpha(\rho)$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k(\rho)$ เมื่อ $|t| \le \rho$ ❑

ตัวอย่าง 3.2.12 ให้ $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(k,t) = \left|\frac{t}{2^k}\right|$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ ทุก $t \in \mathbb{R}$

ให้ $\rho > 0$ และ $t \in \mathbb{R}$, $|t| \le \rho$ ดังนั้นสำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$,

$$|f(k,t)| = \left|\frac{t}{2^k}\right| \le \frac{\rho}{2^k} \text{ และ } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho}{2^k} = \rho\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \rho < \infty$$

เพราะฉะนั้น แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k(\rho)$ เมื่อ $(c_k(\rho)) = \left(\frac{\rho}{2^k}\right)_{k=1}^{\infty}$ โดยทฤษฎีบท 3.2.3 และทฤษฎีบท 3.2.11 จะได้ว่า $F: X \to \ell_1$ เมื่อ $X = c_0 , \ell_\infty$ เป็นฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชันที่มีขอบเขต ❑

3.3 ลักษณะของฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชันที่มีขอบเขตที่ส่งจากปริภูมิ F_r ไปยังปริภูมิ ℓ_1

ในส่วนแรกของหัวข้อนี้จะให้ทฤษฎีของตัวแทนของฟังก์ชันออร์โทโกนัลแอตดิทีฟที่ต่อเนื่องบนปริภูมิลำดับ F_r

ทฤษฎีบทนำ 3.3.1 ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F : F_r \to \ell_1$ ก็ต่อเมื่อ มี $\alpha,\beta > 0$ และ $(c_k)\in\ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k+\alpha k^r|t|$ เมื่อ $|t| \le \dfrac{\beta}{k^r}$

พิสูจน์ $(\Leftarrow)$ ให้ $x \in F_r$ โดยการกำหนดให้ จะมี $\alpha,\beta > 0$ และ $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$,

$$|f(k,t)| \le c_k+\alpha k^r|t| \quad \text{เมื่อ } |t| \le \frac{\beta}{k^r} \qquad (*)$$

เนื่องจาก $x \in F_r$ ดังนั้น $\sum_{k=1}^{\infty} k^r|x_k| < \infty$ เพราะฉะนั้น $k^r|x_k| \to 0$ เมื่อ $k \to \infty$ จะได้ว่า จะมี $j \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $k^r|x_k| \le \beta$ ทุก $k \ge j$ ดังนั้น $|x_k| \le \dfrac{\beta}{k^r}$ ทุก $k \ge j$ โดย $(*)$ จะได้ว่า

$$|f(k,x_k)| \le c_k+\alpha k^r|x_k| \quad \text{ทุก } k \ge j$$

ดังนั้น

$$\sum_{k=j+1}^{\infty}|f(k,x_k)| \le \sum_{k=j+1}^{\infty}c_k + \sum_{k=j+1}^{\infty}\alpha k^r|x_k| \le \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|+\alpha\sum_{k=1}^{\infty}k^r|x_k| = \|(c_k)\|_{\ell_1}+\alpha\|x\|_{F_r}$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{k=1}^{\infty}|f(k,x_k)| = \sum_{k=1}^{j}|f(k,x_k)|+\sum_{k=j+1}^{\infty}|f(k,x_k)| \le \sum_{k=1}^{j}|f(k,x_k)|+\|(c_k)\|_{\ell_1}+\alpha\|x\|_{F_r} < \infty$

ดังนั้น $F(x) = (f(k,x_k))_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$ นั่นคือ $F : F_r \to \ell_1$

$(\Rightarrow)$ ให้ $F : F_r \to \ell_1$ และ สำหรับ $\alpha,\beta > 0$ และแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ กำหนดให้

$A(k,\alpha,\beta) = \{t : |t| \le \min\{\dfrac{\beta}{k^r},\dfrac{|f(k,t)|}{\alpha k^r}\}\}$ และ $B(k,\alpha,\beta) = \sup\{|f(k,t)| : t \in A(k,\alpha,\beta)\}$

ถ้า $|t|\le\dfrac{\beta}{k^r}$ และ $t\in A(k,\alpha,\beta)$ แล้ว $|f(k,t)| \le B(k,\alpha,\beta)$ และ ถ้า $|t| \le \dfrac{\beta}{k^r}$ และ $t\notin A(k,\alpha,\beta)$ แล้ว $\dfrac{|f(k,t)|}{\alpha k^r} \le |t|$ หรือ $|f(k,t)| \le \alpha k^r|t|$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$|f(k,t)| \le B(k,\alpha,\beta)+\alpha k^r|t| \quad \text{เมื่อ } |t| \le \frac{\beta}{k^r}$$

ต่อไปจะแสดงว่า มี $\alpha_1,\beta_1 > 0$ ที่ทำให้ $(B(k,\alpha_1,\beta_1))_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$ นั่นคือจะแสดงว่า มี $\alpha_1,\beta_1 > 0$ ที่ทำให้ $\sum_{k=1}^{\infty}|B(k,\alpha_1,\beta_1)| < \infty$ สมมุติให้ $\sum_{k=1}^{\infty}|B(k,\alpha_1,\beta_1)| = \infty$ ทุก $\alpha_1,\beta_1 > 0$ ดังนั้นสำหรับแต่ละ $j \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $\sum_{k=1}^{\infty}\left|B(k,2^j,\dfrac{1}{2^j})\right| = \infty$ แต่ $B(k,2^j,\dfrac{1}{2^j}) \ge 0$ ทุก $j \in \mathbb{N}$ เพราะฉะนั้น

$$\sum_{k=1}^{\infty} B(k,2^j,\frac{1}{2^j}) = \sum_{k=1}^{\infty}\left|B(k,2^j,\frac{1}{2^j})\right| = \infty$$

และจะได้ว่า จะมีลำดับของจำนวนเต็ม $n_0 = 0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_j < \ldots$ โดยที่ n_j เป็นจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} B(k,2^j,\frac{1}{2^j}) > 1$ และจะได้ว่า สำหรับแต่ละ $j \in \mathbb{N}$ จะมี $\varepsilon_j > 0$ ที่ทำให้

$$\left(\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} B(k,2^j,\frac{1}{2^j})\right) - (n_j - n_{j-1})\varepsilon_j > 1$$

และสำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ จะมี $j \in \mathbb{N}$ ที่ $n_{j-1}+1 \le k \le n_j$ เนื่องจาก $B(k,\alpha,\beta) = \sup\{|f(k,t)| : t \in A(k,2^j,\frac{1}{2^j})\}$ จะได้ว่าจะมี $x_k \in A(k,2^j,\frac{1}{2^j})$ ที่ทำให้ $|f(k,x_k)| \ge B(k,2^j,\frac{1}{2^j}) - \varepsilon_j$ ดังนั้น

$$\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}|f(k,x_k)| \ge \left(\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} B(k,2^j,\frac{1}{2^j})\right) - \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}\varepsilon_j = \left(\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} B(k,2^j,\frac{1}{2^j})\right) - (n_j - n_{j-1})\varepsilon_j > 1$$

แสดงว่า

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(k,x_k)| = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}|f(k,x_k)| > \sum_{j=1}^{\infty}1 = \infty \qquad (*)$$

พิจารณาสำหรับแต่ละ $j,k \in \mathbb{N}$ ที่ $n_{j-1}+1 \le k \le n_j$ และ $x_k \in A(k,2^j,\frac{1}{2^j})$ โดยนิยามของ $A(k,2^j,\frac{1}{2^j})$ จะได้ว่า $|x_k| \le \min\{\frac{1}{2^j k^r}, \frac{|f(k,x_k)|}{2^j k^r}\}$ ดังนั้น $|x_k| \le \frac{1}{2^j k^r}$ และ $|x_k| \le \frac{|f(k,x_k)|}{2^j k^r}$ และเนื่องจาก n_j เป็นจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} B(k,2^j,\frac{1}{2^j}) > 1$ ดังนั้น $\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j-1} B(k,2^j,\frac{1}{2^j}) \le 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} k^r|x_k| &= \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j-1} k^r|x_k| + n_j^r|x_{n_j}| \le \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j-1} k^r\left(\frac{|f(k,x_k)|}{2^j k^r}\right) + n_j^r\left(\frac{1}{2^j n_j^r}\right)\\ &= \frac{1}{2^j}\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j-1}|f(k,x_k)| + \frac{1}{2^j} \le \frac{1}{2^j}\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j-1} B(k,2^j,\frac{1}{2^j}) + \frac{1}{2^j} \le \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^j} = \frac{2}{2^j}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{k=1}^{\infty} k^r|x_k| = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} k^r|x_k| \le \sum_{j=1}^{\infty}\frac{2}{2^j} = 2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j} = 2$ นั่นคือ $(x_k) \in F_r$ แต่จาก (*) จะได้ว่า $F((x_k)) = (f(k,x_k))_{k=1}^{\infty} \notin \ell_1$ ซึ่งขัดแย้งกับ $F : F_r \to \ell_1$ ดังนั้นที่สมมุติให้ไม่จริง จะได้ว่า ทุก ๆ $\alpha,\beta>0$, $(B(k,\alpha,\beta))_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$ นั่นคือ จะมี $\alpha,\beta>0$ และ $(c_k)=(B(k,\alpha,\beta))_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k + \alpha k^r|t|$ เมื่อ $|t| \le \frac{\beta}{k^r}$ ❑

ทฤษฎีบท 3.3.2 $G : F_r \to \mathbb{R}$ เป็นออร์โทโกนัลแอตดิทีฟและต่อเนื่องบน F_r ก็ต่อเมื่อ มี f ที่สอดคล้องเงื่อนไข A(1) และ A(2) ที่ทำให้

1. $G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k, x_k)$

2. มี $\alpha,\beta>0$ และ $(c_k)\in\ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k\in\mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k+\alpha k^r|t|$ เมื่อ $|t| \le \frac{\beta}{k^r}$

พิสูจน์ โดยนิยาม 2.4.1 จะได้ว่า F_r เป็นโซลิด และโดยทฤษฎีบท 2.3.5 และทฤษฎีบท 2.3.7 จะได้ว่า F_r เป็นปริภูมิ BK ที่มีคุณสมบัติ AK และเนื่องจาก $\left\| |x| \right\|_{F_r} = \|x\|_{F_r}$ ทุก $x \in F_r$ โดยทฤษฎีบทนำ 2.4.7 จะได้ว่า ทุก ๆ ลำดับ $(x^{(n)})$ ใน F_r ที่ลู่เข้า จะมีลำดับย่อยที่โดมิเนต และโดยทฤษฎีบทนำ 3.3.1 และทฤษฎีบท 2.4.6 จะได้ทฤษฎีบทนี้เป็นจริง ❑

จากทฤษฎีบท 3.3.2 ทำให้เราทราบถึงทฤษฎีของตัวแทนของฟังก์ชันออร์โทโกนัลแอตดิทีฟที่ต่อเนื่องบนปริภูมิลำดับ F_r โดยอาศัยฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชันที่ได้จากทฤษฎีบทนำ 3.3.1 ดังนั้น ต่อไปจะให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะทำให้ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต

นิยาม 3.3.3 จะกล่าวว่า $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***สอดคล้องเงื่อนไข T(3)*** ถ้ามี $\alpha,\beta > 0$ และ $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k+\alpha k^r|t|$ เมื่อ $|t| \le \frac{\beta}{k^r}$

ทฤษฎีบท 3.3.4 ให้ $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สอดคล้องเงื่อนไข A(1) และ T(3) จะได้ว่าฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: F_r\to\ell_1$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ ทุก ๆ $z\in F_r$ ก็ต่อเมื่อ $f(k,\cdot)$ สอดคล้องเงื่อนไข $A(2')$

พิสูจน์ $(\Leftarrow)$ ให้ $z = (z_k) \in F_r$ จะแสดงว่า $F: F_r \to \ell_1$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ ที่ z นั่นคือ จะหา $\eta,\gamma > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $x \in F_r$ ซึ่ง $\|x-z\|_{F_r} \le \eta$ แล้ว $\|F(x)-F(z)\|_{\ell_1} \le \gamma$ เนื่องจาก f สอดคล้องเงื่อนไข T(3) ดังนั้น จะมี $\alpha,\beta > 0$ และ $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$,

$$|f(k,t)| \le c_k+\alpha k^r|t| \text{ เมื่อ } |t| \le \frac{\beta}{k^r} \qquad (*)$$

ให้ $\eta = \frac{\beta}{2}$ และ $x \in F_r$ ซึ่ง $\|x-z\|_{F_r} \le \eta$ เนื่องจาก $z \in F_r$ ดังนั้น $\sum_{k=1}^{\infty} k^r|z_k| < \infty$ จะได้ว่า $k^r|z_k| \to 0$ เมื่อ $k \to \infty$ ดังนั้นจะได้ว่า จะมี $m \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$\|z\chi_{\{m,m+1,\dots\}}\|_{F_r} = \sum_{k=m}^{\infty} k^r|z_k| \le \eta$$

เนื่องจาก $\|x-z\|_{F_r} \le \eta$ ดังนั้น $\sum_{k=1}^{\infty} k^r|x_k - z_k| \le \eta$ เนื่องจาก

$$\sum_{k=m}^{\infty} k^r|x_k| = \sum_{k=m}^{\infty} k^r|(x_k - z_k)+z_k| \le \sum_{k=m}^{\infty} k^r|x_k - z_k| + \sum_{k=m}^{\infty} k^r|z_k| \le \eta+\eta = 2\eta = 2\left(\frac{\beta}{2}\right) = \beta$$

จะได้ว่า $k^r|x_k| \le \beta$ หรือ $|x_k| \le \frac{\beta}{k^r}$ ทุก $k \ge m$ โดย (*) จะได้ว่า $|f(k,x_k)| \le c_k + \alpha k^r|x_k|$ ทุก $k \ge m$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+1}^{\infty}|f(k,x_k)| &\le \sum_{k=m+1}^{\infty}\left(c_k + \alpha k^r|x_k|\right) = \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k + \alpha \sum_{k=m+1}^{\infty} k^r|x_k| \le \sum_{k=1}^{\infty}|c_k| + \alpha \sum_{k=m+1}^{\infty} k^r|x_k| \\ &\le \|(c_k)\|_{\ell_1} + \alpha\beta\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}|f(k,x_k)| \le \|(c_k)\|_{\ell_1} + \alpha\beta \qquad (**)$$

เนื่องจาก $f(k,\cdot)$ สอดคล้องเงื่อนไข $A(2')$ ดังนั้น $\sup_{|t-z_k| \le \eta}|f(k,t)| < \infty$ สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ กำหนดให้ $m_k = \sup_{|t-z_k| \le \eta}|f(k,t)|$ เพราะว่า $\sum_{k=1}^{\infty} k^r|x_k - z_k| \le \eta$ จะได้ว่า $|x_k - z_k| \le \frac{\eta}{k^r} \le \eta$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ ดังนั้น

$$|f(k,x_k)| \le m_k \text{ ทุก } k \in \mathbb{N} \qquad (***)$$

เนื่องจาก $F(x) = (f(k,x_k))_{k=1}^{\infty}$ และจาก (**) และ (***) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\|F(x)\|_{\ell_1} &= \sum_{k=1}^{\infty}|f(k,x_k)| = \sum_{k=1}^{m}|f(k,x_k)| + \sum_{k=m+1}^{\infty}|f(k,x_k)| \le \sum_{k=1}^{m} m_k + \|(c_k)\|_{\ell_1} + \alpha\beta \\ &= M + \|(c_k)\|_{\ell_1} + \alpha\beta\end{aligned}$$

โดยที่ $M = \sum_{k=1}^{m} m_k$ นั่นคือ

$$\|F(x)-F(z)\|_{\ell_1} \le \|F(x)\|_{\ell_1} + \|F(z)\|_{\ell_1} \le M + \|(c_k)\|_{\ell_1} + \alpha\beta + \|F(z)\|_{\ell_1}$$

เนื่องจาก $\|F(z)\|_{\ell_1} < \infty$ ดังนั้น $\|F(x)-F(z)\|_{\ell_1} \le \gamma$ เมื่อ $\gamma = M + \|(c_k)\|_{\ell_1} + \alpha\beta + \|F(z)\|_{\ell_1}$

($\Rightarrow$) จะแสดงว่า f สอดคล้องเงื่อนไข $A(2')$ โดยการแสดงว่า แต่ละ $k \in \mathbb{N}$ และ $b \in \mathbb{R}$, $f(k,\cdot)$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ ที่ b ให้ $k \in \mathbb{N}$ และ $b \in \mathbb{R}$ และ $y=(y_n)$ โดยที่ $y_n = \begin{cases} b & \text{เมื่อ } n = k \\ 0 & \text{เมื่อ } n \ne k \end{cases}$

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} n^r|y_n| = k^r|b| < \infty$ ดังนั้น $y \in F_r$ โดยสมมุติฐานจะได้ว่า F เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ ที่ y ดังนั้น จะมี $\alpha,\beta > 0$ ที่ทำให้

$$\text{ถ้า } x \in F_r \text{ ซึ่ง } \|x-y\|_{F_r} \le \alpha \text{ แล้ว } \|F(x)-F(y)\|_{\ell_1} \le \beta \qquad (*)$$

ให้ $a \in \mathbb{R}$ ที่ $|a-b| \leq \eta$ เมื่อ $\eta = \dfrac{\alpha}{k^r}$ และ $x = (x_n)$ โดยที่ $x_n = \begin{cases} a \text{ เมื่อ } n = k \\ 0 \text{ เมื่อ } n \neq k \end{cases}$ เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} n^r|x_n| = k^r|a| < \infty$ ดังนั้น $x \in F_r$ เพราะฉะนั้น

$$\|x-y\|_{F_r} = \sum_{n=1}^{\infty} n^r|x_n - y_n| = k^r|a-b| \leq k^r\eta = k^r\left(\frac{\alpha}{k^r}\right) = \alpha$$

โดย (*) จะได้ว่า $\|F(x)-F(y)\|_{\ell_1} \leq \beta$ และเนื่องจาก f สอดคล้องเงื่อนไข A(1) จะได้ว่า $f(n,0)=0$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ นั่นคือ $|f(k,a)-f(k,b)| = \sum_{n=1}^{\infty}|f(n,x_n)-f(n,y_n)| \leq \beta$ เพราะฉะนั้น แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $f(k,\cdot)$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ ทุก ๆ $b \in \mathbb{R}$ และโดยทฤษฎีบทนำ 3.1.4 จะได้ว่าแต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $f(k,\cdot)$ สอดคล้องเงื่อนไข $A(2')$ ❑

บทแทรก 3.3.5 ให้ $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ สอดคล้องเงื่อนไข A(1) และ A(2) จะได้ว่า ถ้าฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: F_r \rightarrow \ell_1$ แล้ว F เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ ทุก ๆ $z \in F_r$

พิสูจน์ เนื่องจาก ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: F_r \rightarrow \ell_1$ โดยทฤษฎีบทนำ 3.3.1 จะได้ว่า f สอดคล้องเงื่อนไข T(3) และเนื่องจาก f สอดคล้องเงื่อนไข A(2) ดังนั้น โดยข้อสังเกต 3.1.2 จะได้ว่า แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $f(k,\cdot)$ สอดคล้องเงื่อนไข $A(2')$ และโดยทฤษฎีบท 3.3.4 จะได้ทฤษฎีบทนี้เป็นจริง ❑

บทแทรก 3.3.6 ให้ $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ สอดคล้องเงื่อนไข A(1) จะได้ว่า ถ้าฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F:F_r\rightarrow\ell_1$ มีขอบเขต แล้ว $f(k,\cdot)$ สอดคล้องเงื่อนไข $A(2')$

พิสูจน์ เนื่องจาก $F: F_r \rightarrow \ell_1$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทนำ 3.3.1 จะได้ว่า $f(k,\cdot)$ สอดคล้องเงื่อนไข T(3) และโดยทฤษฎีบท 3.1.8 และทฤษฎีบท 3.3.4 จะได้ทฤษฎีบทนี้เป็นจริง ❑

ต่อไปจะหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะทำให้ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: F_r \rightarrow \ell_1$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต

ทฤษฎีบทนำ 3.3.7 ให้ $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สอดคล้องเงื่อนไข $A(1)$, $A(2')$, $r > 0$ และทุก ๆ $\beta > 0$ จะมี $\alpha(\beta) > 0$ ซึ่งทุก ๆ $x = (x_k) \in \phi$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(k,x_k)| \le \alpha(\beta) \text{ เมื่อ } \sum_{k=1}^{\infty}k^r|x_k| \le \beta$$

แล้วจะได้ว่าจะมี $c(\beta) = (c_k(\beta)) \in \ell_1$ ที่ $c_k(\beta) \ge 0$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ และ $\|c(\beta)\|_{\ell_1} \le \alpha(\beta)$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$,

$$|f(k,t)| \le c_k(\beta)+\frac{2\alpha(\beta)}{\beta}k^r|t| \text{ เมื่อ } |t| \le \frac{\beta}{k^r}$$

พิสูจน์ ให้ $\beta > 0$ โดยสมมุติฐาน จะมี $\alpha(\beta) > 0$ ซึ่ง $x = (x_k) \in \phi$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(k,x_k)| \le \alpha(\beta) \text{ เมื่อ } \sum_{k=1}^{\infty}k^r|x_k| \le \beta \qquad (*)$$

สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ กำหนดให้

$$h_\beta(k,t) = \max\{0,|f(k,t)|-\frac{2\alpha(\beta)}{\beta}k^r|t|\} \text{ และ } c_k(\beta) = \sup\{ h_\beta(k,t) : |t| \le \frac{\beta}{k^r} \}$$

ให้ $k \in \mathbb{N}$ และ $t \in \mathbb{R}$ ที่ $|t| \le \frac{\beta}{k^r}$

กรณีที่ 1 $h_\beta(k,t) = 0$ จะเห็นได้ชัดว่า

$$|f(k,t)| \le \frac{2\alpha(\beta)}{\beta}k^r|t| = c_k(\beta)+\frac{2\alpha(\beta)}{\beta}k^r|t|$$

กรณีที่ 2 $h_\beta(k,t) \ne 0$ จะได้ว่า $h_\beta(k,t) = |f(k,t)|-\frac{\alpha(\beta)}{\beta}k^r|t|$ ดังนั้น

$$|f(k,t)| = h_\beta(k,t)+\frac{2\alpha(\beta)}{\beta}k^r|t| \le c_k(\beta)+\frac{2\alpha(\beta)}{\beta}k^r|t|$$

เพราะฉะนั้น แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k(\beta)+\frac{2\alpha(\beta)}{\beta}k^r|t|$ เมื่อ $|t| \le \frac{\beta}{k^r}$

ต่อไปจะแสดงว่า $(c_k(\beta)) \in \ell_1$ โดยที่ $\|c(\beta)\|_{\ell_1} \le \alpha(\beta)$ เนื่องจาก f สอดคล้องเงื่อนไข $A(2')$ ดังนั้น $h_\beta(k,t)$ มีขอบเขตบนสับเซตที่มีขอบเขตของ $\mathbb{R}$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ และจากนิยามของ $c_k(\beta)$ จะได้ว่า ทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $y = (y_k)$ โดยที่ $|y_k| \le \frac{\beta}{k^r}$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$,

$$c_k(\beta) \le h_\beta(k,y_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}$$

ให้ y' เป็นลำดับที่ $y'_k = \begin{cases} y_k \text{ , } h_\beta(k,y_k) \neq 0 \\ 0 \text{ , } h_\beta(k,y_k) = 0 \end{cases}$ และให้ $m \in \mathbb{N}$ พิจารณา $\sum_{k=1}^{m} k^r|y'_k|$ จะได้ว่า

จะมีลำดับจำกัด (m_i) โดยที่ $m_1 = 1 < m_2 < \ldots < m_\ell = m$ บาง $\ell \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$\sum_{k=1}^{m} k^r|y'_k| = \sum_{k=1}^{m_2-1} k^r|y'_k| + \sum_{k=m_2}^{m_3-1} k^r|y'_k| + \ldots + \sum_{k=m_{\ell-1}}^{m} k^r|y'_k| \qquad (**)$$

ที่ซึ่ง $\frac{\beta}{2} \leq \sum_{k=m_i}^{m_{i+1}-1} k^r|y'_k| \leq \beta$ สำหรับ $i = 1,2,\ldots,\ell-2$ และ $0 \leq \sum_{k=m_{\ell-1}}^{m} k^r|y'_k| \leq \beta$

ให้ $z^{(i)} = y'\chi_{\{m_i,m_i+1,\ldots,m_{i+1}-1\}}$ สำหรับ $i = 1,2,\ldots,\ell-2$ และ $z^{(\ell-1)} = y'\chi_{\{m_{\ell-1},m_{\ell-1}+1,\ldots,m_\ell=m\}}$

พิจารณา สำหรับ $i = 1,2,\ldots,\ell-1$ จะได้ว่า $z^{(i)} \in \phi$ และจาก (**) จะได้ว่า $\sum_{k=1}^{\infty} k^r|z_k^{(i)}| \leq \beta$

โดย (*) จะได้ว่า $\sum_{k=1}^{\infty}|f(k,z_k^{(i)})| \leq \alpha(\beta)$ แต่ f สอดคล้องเงื่อนไข A(1) ดังนั้น สำหรับ $i = 1,2,\ldots,\ell-2$

$$\sum_{k=m_i}^{m_{i+1}-1}|f(k,z_k^{(i)})| \leq \alpha(\beta) \text{ และ } \sum_{k=m_{\ell-1}}^{m}|f(k,z_k^{(\ell-1)})| \leq \alpha(\beta) \qquad (***)$$

และจะได้ว่า

$$h_\beta(k,z_k^{(i)}) = |f(k,z_k^{(i)})| - \frac{2\alpha(\beta)}{\beta}k^r|z_k^{(i)}| \qquad (****)$$

ทุก $i = 1,2,\ldots,\ell-1$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} c_k(\beta) &\leq \sum_{k=1}^{m}\left(h_\beta(k,y_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m_2-1} h_\beta(k,y_k) + \sum_{k=m_2}^{m_3-1} h_\beta(k,y_k) + \ldots + \sum_{k=m_{\ell-1}}^{m} h_\beta(k,y_k) + \sum_{k=1}^{m}\frac{\varepsilon}{2^k} \\
&= \sum_{k=1}^{m_2-1} h_\beta(k,y'_k) + \sum_{k=m_2}^{m_3-1} h_\beta(k,y'_k) + \ldots + \sum_{k=m_{\ell-1}}^{m} h_\beta(k,y'_k) + \sum_{k=1}^{m}\frac{\varepsilon}{2^k} \\
&= \sum_{k=1}^{m_2-1} h_\beta(k,z_k^{(1)}) + \sum_{k=m_2}^{m_3-1} h_\beta(k,z_k^{(2)}) + \ldots + \sum_{k=m_{\ell-1}}^{m} h_\beta(k,z_k^{(\ell-1)}) + \sum_{k=1}^{m}\frac{\varepsilon}{2^k} \\
&= \sum_{k=1}^{m_2-1}\left(|f(k,z_k^{(1)})| - \frac{2\alpha(\beta)}{\beta}k^r|z_k^{(1)}|\right) + \sum_{k=m_2}^{m_3-1}\left(|f(k,z_k^{(2)})| - \frac{2\alpha(\beta)}{\beta}k^r|z_k^{(2)}|\right) \\
&\quad + \ldots + \sum_{k=m_{\ell-1}}^{m}\left(|f(k,z_k^{(\ell-1)})| - \frac{2\alpha(\beta)}{\beta}k^r|z_k^{(\ell-1)}|\right) + \sum_{k=1}^{m}\frac{\varepsilon}{2^k} \\
&\qquad \text{(โดย(****))} \\
&\leq (\ell-1)\alpha(\beta) - \frac{2\alpha(\beta)}{\beta}\sum_{k=1}^{m}k^r|y'_k| + \sum_{k=1}^{m}\frac{\varepsilon}{2^k} \qquad \text{(โดย (***))}
\end{aligned}$$

$$= (\ell-1)\alpha(\beta) - \frac{2\alpha(\beta)}{\beta}\left[\sum_{k=1}^{m_2-1} k^r|y_k'| + \sum_{k=m_2}^{m_3-1} k^r|y_k'| + \ldots + \sum_{k=m_{\ell-1}}^{m} k^r|y_k'|\right] + \sum_{k=1}^{m}\frac{\varepsilon}{2^k}$$

$$\leq (\ell-1)\alpha(\beta) - \frac{2\alpha(\beta)}{\beta}\left[(\ell-2)\frac{\beta}{2}+0\right] + \sum_{k=1}^{m}\frac{\varepsilon}{2^k} \quad (\text{โดย } (**))$$

$$= (\ell-1)\alpha(\beta) - (\ell-2)\alpha(\beta) + \sum_{k=1}^{m}\frac{\varepsilon}{2^k}$$

$$= \alpha(\beta) + \varepsilon\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}$$

เพราะฉะนั้น

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(\beta) = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m} c_k(\beta) \leq \lim_{m\to\infty}\left[\alpha(\beta) + \varepsilon\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}\right] = \alpha(\beta) + \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

ดังนั้น $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(\beta) \leq \alpha(\beta)+\varepsilon$ แต่เนื่องจาก ε เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่มากกว่า 0 เพราะฉะนั้น $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(\beta) \leq \alpha(\beta)$ และเนื่องจาก $c_k(\beta) \geq 0$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ ดังนั้น

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k(\beta)| = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\beta) \leq \alpha(\beta)$$

แสดงว่า $(c_k(\beta)) \in \ell_1$ และ $\|(c_k(\beta))\|_{\ell_1} \leq \alpha(\beta)$

นั่นคือ สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$,

$$|f(k,t)| \leq c_k(\beta) + \frac{2\alpha(\beta)}{\beta}k^r|t| \text{ เมื่อ } |t| \leq \frac{\beta}{k^r}$$

โดยที่ $(c_k(\beta)) \in \ell_1$ ที่ $\|c_k(\beta)\|_{\ell_1} \leq \alpha(\beta)$ และ $c_k(\beta) \geq 0$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ ❑

ทฤษฎีบท 3.3.8 ให้ $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ สอดคล้องเงื่อนไข A(1) จะได้ว่า ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: F_r \to \ell_1$ มีขอบเขต ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $\rho > 0$ จะมี $c(\rho) = (c_k(\rho)) \in \ell_1$ และ $\alpha(\rho) > 0$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \leq c_k(\rho) + \alpha(\rho)k^r|t|$ เมื่อ $|t| \leq \frac{\rho}{k^r}$

พิสูจน์ ($\Leftarrow$) โดยสมมุติฐานและโดยทฤษฎีบทนำ 3.3.1 จะได้ว่า $F: F_r \to \ell_1$ ให้ $\rho > 0$ และ $x \in F_r$ ที่ $\|x\|_{F_r} \leq \rho$ จะแสดงว่า $\|F(x)\|_{\ell_1} \leq M$ สำหรับบาง $M > 0$ เนื่องจาก $\|x\|_{F_r} \leq \rho$ จะได้ว่า $\sum_{k=1}^{\infty} k^r|x_k| \leq \rho$ เพราะฉะนั้น $|x_k| \leq \frac{\rho}{k^r}$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ โดยสมมุติฐานจะได้ว่า จะมี $c(\rho) = (c_k(\rho)) \in \ell_1$ และ $\alpha(\rho) > 0$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$,

$$|f(k,x_k)| \leq c_k(\rho) + \alpha(\rho)k^r|x_k|$$

เนื่องจาก $F(x) = (f(k,x_k))_{k=1}^{\infty}$ ดังนั้น

$$\|F(x)\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{\infty}|f(k,x_k)| \le \sum_{k=1}^{\infty}c_k(\rho)+\alpha(\rho)\sum_{k=1}^{\infty}k^r|x_k| \le \sum_{k=1}^{\infty}|c_k(\rho)|+\alpha(\rho)\cdot\rho$$

นั่นคือ $\|F(x)\|_{\ell_1} \le M$ เมื่อ $M = \|c(\rho)\|_{\ell_1}+\alpha(\rho)\cdot\rho$

เพราะฉะนั้น $\sup\{\ \|F(x')\|_{\ell_1} : x' \in F_r , \|x'\|_{F_r} \le \rho\ \} < \infty$

$(\Rightarrow)$ ให้ $\rho > 0$ ดังนั้นสำหรับแต่ละ $x \in \phi$ ที่ $\|x\|_{F_r} \le \rho$ จะได้ว่า $\sum_{k=1}^{\infty}k^r|x_k| \le \rho$ และเนื่องจาก F มีขอบเขตจะได้ว่า $\sum_{k=1}^{\infty}|f(k,x_k)| = \|F(x)\|_{\ell_1} \le M(\rho) < \infty$ ทุก $x \in \phi$ ที่ $\|x\|_{F_r} \le \rho$ เมื่อ $M(\rho) = \sup\{\ \|F(x')\|_{\ell_1} : x' \in F_r , \|x'\|_{F_r} \le \rho\ \}$ โดยบทแทรก 3.3.6 จะได้ว่า $f(k,\cdot)$ สอดคล้องเงื่อนไข $A(2')$ และจากทฤษฎีบทนำ 3.3.7 จะได้ว่า จะมี $c(\rho) = (c_k(\rho)) \in \ell_1$ ที่ $c_k(\rho) \ge 0$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ และ $\|c(\rho)\|_{\ell_1} \le M(\rho)$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$,

$$|f(k,t)| \le c_k(\rho)+\frac{2M(\rho)}{\rho}k^r|t| \text{ เมื่อ } |t| \le \frac{\rho}{k^r}$$

ให้ $\alpha(\rho) = \dfrac{2M(\rho)}{\rho}$ นั่นคือ แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k(\rho)+\alpha(\rho)k^r|t|$ เมื่อ $|t| \le \dfrac{\rho}{k^r}$ ❑

ตัวอย่าง 3.3.9 ให้ $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(k,t) = \left(\frac{1}{2^k}+k^r|t|\right)k^r|t|$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ ทุก $t \in \mathbb{R}$ จะเห็นได้ชัดว่า $f(k,0) = 0$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $f(k,\cdot)$ สอดคล้องเงื่อนไข $A(1)$ ให้ $\rho > 0$ และ $t \in \mathbb{R}$, $|t| \le \dfrac{\rho}{k^r}$ ดังนั้นสำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$,

$$|f(k,t)| = \left(\frac{1}{2^k}+k^r|t|\right)k^r|t| \le \left(\frac{1}{2^k}+k^r|t|\right)\left(k^r\frac{\rho}{k^r}\right) = \left(\frac{1}{2^k}+k^r|t|\right)\rho = \frac{\rho}{2^k}+\rho k^r|t|$$

ให้ $\alpha(\rho) = \rho$ และ $(c_k(\rho)) = \left(\dfrac{\rho}{2^k}\right)_{k=1}^{\infty}$ จะได้ว่า $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k(\rho)| = \sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\rho}{2^k} = \rho\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^k} = \rho < \infty$

ดังนั้น $(c_k(\rho)) \in \ell_1$ และโดยทฤษฎีบท 3.3.8 จะได้ว่า $F: F_r \to \ell_1$ เป็นฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชันที่มีขอบเขต ❑

3.4 ลักษณะของฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชันที่มีขอบเขตที่ส่งจากปริภูมิ E_r ไปยังปริภูมิ ℓ_1

ในส่วนแรกของหัวข้อนี้จะให้ทฤษฎีของตัวแทนของฟังก์ชันออร์โทโกนัลแอตดิทีฟที่เป็นอันดับต่อเนื่องบนปริภูมิลำดับ E_r

ทฤษฎีบทนำ 3.4.1 ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: E_r \to \ell_1$ ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $\alpha > 0$ จะมี $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k$ เมื่อ $|t| \le k^r\alpha$

พิสูจน์ $(\Leftarrow)$ ให้ $(x_k) \in E_r$ ดังนั้น $|x_k| \le k^rA$ สำหรับบาง $A > 0$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ โดยสมมุติฐานจะมี $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,x_k)| \le c_k$ เพราะฉะนั้น

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(k,x_k)| \le \sum_{k=1}^{\infty}c_k \le \sum_{k=1}^{\infty}|c_k| < \infty$$

ดังนั้น $F((x_k)) = (f(k,x_k))_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$ นั่นคือ $F: E_r \to \ell_1$

$(\Rightarrow)$ ให้ $F: E_r \to \ell_1$ และสำหรับ $\alpha > 0$ และแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ กำหนดให้

$$A(\alpha) = \{ t \in \mathbb{R} : |t| \le k^r\alpha \} \text{ และ } B(k,\alpha) = \sup\{ |f(k,t)| : t \in A(\alpha) \}$$

จะได้ว่า $|f(k,t)| \le B(k,\alpha)$ เมื่อ $|t| \le k^r\alpha$ ต่อไปจะแสดงว่า $(B(k,\alpha))_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$ ทุก $\alpha > 0$ สมมุติให้ มี $\alpha_1 > 0$ ที่ทำให้ $\sum_{k=1}^{\infty}|B(k,\alpha_1)| = \infty$ แต่ $B(k,\alpha_1) \ge 0$ เพราะฉะนั้น

$$\sum_{k=1}^{\infty}B(k,\alpha_1) = \sum_{k=1}^{\infty}|B(k,\alpha_1)| = \infty$$

และจะได้ว่า จะมีลำดับของจำนวนเต็ม $n_0 = 0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_j < \ldots$ ที่ทำให้ $\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}B(k,\alpha_1) > 1$

และจะได้ว่า สำหรับแต่ละ $j \in \mathbb{N}$ จะมี $\varepsilon_j > 0$ ที่ทำให้

$$\left(\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}B(k,\alpha_1)\right)-(n_j-n_{j-1})\varepsilon_j > 1$$

และสำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ จะมี $j \in \mathbb{N}$ ที่ $n_{j-1}+1 \le k \le n_j$ เนื่องจาก $B(k,\alpha_1) = \sup\{ |f(k,t)| : t \in A(\alpha_1) \}$ ดังนั้นจะมี $x_k \in A(\alpha_1)$ ที่ทำให้ $|f(k,x_k)| \ge B(k,\alpha_1)-\varepsilon_j$ ดังนั้น

$$\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}|f(k,x_k)| \ge \left(\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}B(k,\alpha_1)\right)-\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}\varepsilon_j = \left(\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}B(k,\alpha_1)\right)-(n_j-n_{j-1})\varepsilon_j > 1$$

แสดงว่า

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(k,x_k)| = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}|f(k,x_k)| > \sum_{j=1}^{\infty}1 = \infty \qquad (*)$$

เนื่องจาก $|x_k| \le k^r\alpha_1$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $(x_k) \in E_r$ แต่จาก (*) จะได้ว่า

$$F((x_k)) = (f(k,x_k))_{k=1}^{\infty} \notin \ell_1$$

ซึ่งขัดแย้งกับ $F : E_r \to \ell_1$ ดังนั้นที่สมมุติให้ไม่จริง เพราะฉะนั้น ทุก ๆ $\alpha > 0$,$(B(k,\alpha))_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$ นั่นคือ ทุก ๆ $\alpha > 0$ จะมี $(c_k) = (B(k,\alpha))_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k$ เมื่อ $|t| \le k^r\alpha$ ❑

ทฤษฎีบท 3.4.2 $G : E_r \to \mathbb{R}$ เป็นออร์โทโกนัลแอตดิทีฟและอันดับต่อเนื่องบน E_r ก็ต่อเมื่อ มี $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ที่สอดคล้องเงื่อนไข A(1) และ A(2) ซึ่งทำให้

1. $G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k,x_k)$
2. ทุก ๆ $\alpha > 0$ จะมี $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k$ เมื่อ $|t| \le k^r\alpha$

พิสูจน์ เนื่องจาก E_r เป็นโซลิด และ $\phi \subseteq E_r$ โดยทฤษฎีบทนำ 2.4.5 และทฤษฎีบทนำ 3.4.1 จะได้ทฤษฎีบทนี้เป็นจริง ❑

จากทฤษฎีบทนำ 3.4.1 ทำให้เราทราบถึงเงื่อนไขที่จะทำให้ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: E_r \to \ell_1$ ซึ่งเงื่อนไขที่ได้นั้นทำให้ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: E_r \to \ell_1$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต และมีขอบเขตเฉพาะที่ด้วย ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.4.3 ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: E_r \to \ell_1$ มีขอบเขต ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $\rho > 0$ จะมี $c(\rho) = (c_k(\rho)) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k(\rho)$ เมื่อ $|t| \le k^r\rho$

พิสูจน์ ($\Leftarrow$) โดยสมมุติฐานและทฤษฎีบทนำ 3.4.1 จะได้ $F: E_r \to \ell_1$ ให้ $\rho > 0$ และ $x \in E_r$ ที่ $\|x\|_{E_r} \le \rho$ จะแสดงว่า $\|F(x)\|_{\ell_1} \le M$ บาง $M > 0$ เนื่องจาก $\|x\|_{E_r} \le \rho$ ดังนั้น $\sup_k \frac{|x_k|}{k^r} \le \rho$ จะได้ว่า $|x_k| \le k^r\rho$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ โดยสมมุติฐานจะได้ว่า จะมี $c(\rho) = (c_k(\rho)) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$,$|f(k,t)| \le c_k(\rho)$ เนื่องจาก $F(x) = (f(k,x_k))_{k=1}^{\infty}$ ดังนั้น

$$\|F(x)\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{\infty}|f(k,x_k)| \le \sum_{k=1}^{\infty}c_k(\rho) \le \sum_{k=1}^{\infty}|c_k(\rho)| = \|c(\rho)\|_{\ell_1}$$

นั่นคือ

$$\|F(x)\|_{\ell_1} \le M \text{ เมื่อ } M = \|c(\rho)\|_{\ell_1}$$

เพราะฉะนั้น $\sup\{\, \|F(x')\|_{\ell_1} : x' \in E_r , \|x'\|_{E_r} \le \rho \,\} < \infty$

($\Longrightarrow$) เนื่องจาก $F: E_r \to \ell_1$ โดยทฤษฎีบทนำ 3.4.1 จะได้ว่า ทุก ๆ $\rho > 0$ จะมี $c(\rho)=(c_k(\rho))\in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k(\rho)$ เมื่อ $|t| \le k^r\rho$ ❑

บทแทรก 3.4.4 ถ้าทุก ๆ $\rho > 0$ มี $c(\rho) = (c_k(\rho)) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k(\rho)$ เมื่อ $|t| \le k^r\rho$ แล้ว $F: E_r \to \ell_1$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ ทุก ๆ $z \in E_r$

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 3.4.3 และทฤษฎีบท 3.1.8 จะได้บทแทรกนี้เป็นจริง ❑

ตัวอย่าง 3.4.5 ให้ $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(k,t)=\dfrac{|t|}{2^k k^r}$ ทุก $k\in\mathbb{N}$ ทุก $t\in\mathbb{R}$ ให้ $\rho > 0$ และ $t \in \mathbb{R}$, $|t| \le k^r\rho$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ ดังนั้นสำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$,

$$|f(k,t)| = \frac{|t|}{2^k k^r} \le \frac{k^r\rho}{2^k k^r} = \frac{\rho}{2^k}$$

ให้ $(c_k(\rho)) = \left(\dfrac{\rho}{2^k}\right)_{k=1}^{\infty}$ จะได้ว่า $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\rho}{2^k} = \rho\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^k} = \rho < \infty$ ดังนั้น $(c_k(\rho)) \in \ell_1$ และโดยทฤษฎีบท 3.4.3 จะได้ว่า $F: E_r \to \ell_1$ เป็นฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชันที่มีขอบเขต ❑

3.5 ลักษณะของฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชันที่มีขอบเขตที่ส่งจากปริภูมิ W ไปยังปริภูมิ ℓ_1

จากทฤษฎีบท 2.4.13 ทำให้เราทราบถึงทฤษฎีของตัวแทนของฟังก์ชันออร์โทโกนัลแอดดิทีฟที่ต่อเนื่องบน W โดยอาศัยฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชันที่ได้จากทฤษฎีบทนำ 2.4.12 ต่อไปจะให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะทำให้ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: W \to \ell_1$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตและมีขอบเขตเฉพาะที่

ทฤษฎีบท 3.5.1 ให้ $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ สอดคล้องเงื่อนไข A(1) จะได้ว่า ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: W \to \ell_1$ มีขอบเขต ก็ต่อเมื่อ มี $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k$ ทุก $t \in \mathbb{R}$

พิสูจน์ ($\Longleftarrow$) โดยการสมมุติฐานและทฤษฎีบทนำ 2.4.12 จะได้ว่า $F: W \to \ell_1$ ให้ $x \in W$ จะแสดงว่า $\|F(x)\|_{\ell_1} \le M$ สำหรับบาง $M > 0$ โดยสมมุติฐานจะได้ว่า จะมี $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,x_k)| \le c_k$ เนื่องจาก $F(x) = (f(k,x_k))_{k=1}^{\infty}$ ดังนั้น

$$\|F(x)\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{\infty}|f(k,x_k)| \le \sum_{k=1}^{\infty}c_k \le \sum_{k=1}^{\infty}|c_k| = \|(c_k)\|_{\ell_1}$$

นั่นคือ

$$\|F(x)\|_{\ell_1} \le M \text{ เมื่อ } M = \|(c_k)\|_{\ell_1}$$

เพราะฉะนั้น $\sup\{\ \|F(x')\|_{\ell_1} : x' \in W\ \} < \infty$

($\Longrightarrow$) เนื่องจาก F มีขอบเขต ดังนั้น $\sup\{\ \|F(x')\|_{\ell_1} : x' \in W ,\ \|x'\|_W \le 1\ \} < \infty$ นั่นคือ

$$\text{มี } M > 0 \text{ ซึ่งถ้า } x \in W ,\ \|x\|_W \le 1 \text{ แล้ว } \|F(x)\|_{\ell_1} \le M \qquad (*)$$

ให้ $k \in \mathbb{N}$ และ $t \in \mathbb{R}$ เนื่องจาก $te^k \in W$ และ $\|te^k\|_W = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|te_n^k|}{2^n(1+|te_n^k|)} = \frac{|t|}{2^k(1+|t|)} \le 1$

ดังนั้นโดย (*) จะได้ว่า $\|F(te^k)\|_{\ell_1} \le M$ และเนื่องจาก f สอดคล้องเงื่อนไข A(1) ดังนั้น $\|F(te^k)\|_{\ell_1} = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n, te_n^k)| = |f(k,t)|$ เพราะฉะนั้น แต่ละ $k \in \mathbb{N}$,

$$|f(k,t)| \le M \ \text{ ทุก } t \in \mathbb{R} \qquad (**)$$

เนื่องจาก $F: W \to \ell_1$ โดยทฤษฎีบทนำ 2.4.12 จะได้ว่า จะมี $L>0$ และ $(c'_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \ge L$,

$$|f(k,t)| \le c'_k \ \text{ ทุก } t \in \mathbb{R} \qquad (***)$$

ให้ $c_k = \begin{cases} M & \text{เมื่อ } k \le L \\ c'_k & \text{เมื่อ } k > L+1 \end{cases}$ ดังนั้นโดย (**) และ (***) จะได้ว่า

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| = \sum_{k=1}^{L} |c_k| + \sum_{k=L+1}^{\infty} |c_k| = \sum_{k=1}^{L} |c_k| + \sum_{k=L+1}^{\infty} |c'_k| \le M\cdot L + \sum_{k=1}^{\infty} |c'_k| = M\cdot L + \|(c'_k)\|_{\ell_1} < \infty$$

เพราะฉะนั้น $(c_k) \in \ell_1$ นั่นคือ จะมี $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k$ ทุก $t \in \mathbb{R}$ ❑

บทแทรก 3.5.2 ให้ $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สอดคล้องเงื่อนไข A(1) จะได้ว่า ถ้ามี $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k$ ทุก $t \in \mathbb{R}$ แล้ว ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: W \to \ell_1$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตเฉพาะที่ทุก ๆ $z \in W$

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 3.1.8 และทฤษฎีบท 3.5.1 จะได้ทฤษฎีบทนี้เป็นจริง ❑