## บทที่ 2
## ทฤษฎีพื้นฐานของพลาสมา

พลาสมา (plasma) เป็นคำที่มาจากภาษากรีก (Greek) ซึ่งหมายถึงเบ้าหลอมหรือแม่พิมพ์ (mold) หรือทอเป็นเนื้อขึ้นมา (fabricate) ในเชิงฟิสิกส์พลาสมาคือสภาวะหนึ่งของสสารนอกเหนือจากสถานะของ ของแข็ง ของเหลว และก๊าซ สถานะต่าง ๆ เหล่านี้ถูกนิยามด้วยขนาดของแรงยึดเหนี่ยวระหว่างโมเลกุล (binding force) หรืออะตอมของสสาร ค่าแรงยึดเหนี่ยวในของแข็งจะมีมากแต่เมื่อได้รับการกระตุ้นจากพลังงานภายนอกของแข็งก็สามารถเปลี่ยนสถานะเป็นของเหลวหรือก๊าซและขณะเดียวกันถ้าของเหลวถูกกระตุ้นจากพลังงานภายนอกก็สามารถเปลี่ยนสถานะเป็นก๊าซได้ และเมื่อก๊าซถูกกระตุ้นจากพลังงานภายนอกจนทำให้เกิดการแตกตัว (ionization) ก๊าซก็อาจจะเปลี่ยนสถานะเป็นพลาสมาได้

คุณลักษณะของพลาสมา คือการมีสถานะของก๊าซที่มีอนุภาคที่มีประจุเชิงสะเทิน (quasineutral gas of charge) ที่มีพฤติกรรมร่วมกัน (collective behavior) [Chen, 1984 ; Bittencount, 1995] เมื่อพิจารณาพลาสมาในระดับมหภาค (macro) เราจะเห็นว่ามีสนามไฟฟ้าระหว่างอนุภาคที่มีประจุและผลจากการที่ประจุเคลื่อนที่ก็ทำให้เกิดกระแสไฟฟ้า ซึ่งเหนี่ยวนำให้เกิดสนามแม่เหล็ก ดังนั้นการเคลื่อนที่ของพลาสมาไม่ได้ขึ้นอยู่กับการชนกันระหว่างอนุภาคหรือปฏิกิริยาระหว่างอนุภาคภายในพลาสมาแต่อย่างเดียว แต่ยังขึ้นอยู่กับผลของแรงที่เกิดจากสนามไฟฟ้าที่อยู่ไกลออกไปกับกลุ่มของพลาสมาอีกด้วย ซึ่งเป็นคุณลักษณะของการมีพฤติกรรมร่วม เราจึงมองได้ว่าพลาสมามีลักษณะคล้ายก้อนเจลลี่นุ่มที่สามารถเคลื่อนไหวเปลี่ยนรูปร่างได้แต่ยังรวมตัวกันอยู่เป็นกลุ่มก้อน

### 2.1 นิยามของพลาสมา

เนื่องจากพลาสมาเป็นอนุภาคเชิงสะเทินและมีพฤติกรรมร่วม การแตกตัวของอะตอมหรือโมเลกุลที่อยู่ในสถานะของก๊าซจนเกิดอนุภาคมีประจุหรือไอออนนั้น จึงไม่จำเป็นเสมอไปว่าก๊าซที่อยู่สภาวะแตกตัวดังกล่าวจะประพฤติตัวเป็นแบบพลาสมาถ้าขบวนการแตกตัวนั้นไม่ได้อยู่ในเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) ความยาวเดอบาย (Debye's length) มีค่าน้อยกว่าความยาวของระบบมาก ๆ

$$\lambda_D << L \tag{2.1}$$

โดยที่ $\lambda_D$ คือความยาวของเดอบาย

และ $L$ คือความกว้างของพลาสมา

(ii) จำนวนอนุภาคที่อยู่ในทรงกลมของเดอบาย (Debye's sphere) มีค่ามากกว่า 1 มาก ๆ

$$N_D >> 1 \tag{2.2}$$

โดยที่ $N_D$ คือจำนวนอนุภาคที่อยู่ในทรงกลมของเดอบาย

(iii) จำนวนความถี่ของการชนอิสระระหว่างอนุภาคกับอนุภาคในหนึ่งหน่วยเวลามีค่ามากกว่า 1 มาก ๆ

$$\omega_p \tau >> 1 \tag{2.3}$$

โดยที่ $\omega_p$ คือความถี่ของการสั่นของพลาสมา

และ $\tau$ คือเวลาเฉลี่ยระหว่างการชนกันของอะตอมหรืออนุภาคอิสระ

ความสัมพันธ์ดังสมการที่ (2.1) นี้เองที่ทำให้พลาสมามีการแสดงพฤติกรรมของการมีพฤติกรรมร่วม เรานิยมใช้อุณหภูมิของพลาสมาในหน่วยของ อิเล็กตรอนโวลต์ (eV) เมื่อให้ $K$ เป็นค่าคงที่โบร์ตมานน์ (Boltzmann's constant) และ $T$ คืออุณหภูมิองศาสมบูรณ์ (Kelvin's temperature) เราจะได้ว่า

$$KT = 1 \text{ eV} \tag{2.4}$$

เมื่อ

$$K = 1.38\times10^{-23} \text{ J/}^{\circ}\text{K} \tag{2.5}$$

และ

$$T = 11{,}600 \text{ }^{\circ}\text{K} \tag{2.6}$$

นั่นคืออุณหภูมิของพลาสมา 1 eV จะมีค่าตรงกับอุณหภูมิ 11,600 °K หรือประมาณ 11,327 °C

## 2.2 Debye shielding

ในสนามที่มีอิเล็กตรอนและไอออนเคลื่อนที่ไปมา มีอันตรกิริยาเกิดขึ้นกับตัวอนุภาคเอง และกับอนุภาคตัวอื่น ๆ ไปพร้อมกันด้วย ซึ่งเมื่อพิจารณาในเชิงมหภาคแล้ว ค่าสมการผลรวมของ

แรงที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนในสนามไอออน (ในพลาสมา) เราสามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ และค่าความดันสเกลาร์ (scalar pressure) ของอิเล็กตรอน $p_e$ โดยพิจารณาจากค่าเฉลี่ยของแรงเมื่อถือว่าโมเมนตัมมีค่าคงที่ได้ดังนี้ [Lieberman and Lichtenberg, 1994]

$$m_e n_e \frac{d\vec{u}_e}{dt} = -en_e\vec{E} - \nabla p_e - m_e n_e \nu_{m_e}\vec{u}_e \qquad (2.7)$$

เมื่อ $m_e$ คือมวลของอิเล็กตรอน

$n_e$ คือความหนาแน่นของอิเล็กตรอน

$\vec{u}_e$ คือความเร็วเฉลี่ยของอิเล็กตรอน

$\nu_{m_e}$ คือค่าความถี่ของการถ่ายเทโมเมนตัมขณะที่อนุภาคชนกัน

จากกฎการแจกแจงแบบแม็กซ์เวลล์เลียน (Maxwellian's distribution) เราจะได้ความสัมพันธ์ของความดันสเกลาร์กับความหนาแน่นของอิเล็กตรอน (electron density, $n_e$) ในกระจายแบบไอโซเทอร์มัล (isothermal)

$$p_e = n_e K T_e \qquad (2.8)$$

และจะได้

$$\nabla p_e = K T_e \nabla n_e \qquad (2.9)$$

$T_e$ คืออุณหภูมิของอิเล็กตรอน เมื่อพิจารณาที่เวลาเริ่มต้น $t$=0 เราถือว่าอิเล็กตรอนมีความเร็วเฉลี่ย $\vec{u}_e$=0 และ $d\vec{u}_e/dt = 0$ สมการที่ (2.7) เขียนได้เป็น

$$0 = -en_e\vec{E} - KT_e\nabla n_e \qquad (2.10)$$

จากสมการของแม็กซ์เวลล์ (Maxwell's equation)

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad (2.11)$$

ในสนามพลาสมาค่าของการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กมีค่าน้อยมากจนสามารถประมาณได้ว่า $\partial\vec{H}/\partial t \cong 0$ สมการที่ (2.11) จึงเขียนได้เป็น

$$\nabla \times \vec{E} \approx 0 \qquad (2.12)$$

เนื่องจาก $\nabla(\nabla \times \vec{E}) = 0$ ดังนั้น

$$\vec{E} = -\nabla\phi \tag{2.13}$$

โดยที่ $\phi$ คือศักย์ไฟฟ้า

สมการที่ (2.10) เขียนได้เป็น

$$0 = en_e\nabla\phi - KT_e\nabla n_e \tag{2.14}$$

หรือเขียนได้เป็น

$$0 = \nabla\phi - \frac{KT_e}{e}\frac{\nabla n_e}{n_e} \tag{2.15}$$

เปลี่ยนรูปสมการ (2.15) เป็น

$$0 = \nabla\left(\phi - \frac{KT_e}{e}\ln n_e\right) \qquad (2.16$$

เมื่ออินทิเกรตสมการที่ (2.16) จะได้

$$C = \phi - \frac{KT_e}{e}\ln n_e \tag{2.17}$$

เมื่อ C เป็นค่าคงที่ใด ๆ สมการที่ (2.17) สามารถเขียนได้ใหม่ดังนี้

$$n_e(r) = n_0 \exp\left(\frac{e\phi(r)}{KT_e}\right) \tag{2.18}$$

สมการที่ (2.18) เป็นที่รู้จักกันดีในนามของ Boltzmann's relation จากสมการของแม็กซ์เวลล์

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.19}$$

โดยที่ $\varepsilon_0$ คือค่า permittivity ของสนามไฟฟ้าในสูญญากาศมีค่า $8.854 \times 10^{-12}$ F/m และจากสมการที่ (2.13) สามารถเขียนสมการที่ (2.19) ได้เป็น

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.20}$$

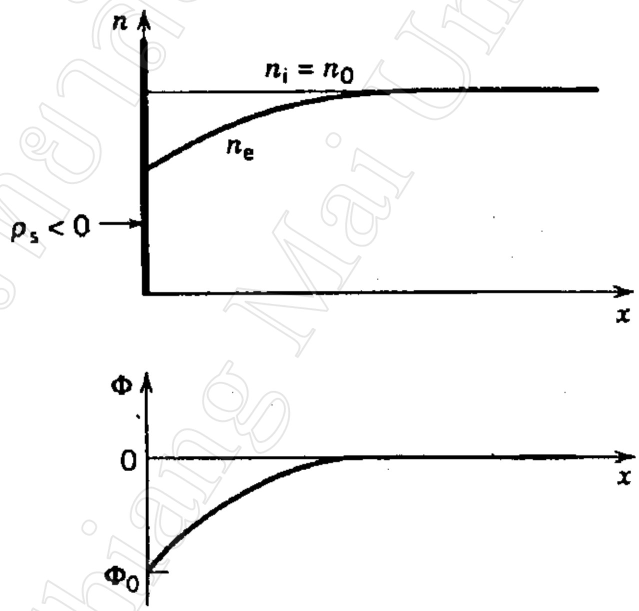
สมการที่ (2.20) ก็คือสมการของพัวว์ซอง (Poisson's equation) ค่าความหนาแน่นของประจุต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ทรงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย (4π) ของอิเล็กตรอน $\rho_e$ และไอออนบวก (Z=1) $\rho_i$ คือ

$$\rho_e = en_e \tag{2.21}$$

และ

$$\rho_i = en_i \tag{2.22}$$

เมื่อพิจารณาถึงการกระจายของอิเล็กตรอน อนุภาคมีประจุ และอะตอมในพลาสมา เราจะพบว่าการกระจายประชากรของอิเล็กตรอนมีลักษณะที่ดิ่งหรือชันมาก เมื่อเข้าใกล้กับขอบของผิวอิเล็กโทรดซึ่งจะทำให้ค่าความหนาแน่นของประจุที่ขอบผิว (surface charge density, $\rho_s$) มีค่าน้อยกว่าศูนย์ $\rho_s$<0 และความหนาแน่นของอิเล็กตรอนจะมีค่าเพิ่มขึ้นจนถึงจุด ๆ หนึ่งที่การกระจายของอิเล็กตรอนจะมีค่าสมดุลย์กับการกระจายของอนุภาคมีประจุที่ระยะอนันต์ $n_e$=$n_i$=$n_0$ ในช่วงที่ความหนาแน่นของอิเล็กตรอนมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วนี้เราเรียกว่าชีท (sheath) ดังแสดงในรูปที่ 2.1




**รูปที่ 2.1** แสดงการกระจายของจำนวนอิเล็กตรอนและไอออนในพลาสมา และแสดงค่าการเปลี่ยนแปลงของศักย์ไฟฟ้าในชีทพลาสมา [Lieberman and Lichtenberg, 1994]

จากรูปที่ 2.1 เมื่อเราพิจารณาถึงสมการที่ (2.20) และค่าความหนาแน่นจากสมการที่ (2.21-22) เราสามารถเขียนสมการที่ (2.20) ได้เป็น

$$\nabla^2 \phi = -\frac{e}{\varepsilon_0}\left(n_i - n_e\right) \tag{2.23}$$

เมื่อเราพิจารณาการกระจายของอิเล็กตรอนเป็นแบบโบร์ตมานน์ในสมการ (2.18) และประมาณว่าการกระจายของประจุในพลาสมามีค่า $n_i = n_0$ เพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจจะขอพิจารณาสมการที่ (2.23) ในหนึ่งมิติตามแนวแกน x

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{en_0}{\varepsilon_0}\left(\exp\left[\frac{e\phi}{KT_e}\right]-1\right) \tag{2.24}$$

ในสนามทุกจุดที่ค่า $|e\phi/KT_e| << 1$ เราสามารถกระจายเทอมที่เป็น exponential ในสมการที่ (2.24) ในรูปของอนุกรมเทเลอร์ (Taylor's series) ได้ดังนี้

$$\exp\left[\frac{e\phi}{KT_e}\right] = 1+\frac{e\phi}{KT_e}+\frac{1}{2}\left(\frac{e\phi}{KT_e}\right)^2+\cdots \tag{2.25}$$

ประมาณได้ว่าหลังพจน์ที่สองมีค่าน้อยมากซึ่งไม่ค่อยนำมาคิด สมการที่ (2.24) เขียนได้เป็น

$$\frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 KT_e} \tag{2.26}$$

หรือเขียน

$$\frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_D^2} \tag{2.27}$$

โดยที่ $\lambda_D$ คือความยาวของเดอบาย

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 KT_e}{n_0 e^2}} \tag{2.28}$$

จากหัวข้อที่ 2.1 จำนวนอนุภาค $N_D$ ภายในทรงกลมรัศมี $\lambda_D$ ที่มีจำนวนความหนาแน่นเท่ากับ $n_0$ หาได้ดังนี้

$$N_D = n_0\left(\frac{4}{3}\pi\lambda_D^3\right) \tag{2.29}$$

แทนค่าจากสมการที่ (2.28) จะได้

$$N_D = n_0\left(\frac{4}{3}\pi\left[\frac{\varepsilon_0 KT_e}{n_0 e^2}\right]^{3/2}\right)$$

หรือ

$$N_D = 1.38\times 10^6 \frac{T_e^{3/2}}{n_0^{1/2}} \tag{2.30}$$

พิจารณาจากรูปที่ 2.1 ถ้าขนาดของความกว้างของชีทหรือความยาวของเดอร์บายที่ขอบมีขนาดเล็กมากเมื่อเทียบกับความกว้างของพลาสมา $\lambda_D << L$ สมการของพัวว์ซองที่ $n_e \neq n_i$ ที่ขอบชีทจะสามารถประมาณค่าศักย์ไฟฟ้าที่มีการเปลี่ยนแปลงที่ขอบได้เป็น

$$\nabla^2\phi \sim \frac{\phi}{L^2} \tag{2.30}$$

จากสมการที่ (2.23)

$$\frac{\phi}{L^2} \approx \left|\frac{e}{\varepsilon_0}(n_i - n_e)\right| \tag{2.31}$$

จากการพิจารณาที่ค่า $|e\phi/KT_e| << 1$ เราจะพบว่าค่าของ

$$\frac{\phi}{L^2} << \frac{KT_e}{eL^2} \tag{2.32}$$

หรือจากสมการที่ (2.28)

$$\frac{\phi}{L^2} << \frac{K}{eL^2}\left(\frac{e^2Kn_0}{\varepsilon_0}\lambda_D^2\right) \tag{2.33}$$

จากสมการที่ (2.31) ในบริเวณที่เป็นส่วนที่เรียกว่าชีท จะเขียนได้

$$\left|\frac{e}{\varepsilon_0}(n_i - n_e)\right| << \frac{K}{eL^2}\left(\frac{e^2Kn_e}{\varepsilon_0}\lambda_D^2\right) \tag{2.34}$$

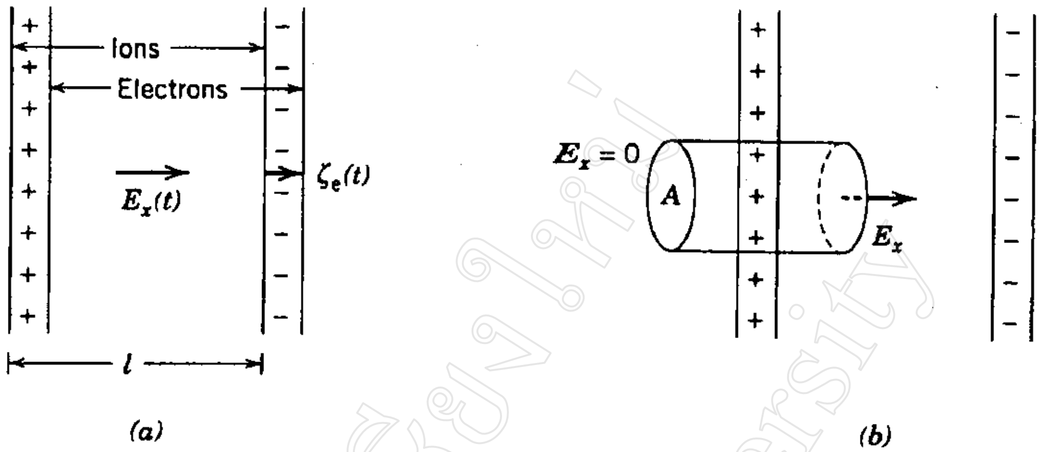
หรือเขียนได้เป็น

$$\frac{|n_i - n_e|}{n_e} << \frac{\lambda_D^2}{L^2} \tag{2.35}$$

เมื่อ $\lambda_D << L$ สมการที่ (2.35) จะมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง ซึ่งเขียนใหม่ได้เป็น

$$|n_i - n_e| << n_e \tag{2.36}$$

จากสมการที่ (2.36) ความหนาแน่นของอิเล็กตรอนจะมีค่ามากประมาณเท่ากับค่าความหนาแน่นของประจุ $n_i \cong n_e$ เราจึงเขียนได้ $n_i = n_e = n_0$ ซึ่งเป็นที่มาของการเรียกพลาสมาว่าเชิงสะเทินและเมื่อพิจารณาสมการที่ (2.29) ร่วมกับข้อแม้ที่ว่า $\lambda_D << L$ ซึ่งบ่งบอกถึงพลาสมามีพฤติกรรมแบบร่วมสมการที่ (2.30) จะให้ค่า $N_D >> 1$




รูปที่ 2.2 แสดงการขอบเขตของการเคลื่อนที่หรือสั่นของพลาสมา (a) แสดงให้เห็นการฟุ้งกระจายของกลุ่มอิเล็กตรอนและกลุ่มไอออนในพลาสมา (b) วิธีคำนวณหาค่าสนามไฟฟ้า [Lieberman and Lichtenberg, 1994]

พิจารณาจากรูปที่ 2.2 นอกเหนือจากส่วนที่เป็นพลาสมาแล้วในส่วนของขอบชีททางด้านซ้ายมือหรือแคโทดชีท (cathode sheath) ที่ $T_e$=0 นั้นจะเกิดความสมดุลย์ระหว่าง $n_i \cong n_e$ ดังนั้นค่าของสนามไฟฟ้า $\vec{E} \cong 0$ และเมื่อเราพิจารณาในส่วนทางด้านขวามือหรือที่แอโนดชีท (anode sheath) เมื่อให้ $\vec{\xi}_e(t)$ คือระยะขจัดของอิเล็กตรอนขึ้นอยู่กับฟังชั่นของเวลา $t$ และ $\left|\vec{\xi}_e(t)\right| << L$ หาค่าสนามไฟฟ้าจากกฎของเก้าส์

$$\varepsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q \tag{2.37}$$

จากผลรวมของประจุทั้งหมด $Q$

$$Q = \oint_S \rho_s dA \tag{2.38}$$

ค่าของสนามไฟฟ้าในแนวแกน x สามารถหาได้จากสมการที่ (2.37) และ (2.38) ได้เป็น

$$\vec{E}_x = \frac{\rho_s \hat{i}}{\varepsilon_0} \tag{2.39}$$

เมื่อ

$$\rho_s = e n_0 \xi_e \tag{2.40}$$

ค่า $\vec{\xi}_e(t)$ มีขนาดเล็กมากเมื่อเทียบกับขนาดของความกว้างของพลาสมา ดังนั้นความเร็ว $\vec{u}_e = d\vec{\xi}_e/dt$ และ $\vec{u}_e \cdot \nabla u_e$ ก็จะมีค่าน้อยมาก ๆ จากสมการของผลรวมของแรงในสมการที่ (2.7) สามารถจะประมาณได้ว่า

จาก
$$m_e n_e \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{\xi}_e}{dt}\right) = -en_e\left(\vec{E}_x + \vec{u}_e \times \vec{B}\right) - \nabla p - m_e n_e v_{m_e} \vec{u}_e$$
$$= -en_e \vec{E}_x \qquad (2.41)$$

แทนค่า $\rho_s$ จากสมการที่ (2.40) ลงในสมการที่ (2.41)

$$\frac{d^2\vec{\xi}_e}{dt^2} = -\frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m_e}\vec{\xi}_e \qquad (2.42)$$

ให้ $\omega_{pe}$ เป็นความถี่ของพลาสมาอิเล็กตรอนมวล $m_e$ นิยามได้จาก

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m_e}} \qquad (2.43)$$

สมการที่ (2.42) เขียนได้ใหม่ดังนี้

$$\frac{d^2\vec{\xi}_e}{dt^2} = -\omega_{pe}^2 \vec{\xi}_e \qquad (2.44)$$

โดยการแก้สมการที่ (2.44) จะได้

$$\vec{\xi}_e(t) = \vec{\xi}_{e0}\cos\left(\omega_{pe} t + \phi_0\right) \qquad (2.45)$$

เช่นเดียวกันเราสามารถหาค่าความถี่ของพลาสมาไอออน $\omega_{pi}$ มวล $M$ ได้จาก

$$\omega_{pi} = \sqrt{\frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 M}} \qquad (2.46)$$

ดังนั้นค่าความถี่เฉลี่ยของพลาสมา $\omega_p$ จึงหาได้จาก

$$\omega_p = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2} \qquad (2.47)$$

หรือประมาณได้ว่า

$$\omega_p \cong \omega_{pe} \qquad \text{เมื่อ } M >> m_e \tag{2.48}$$

สมการที่ (2.46) ใช้หาความถี่ของการชนกันของพลาสมากับไอออน $f_{pi}$ และเวลาเฉลี่ยระหว่างการชนกันของอะตอมหรืออนุภาคอิสระ

$$f_{pi} = \omega_{pi}/2\pi \tag{2.49}$$

$$\tau = 2\pi/\omega_{pi} \tag{2.50}$$

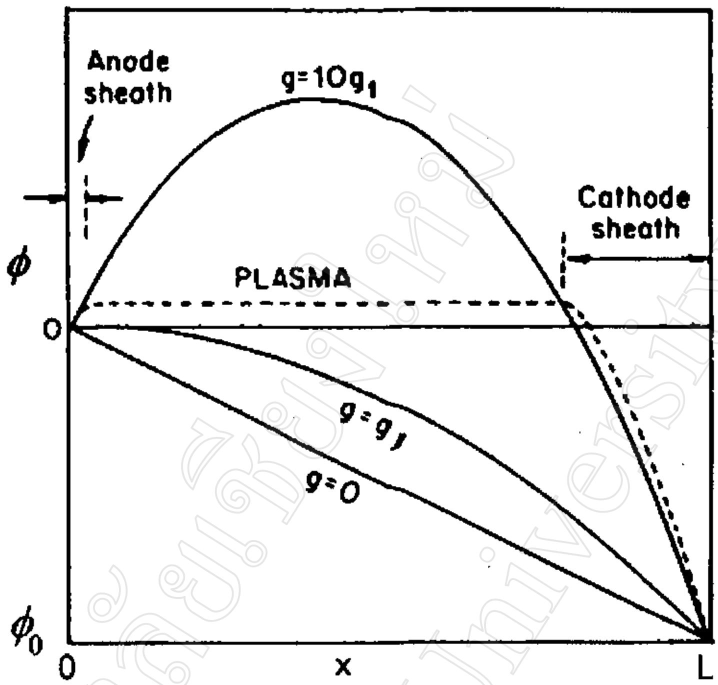
เมื่อพิจารณาจากนิยามของการที่จะเป็นพลาสมาในหัวข้อที่ 2.1 จำนวนครั้งของการชนอิสระระหว่างอนุภาคกับอนุภาคในหนึ่งหน่วยเวลาในพลาสมา หาได้จากสมการที่ (2.3, 2.43, 2.46, 2.48 และ 2.50) ดังนี้

$$\omega_p \tau = \frac{2\pi\omega_{pe}}{\omega_{pi}} \tag{2.51}$$

นั่นคือ $\omega_p \tau >> 1$ เมื่อ $\omega_{pe} >> \omega_{pi}$

### 2.3 การเกิดพลาสมา

Langmuir (1929) ได้ศึกษาการเกิดพลาสมาโดยพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้าในหนึ่งมิติโดยที่ตำแหน่ง $x = 0$ ค่าศักย์ไฟฟ้า $\phi = 0$ และที่ตำแหน่งแสดงระยะห่างระหว่างแคโทดกับแอโนด ($x = L$) ค่าศักย์ไฟฟ้า $\phi = \phi_0$ ถ้านิยามให้ $g$ เป็นอัตราส่วนของการแตกตัวของอะตอมหรือโมเลกุลเป็นไอออนต่อหนึ่งหน่วยเวลา (ionization rate) เมื่อ $g = 0$ ($g_0$) จะมีการกระจายของศักย์ไฟฟ้า $\phi$(x) เป็นแบบเส้นตรงและที่ตำแหน่ง $x = 0$ ค่าของการเปลี่ยนแปลง $d\phi/dx = 0$ ขบวนการที่จะเกิดการฟอร์มพลาสมาได้นั้นจะขึ้นอยู่กับจำนวนเท่าของอัตราส่วนของการเกิดไอออนที่ $g \neq 0$ ในที่นี้ขอใช้ $g_1$ นั่นคือพลาสมาจะสามารถฟอร์มเกิดขึ้นได้ค่าผลรวมของศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากการแตกตัวจะต้องมีค่ามากพอดังแสดงในรูปที่ 2.3 ซึ่งแสดงให้เห็นถึงศักย์ไฟฟ้าที่เพิ่มขึ้นเป็นผลเนื่องจากการเพิ่มของจำนวน $g$ โดยค่าศักย์ไฟฟ้ามากที่สุดที่ $g = 10g_1$ โดยถือว่าผลของศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากอิเล็กตรอนหลังการแตกตัวมีผลน้อยมาก [Forrester, 1988]




รูปที่ 2.3 แสดงการกระจายของศักย์ไฟฟ้า $\phi$ ระหว่างแผ่นอิเล็กโทรดคู่ขนานที่มีระยะห่าง $L$ จาการแตกตัวของก๊าซอย่างสม่ำเสมอ [Forrester, 1988]

Harrison และ Thompson (1959) และ Forrester (1988) ได้พิจารณาหาค่า $g_1$ ณ ตำแหน่ง $x_1$ และมีศักย์ไฟฟ้า $\phi_1$ จากสมการของพัวว์ซอง สมการที่ (2.20) เขียนได้เป็น

$$\frac{d^2\phi}{dx_1^2} = -\frac{\rho_1}{\varepsilon_0} \tag{2.52}$$

เราสามารถหาค่าความหนาแน่นของไอออน $\rho_1$ ที่ตำแหน่ง $x_1$ จาก

$$\rho_1 = -J_1 v_1 \tag{2.53}$$

เมื่อ $J_1$ คือความหนาแน่นของกระแสต่อหน่วยพื้นที่ ที่ตำแหน่ง $x_1$

$v_1$ คือความเร็วของไอออนมวล $M$ ที่มีศักย์ไฟฟ้าระหว่าง $\phi_1$ และ $v_1$ ซึ่งจะหาได้จาก

$$v_1 = \sqrt{\frac{2e(\phi_1 - \phi)}{M}} \tag{2.54}$$

ให้ $g_1 dx_1$ คืออัตราส่วนของจำนวนไอออนต่อหนึ่งหน่วยเวลาซึ่งจะหาได้จาก

$$g_1 dx_1 = \frac{dJ}{e} \tag{2.55}$$

ค่าแรงไฟฟ้าระหว่างแผ่นอิเล็กโทรด ณ ตำแหน่ง $x$ ต่อหน่วยพื้นที่ ($\varepsilon_0\phi'^2/2$) จะเท่ากับค่าของโมเมนตัมของประจุที่เคลื่อนที่ระหว่างแผ่นคู่ขนานอิเล็กโทรด ($Mv_1dJ/e$) หรือ

$$\frac{\varepsilon_0\phi'^2}{2} = \frac{Mv_1dJ}{e} \tag{2.56}$$

จากสมการที่ (2.54) และ (2.55) แทนลงในสมการที่ (2.56) แล้วอินทิเกรตรอบ $x$ ทั้งหมดก็จะได้

$$\frac{\varepsilon_0\phi'^2}{2} = g_1\sqrt{2eM}\int_0^x \sqrt{\phi_1-\phi}\,dx_1 \tag{2.57}$$

จากรูปที่ 2.3 จะเห็นว่าเส้นกราฟที่ $g = g_1$ มีการเปลี่ยนแปลงเป็นไปตามสมการ

$$\phi = -\phi_0\frac{x^2}{L^2} \tag{2.58}$$

และ

$$\frac{d\phi}{dx} = -2\phi_0\frac{x}{L^2} \tag{2.59}$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -2\frac{\phi_0}{L^2} \tag{2.60}$$

เช่นเดียวกันค่าศักย์ไฟฟ้าที่ตำแหน่ง $x_1$

$$\phi_1 = -\phi_0\frac{x_1^2}{L^2} \tag{2.61}$$

จากสมการที่ (2.58, 2.60) และ (2.61) เขียนสมการที่ (2.56) ได้เป็น

$$\left(-2\phi_0\frac{x}{L^2}\right)^2 = \frac{2g_1}{\varepsilon_0}\frac{\sqrt{2eM\phi_0}}{L}\int_0^x \sqrt{x-x_1}\,dx_1 \tag{2.62}$$

เราสามารถอินทิเกรตสมการที่ (2.62) ได้โดยเปลี่ยนตัวแปร

$$x_1 = x\sin\theta \tag{2.63}$$

ที่ขอบล่างของค่า $x_1 = 0$ ค่า $\theta = 0$ และที่ขอบบนของค่า $x_1 = x$ ค่า $\theta = \pi/2$ และผลของ

$$dx_1 = x\cos\theta\, d\theta \tag{2.64}$$

จากสมการที่ (2.63) และ (2.64) จะได้

$$\begin{aligned}\int_0^x \sqrt{x-x_1}\,dx_1 &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{x^2\left(1-\sin^2\theta\right)}\,x\cos\theta\, d\theta \\ &= x^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\, d\theta\end{aligned} \tag{2.65}$$

ค่าของการอินทิเกรตในสมการที่ (2.65) จะได้

$$\int_0^x \sqrt{x-x_1}\,dx_1 = \frac{x^2\pi}{4} \tag{2.66}$$

แทนค่าที่ได้จากสมการที่ (2.66) ลงในสมการที่ (2.62) ได้

$$\left(-2\phi_0\frac{x}{L^2}\right)^2 = \frac{2g_1}{\varepsilon_0}\frac{\sqrt{2eM\phi_0}}{L}\left(\frac{x^2\pi}{4}\right) \tag{2.67}$$

หรือ

$$g_1 = \frac{4\varepsilon_0}{\pi}\frac{\sqrt{2\phi_0^3/eM}}{L^3} \tag{2.68}$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างค่า $g_1$ กับค่าความหนาแน่นกระแส $J$ ในสมการที่ (2.55) เราสามารถหาค่าความหนาแน่นของกระแสทั้งหมดที่มีทิศทางการไหลไปทางแผ่นของอิเล็กโทรดที่มีศักย์ไฟฟ้าเป็นลบ ณ ตำแหน่งที่ $x_1$ ได้คือ

$$J_1 = g_1 eL \tag{2.69}$$

จากสมการที่ (2.68) จะได้ค่า $J_1$ ในสมการที่ (2.69) เป็น

$$J_1 = \left(\frac{9}{\pi}\right)\left(\frac{4\varepsilon_0}{9}\frac{\sqrt{2e\phi_0^3/M}}{L^2}\right) \tag{2.70}$$

หรือเขียนได้ใหม่ดังนี้

$$J_1 = \left(\frac{9}{\pi}\right)J_0 \tag{2.71}$$

เมื่อ

$$J_0 = \frac{4\varepsilon_0}{9}\sqrt{\frac{2e}{M}}\frac{\phi_0^{3/2}}{L^2} \tag{2.72}$$

ค่าความหนาแน่นของประจุจากสมการที่ (2.20) และจากสมการที่ (2.60) จะมีค่า

$$\rho = \frac{2\varepsilon_0\phi_0}{L^2} \tag{2.73}$$

จากสมการที่ (2.73) จะเห็นได้ว่าความหนาแน่นของประจุไม่ได้ขึ้นอยู่กับตำแหน่งใด ๆ และเมื่อพิจารณาจากรูปที่ 2.3 ที่อัตราการแตกตัวของก๊าซมีค่า $g = 10g_1$ กราฟจะเป็นรูปพาราโบลาคว่ำจะมีค่าศักย์ไฟฟ้าที่สูงที่สุด จากความสัมพันธ์ดังสมการที่ (2.58) ค่าศักย์ไฟฟ้าจะมีค่าสูงสุดเมื่อ

$$\phi = -\phi_0\frac{x}{L}\left[1-\left(\frac{g}{g_1}\right)^{2/3}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right] \tag{2.74}$$

เมื่อเราย้อนกลับไปพิจารณาอัตราการแตกตัว $g_1$ ณ ที่ตำแหน่ง $x_1$ โดยที่ $x_1 \le x$ เราจะพบว่าจำนวนของไอออนที่ตำแหน่ง $x$ ใด ๆ ที่มีค่าความเร็วระหว่าง $v_x$ ถึง $v_x + dv$ จะสามารถเขียนในรูปของค่าฟังชั่น $f(v_x)dv$ [Harrison and Thompson, 1959] ได้เป็น

$$f(v_x)dv = \frac{g(x_1)}{v_x}dx_1 \tag{2.75}$$

เมื่อ $g(x_1)dx_1$ เป็นจำนวนของประจุที่พบต่อหนึ่งหน่วยเวลาในช่วงระหว่าง $x_1$ ถึง $x_1 + dx_1$ ที่ตำแหน่งใด ๆ ที่ $x_1 \le x$ ความเร็ว $v_x$ คือความเร็วของไอออนมวล $M$ ที่มีศักย์ไฟฟ้าระหว่าง $\phi(x_1)$ และ $\phi(x)$ หาได้จาก

$$v_x = \sqrt{\frac{2e(\phi(x_1)-\phi(x))}{M}} \tag{2.76}$$

แทนค่าสมการที่ (2.76) ลงในสมการที่ (2.75) ได้เป็น

$$f(v_x)dv = \sqrt{\frac{M}{2e}}\frac{g(x_1)}{\sqrt{\phi(x_1)-\phi(x)}}dx_1 \tag{2.77}$$

หรือเขียนได้ใหม่เป็น

$$f(v_x)dv = \sqrt{\frac{M}{2KT_e}}\frac{g(x_1)}{\sqrt{\eta-\eta_1}}dx_1 \qquad (2.78)$$

เมื่อ

$$\eta = -\frac{e\phi(x)}{KT_e} \qquad (2.79)$$

และ

$$\eta_1 = -\frac{e\phi(x_1)}{KT_e} \qquad (2.80)$$

ค่าความหนาแน่นของประจุที่ตำแหน่ง $x$ ใด ๆ ก็สามารถหาได้จากอินทิเกรตทั้งหมดบนสมการที่ (2.78) ได้เป็น

$$n_i(x) = \sqrt{\frac{M}{2KT_e}}\int_0^x \frac{g(x_1)}{\sqrt{\eta-\eta_1}}dx_1 \qquad (2.81)$$

เมื่อเราพิจารณาค่า $n_e$ จากสมการที่ (2.18) และ (2.79) สมการของพัวว์ซองในหนึ่งมิติตามแนวแกน x ในสมการที่ (2.23) จะเขียนได้ใหม่เป็น

$$-\frac{KT_e}{e}\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{e}{\varepsilon_0}\left(\sqrt{\frac{M}{2KT_e}}\int_0^x \frac{g(x_1)}{\sqrt{\eta-\eta_1}}dx_1 - n_0 e^{-\eta}\right) \qquad (2.82)$$

จากสมการที่ (2.79) เขียนสมการของค่าศักย์ไฟฟ้าได้ใหม่เป็น

$$\phi = -\frac{\eta KT_e}{e} \qquad (2.83)$$

และ

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi}{dx^2} &= \frac{d^2}{dx^2}\left(-\frac{\eta KT_e}{e}\right)\\ &= -\frac{KT_e}{e}\frac{d^2\eta}{dx^2} \qquad (2.84)\end{aligned}$$

สมการที่ (2.82) จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\left(\frac{\varepsilon_0 KT_e}{n_0 e^2}\right)\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{1}{n_0}\sqrt{\frac{M}{2KT_e}}\int_0^x \frac{g(x_1)}{\sqrt{\eta-\eta_1}}dx_1 - e^{-\eta} \qquad (2.85)$$

แทนค่าจากสมการที่ (2.28)

$$\lambda_D^2 \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{1}{n_0}\sqrt{\frac{M}{2KT_e}}\int_0^x \frac{g(x_1)}{\sqrt{\eta-\eta_1}}dx_1 - e^{-\eta} \quad (2.86)$$

เราจัดระบบจุดอ้างอิงใหม่โดยให้

$$\xi = x/L \quad (2.87)$$

และ

$$\xi_1 = x_1/L \quad (2.88)$$

โดยที่ $L$ คือค่าความยาวของระบบ (characteristic length) สมการที่ (2.86) เขียนได้ใหม่ในเทอมที่อ้างอิงกับ $\xi$ และ $\xi_1$ ดังนี้

$$\left(\frac{\lambda_D}{L}\right)^2 \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{L}{n_0}\sqrt{\frac{M}{2KT_e}}\int_0^\xi \frac{g(\xi_1)}{\sqrt{\eta-\eta_1}}d\xi_1 - e^{-\eta} \quad (2.89)$$

เมื่อพิจารณาถึงเงื่อนไขในการฟอร์มพลาสมาในตอนที่ 2.1 และ 2.2 เราสามารถประมาณได้ว่า $\lambda_D/L$ มีค่าน้อยมากนั่นคือ $\lambda_D/L \cong 0$ สมการที่ (2.89) เขียนได้ใหม่เป็น

$$\frac{n_0 e^{-\eta}}{L} = \sqrt{\frac{M}{2KT_e}}\int_0^\xi \frac{g(\xi_1)}{\sqrt{\eta-\eta_1}}d\xi_1 \quad (2.90)$$

กำหนดให้ $\eta = x^2$ และ $\eta_1 = x^2\sin^2\theta$ สมการที่ (2.90) เขียนได้ในรูปใหม่ดังนี้

$$\frac{n_0 e^{-\eta}}{L} = \sqrt{\frac{M}{2KT_e}}\int_0^{\pi/2} g(x^2\sin^2\theta)\left[\frac{d\xi_1}{d(x^2\sin^2\theta)}\right]d\theta \quad (2.91)$$

เราจัดสมการที่ (2.91) ให้อยู่ในรูป

$$\frac{n_0 e^{-\eta}}{L} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} h(\eta\sin\theta)d\theta \quad (2.92)$$

เมื่อ

$$h(\eta) = \pi\sqrt{\frac{M}{2KT_e}}g(\eta)\sqrt{\eta}\frac{d\xi_1}{d\eta} \quad (2.93)$$

สมการที่ (2.92) สามารถหาค่าคำตอบได้โดยอาศัย *Schömilch's transformation* [Whittaker and Watson, 1950] นั่นคือถ้าเราสามารถเขียนสมการได้ในรูป

$$f(\eta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} h(\eta\sin\theta)d\theta \tag{2.94}$$

ฟังชั่น $h(\eta)$ จะหาได้จาก

$$h(\eta) = f(0) + \int_0^{\pi/2} f'(\eta\sin\theta)d\theta \tag{2.95}$$

โดยการเทียบสมการที่ (2.94) กับสมการที่ (2.92) จะได้

$$f(\eta) = \frac{n_0 e^{-\eta}}{L} \tag{2.96}$$

$$\frac{df(\eta)}{d\eta} = -\frac{n_0 e^{-\eta}}{L} \tag{2.97}$$

และ

$$f'(\eta\sin\theta) = -\frac{n_0}{L}\exp(-\eta\sin\theta) \tag{2.98}$$

แทนสมการที่ (2.96) และ (2.98) ลงในสมการ (2.95) จะได้

$$h(\eta) = \frac{n_0}{L}\left[1 - \int_0^{\pi/2}\exp(-\eta\sin\theta)d\theta\right] \tag{2.99}$$

สมการที่ (2.99) สามารถจัดรูปสมการในส่วนของการอินทิเกรตใหม่ได้เมื่อกำหนดให้

$$t^2 = \eta\sin\theta \tag{2.100}$$

ที่ขอบล่างของค่า $\theta = 0$ ค่า $t = 0$ และที่ขอบบนของค่า $\theta = \pi/2$ ค่า $t = \sqrt{\eta}$ และจะสามารถเปลี่ยนรูปค่า

$$\int_0^{\pi/2}\exp(-\eta\sin\theta)d\theta = 2\sqrt{\eta}e^{-\eta}\int_0^{\sqrt{\eta}}\exp(t^2)dt \tag{2.101}$$

จากสมการที่ (2.101) สามารถเขียนสมการที่ (2.99) ใหม่ได้เป็น

$$h(\eta) = \frac{n_0}{L}\left[1-2\sqrt{\eta}e^{-\eta}\int_0^{\sqrt{\eta}}\exp(t^2)dt\right] \tag{2.102}$$

หรือ

$$h(\eta) = \frac{n_0}{L}\left[1-2\sqrt{\eta}e^{-\eta}D(\sqrt{\eta})\right] \tag{2.103}$$

เมื่อ $D(x)$ เป็นรูปของฟังชั่นดอร์สัน (Dawson's function) [Terrill and Sweeny, 1944 ; Jahnke and Emde, 1945] โดยที่

$$D(x) = \int_0^x \exp(t^2)dt \tag{2.104}$$

แทนค่าสมการของ $h(\eta)$ จากสมการที่ (2.103) ลงไปในสมการที่ (2.93)

$$\pi\sqrt{\frac{M}{2KT_e}}g(\eta)\sqrt{\eta}\frac{d\xi_1}{d\eta} = \frac{n_0}{L}\left[1-2\sqrt{\eta}e^{-\eta}D(\sqrt{\eta})\right] \tag{2.105}$$

เมื่อพิจารณาค่าของสนามไฟฟ้าที่ระยะอนันต์ที่มีขนาดใหญ่กว่าจะพบว่าค่าของ $d\xi_1/d\eta = 0$ ดังนั้นเราจะได้ค่าของ $\lim \eta \to \eta_0$ [Harrison and Thompson, 1959] สมการที่ (2.105) จึงเขียนได้ใหม่ในรูปของ

$$0 = 1-2\sqrt{\eta_0}e^{-\eta_0}D(\sqrt{\eta_0}) \tag{2.106}$$

Miller และ Gordon (1931) และ Lohmander และ Rittsten (1958) ได้คำนวณหาค่าของ $D(x)\exp(-x^2)$ ได้ค่ามากที่สุดเมื่อ $x_0 = 0.9241$ และจากความสัมพันธ์ของ $\eta_0 = x_0^2$ จะให้ค่า $\eta_0 = 0.8539$ [Harrison and Thompson, 1959 ; Self, 1963 ; Forester, 1988] เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณสมการที่ (2.105) เราจะกำหนดค่าของ $g(\eta)$ ในรูปของ

$$g(\eta) = \lambda n_0 e^{-\gamma\mu} \tag{2.107}$$

$\lambda$ เป็นค่าคงที่และ $\gamma$ คือค่าจำนวนเต็มที่จะบ่งบอกถึงคุณลักษณะของการแตกตัวของก๊าซ $\gamma = 0$ แสดงถึงการแตกตัวที่สม่ำเสมอ (uniform ionization) $\gamma = 1$ แสดงถึงการแตกตัวที่มีค่าขึ้นกับค่าความหนาแน่นของอิเล็กตรอน $g \propto n_e$ และ $\gamma = 2$ แสดงถึงการแตกตัวที่ขึ้นกับค่าความหนาแน่นของอิเล็กตรอนกำลังสอง $g \propto n_e^2$ [Harrison and Thompson, 1959 ; Forrester, 1988] เราจัดเปลี่ยนรูปตัวแปรจากสมการที่ (2.87) โดยให้

$$L = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{2KT_e}{M}} \tag{2.108}$$

และ

$$\xi = \lambda\xi_1\sqrt{\frac{M}{2KT_e}} \tag{2.109}$$

แทนสมการที่ (2.107) และ (2.109) ลงในสมการที่ (2.105) จะได้

$$\pi\left(\frac{\xi}{\lambda\xi_1}\right)\left(\lambda n_0 e^{-\gamma\eta}\right)\sqrt{\eta}\,\frac{d\xi_1}{d\eta} = n_0\left[1-2\sqrt{\eta}e^{-\eta}D(\sqrt{\eta})\right] \tag{2.110}$$

หรือ

$$\frac{\xi}{\xi_1}d\xi_1 = \frac{e^{\gamma\eta}}{\pi\sqrt{\eta}}\left[1-2\sqrt{\eta}e^{-\eta}D(\sqrt{\eta})\right]d\eta \tag{2.111}$$

สำหรับ $\gamma > 0$ ทุกค่าสมการที่ (2.111) สามารถใช้หาผลเฉลยได้ดังนี้

$$\xi = \frac{2}{\pi(\gamma-1)}\left[\sqrt{\gamma}D(\sqrt{\gamma\eta}) - e^{-\eta(\gamma-1)}D(\sqrt{\eta})\right] \tag{2.112}$$

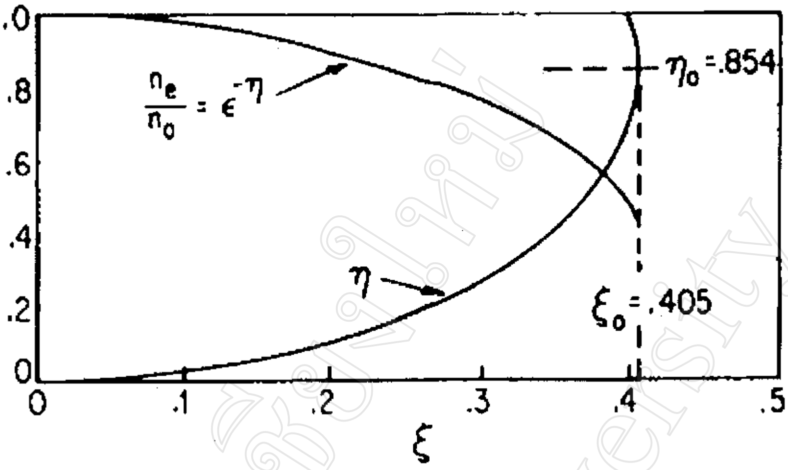
Harrison และ Thompson (1959) และ Self (1963) ได้คำนวณหาค่าของ $\xi$ ในกรณีที่ $\gamma$ มีค่า 1, 2 และ 3 เมื่อพิจารณาที่ค่า $\eta = \eta_0 = 0.8539$ ค่า $\xi_0$ จากสมการที่ (2.112) หาได้ค่าดังนี้

$$\gamma = 0 \qquad \xi = \frac{2}{\pi}e^{-\eta}D(\sqrt{\eta}), \qquad \xi_0 = 0.3444 \tag{2.113}$$

$$\gamma = 1 \qquad \xi = \frac{2}{\pi}\left[D(\sqrt{\eta}) - \int_0^{\eta} D(\sqrt{s})ds\right], \qquad \xi_0 = 0.4046 \tag{2.114}$$

$$\gamma = 2 \qquad \xi = \frac{2}{\pi}\left[\sqrt{2}D(\sqrt{2\eta}) - e^{\eta}D(\sqrt{\eta})\right], \qquad \xi_0 = 0.4920 \tag{2.115}$$

รูปที่ 2.4 แสดงให้เห็นเส้นกราฟแสดงผลการคำนวณของ $\eta$ และค่าสูงสุดของ $\eta_0$ จากสมการที่ (2.105) และฟังชั่น $n_e/n_0 = \exp(-\eta)$ ที่ค่า $\gamma = 1$




**รูปที่ 2.4** กราฟแสดงผลการคำนวณทางคณิตศาสตร์หาค่า $\eta$ จากสมการที่ (2.105) [Forrester, 1988]

จากสมการที่ (2.69) ที่ผนังของพลาสมาที่มีความกว้าง $a$ (plasma width) ความหนาแน่นของกระแสไอออน $J_i$ มีค่า

$$J_i = gea \tag{2.116}$$

และจากสมการที่ (2.87)

$$a = L\xi_0 \tag{2.117}$$

แทนค่า $g$ จากสมการที่ (2.107) ค่า $L$ จากสมการที่ (2.108) และค่า $a$ จากสมการที่ (2.117) จะสามารถหาความสัมพันธ์ของความเข้มของกระแสได้ดังนี้

$$\begin{aligned} J_i &= e\xi_0(\gamma)\left(\lambda n_0 e^{-\gamma\eta}\right)\left(\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{2KT_e}{M}}\right) \\ &= e\xi_0(\gamma) n_0 e^{-\gamma\eta}\sqrt{\frac{2KT_e}{M}} \end{aligned} \tag{2.118}$$

$\xi_0$ มีค่าขึ้นอยู่กับค่า $\gamma$ ตามสมการที่ (2.113-115) จากสมการที่ (2.118) ถ้า $\gamma = 0$ ซึ่งหมายถึงการแตกตัวของก๊าซที่สม่ำเสมอ $g = \lambda n_0$ จะได้

$$J_i = 0.344 n_0 e\sqrt{\frac{2KT_e}{M}} \tag{2.119}$$

หรือ

$$J_i = 0.486 n_0 e \sqrt{\frac{KT_e}{M}} \tag{2.120}$$

และที่ $\gamma = 1$

$$J_i = 0.573 n_0 e \sqrt{\frac{KT_e}{M}} \tag{2.121}$$

และที่ $\gamma = 2$

$$J_i = 0.696 n_0 e \sqrt{\frac{KT_e}{M}} \tag{2.122}$$

**2.4 ค่าคงที่ อัลฟาแฟกเตอร์ ของก๊าซ**

Leung (1994) ได้นิยามค่าคงที่หรือ "อัลฟาแฟกเตอร์ ($\alpha$)"จากความสมพันธ์ระหว่างกระแสไอออนหรือค่าความหนาแน่นของกระแสไอออน $J_i$ กับความเข้มข้นสูงสุดของพลาสมา $n$ กับค่า ion sound speed ($\sqrt{KT_e/M}$) เมื่อไอออนเคลื่อนที่เข้าไปในส่วนที่เป็นชีทในพลาสมาอิเล็กโทรดดังนี้

$$J_i = \alpha n e \sqrt{\frac{KT_e}{M}} \tag{2.123}$$

การทดลองหาค่าอัลฟาแฟกเตอร์ตามนิยามของ Leung จะได้กล่าวถึงในบทที่ 4