บทที่ 4
บทสรุป

จากการที่ได้ศึกษาปริภูมิลำดับ X เมื่อ X คือ ℓ_p , ℓ_∞ , c_0 , E_r , F_r และ W เพื่อที่จะหาทฤษฎีของตัวแทนของฟังก์ชันออร์โทโกนัลแอตดิทีฟที่ต่อเนื่องและที่เป็นอันดับต่อเนื่องบนปริภูมิดังกล่าวตลอดจนลักษณะของฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชันและฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชันที่มีขอบเขตที่ส่งจากปริภูมิดังกล่าวไปยังปริภูมิ ℓ_1 ได้ผลของการศึกษาดังนี้

1. ได้ลักษณะของฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชันที่ส่งจากปริภูมิลำดับ ℓ_∞ , E_r และ F_r ไปยังปริภูมิ ℓ_1 ดังนี้

1.1 ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: \ell_\infty \to \ell_1$ ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $\alpha > 0$ จะมี $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k$ เมื่อ $|t| \le \alpha$

1.2 ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: E_r \to \ell_1$ ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $\alpha > 0$ จะมี $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k$ เมื่อ $|t| \le k^r \alpha$

1.3 ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: F_r \to \ell_1$ ก็ต่อเมื่อ มี $\alpha, \beta > 0$ และ $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k + \alpha k^r |t|$ เมื่อ $|t| \le \dfrac{\beta}{k^r}$

2. ได้ทฤษฎีของตัวแทนของฟังก์ชันออร์โทโกนัลแอตดิทีฟที่ต่อเนื่องและที่เป็นอันดับต่อเนื่อง บนปริภูมิลำดับ ℓ_∞ , E_r และ F_r ดังนี้

ให้ $f: \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า f สอดคล้องเงื่อนไข A(1) ถ้า $f(k,0) = 0$ ทุก $k \in \mathbb{N}$ และ f สอดคล้องเงื่อนไข A(2) ถ้าสำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $f(k,\cdot)$ ต่อเนื่องบนจำนวนจริง

2.1 $G: \ell_\infty \to \mathbb{R}$ เป็นออร์โทโกนัลแอตดิทีฟและอันดับต่อเนื่องบน ℓ_∞ ก็ต่อเมื่อ มี $f: \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ที่สอดคล้องเงื่อนไข A(1) และ A(2) ที่ทำให้

1) $G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k, x_k)$

2) ทุก ๆ $\alpha > 0$ จะมี $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k$ เมื่อ $|t| \le \alpha$

2.2 $G: E_r \to \mathbb{R}$ เป็นออร์โทโกนัลแอตดิทีฟและอันดับต่อเนื่องบน E_r ก็ต่อเมื่อ มี $f: \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ที่สอดคล้องเงื่อนไข A(1) และ A(2) ที่ทำให้

1) $G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k, x_k)$

2) ทุก ๆ $\alpha > 0$ จะมี $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k$ เมื่อ $|t| \le k^r \alpha$

2.3 $G: F_r \to \mathbb{R}$ เป็นออร์โทโกนัลแอดดิทีฟและต่อเนื่องบน F_r ก็ต่อเมื่อ มี $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ที่สอดคล้องเงื่อนไข A(1) และ A(2) ที่ทำให้

1) $G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k, x_k)$

2) มี $\alpha,\beta > 0$ และ $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$,$|f(k,t)| \le c_k+\alpha k^r|t|$ เมื่อ $|t| \le \frac{\beta}{k^r}$

3. ได้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะทำให้ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชันที่ส่งจากปริภูมิ ℓ_p , ℓ_∞ , c_0 , E_r , F_r และ W ไปยังปริภูมิ ℓ_1 เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต ดังนี้

3.1 ให้ $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สอดคล้องเงื่อนไข A(1) จะได้ว่า ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: \ell_p \to \ell_1$ มีขอบเขต ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $\rho>0$ จะมี $c(\rho) = (c_k(\rho)) \in \ell_1$ และ $\alpha(\rho) > 0$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k(\rho)+\alpha(\rho)|t|^p$ เมื่อ $|t| \le \rho$

3.2 ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: \ell_\infty \to \ell_1$ มีขอบเขต ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $\rho>0$ จะมี $c(\rho)=(c_k(\rho))\in\ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k(\rho)$ เมื่อ $|t| \le \rho$

3.3 ให้ $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สอดคล้องเงื่อนไข A(1) จะได้ว่า ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: c_0 \to \ell_1$ มีขอบเขต ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $\rho > 0$ จะมี $c(\rho)=(c_k(\rho))\in\ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k(\rho)$ เมื่อ $|t| \le \rho$

3.4 ให้ $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สอดคล้องเงื่อนไข A(1) จะได้ว่า ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: F_r \to \ell_1$ มีขอบเขต ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $\rho > 0$ จะมี $c(\rho) = (c_k(\rho)) \in \ell_1$ และ $\alpha(\rho) > 0$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k(\rho)+\alpha(\rho)k^r|t|$ เมื่อ $|t| \le \frac{\rho}{k^r}$

3.5 ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: E_r \to \ell_1$ มีขอบเขต ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $\rho > 0$ จะมี $c(\rho)=(c_k(\rho))\in\ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k(\rho)$ เมื่อ $|t| \le k^r\rho$

3.6 ให้ $f: \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สอดคล้องเงื่อนไข A(1) จะได้ว่า ฟังก์ชันซูเปอร์โพซิชัน $F: W \to \ell_1$ มีขอบเขต ก็ต่อเมื่อ มี $(c_k) \in \ell_1$ ที่ทำให้แต่ละ $k \in \mathbb{N}$, $|f(k,t)| \le c_k$ ทุก $t \in \mathbb{R}$