บทที่ 2
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 กระบวนการสโตแคสติค (Stochastic Processes)

นิยามที่ 2.1

กระบวนการสโตแคสติค เป็นเซตของกลุ่มของตัวแปรสุ่ม

กระบวนการสโตแคสติค จะเป็นตัวแปรสุ่มชนิดนับได้ที่มีจำนวนจำกัด เช่น การบันทึกอุณหภูมิในแต่ละวัน ซึ่งแต่ละรายการ(case) จะเรียกว่าเป็น พารามิเตอร์ชนิดไม่ต่อเนื่อง(discrete parameter process) และกระบวนการสโตแคสติคยังเป็นไปได้ที่จะเป็นตัวแปรสุ่มที่นับไม่ได้(infinite) ซึ่งในแต่ละรายการนี้ก็จะเรียกว่าเป็นพารามิเตอร์ชนิดต่อเนื่อง(continuous parameter process) ตัวอย่าง สำหรับพารามิเตอร์ชนิดต่อเนื่อง เช่น สัญญาณการเตือนอย่างต่อเนื่องในการทำงานของเครื่องจักร ว่าทุกๆ จุดของเวลาในระหว่างวันจะเป็นตัวแปรสุ่มที่ถูกกำหนดในการออกแบบเครื่องจักร โดยตัวแปรสุ่มจะเท่ากับ 1 ถ้าเครื่องจักรทำงานและจะเท่ากับ 0 ถ้าเครื่องจักรไม่ทำงาน สมมติให้เครื่องทำงาน 55.78 นาที หลังจากที่เครื่องเริ่มสตาร์ท ดังนั้น $X_{55.78} = 1$

นิยามที่ 2.2

เซตของจำนวนจริงที่ประกอบด้วยชุดของตัวแปรสุ่มทั้งหมดในกระบวนการสโตแคสติค เรียกว่าเป็นสถานะที่เป็นไปได้(state space) ในกระบวนการสโตแคสติค

สถานะที่เป็นไปได้ในกระบวนการสโตแคสติค อาจจะเป็นค่าที่มีลักษณะต่อเนื่อง หรือไม่ต่อเนื่องก็ได้ แต่จำนวนสมาชิกในสถานะที่เป็นไปได้นั้นต้องมีจำนวนจำกัด(finite)

กระบวนการสโตแคสติคอย่างง่ายจะพิจารณาจากตัวแปรสุ่มแบบอิสระ เช่น สมมติว่าเราจะตัดสินใจเล่นเกมส์อย่างยุติธรรม ด้วยเหรียญที่มีความเที่ยงตรง เริ่มต้นด้วยเรามีเงินอยู่ 5 บาท และเกมส์จะต้องทำการโยนเหรียญหลายๆครั้ง ถ้าเหรียญหงายขึ้นหัวเราก็จะได้เงิน 1 บาท แต่ถ้าหงายออกก้อยเราก็จะเสียเงิน 1 บาท เกมส์จะต้องเล่นไปเรื่อยๆ จนกระทั่งเหรียญเราหมด หรือเราได้กำไรเป็นเงิน 10 บาทจากฝ่ายตรงข้าม ดังนั้นเซตของผลการออกหัวและก้อยในการโยนเหรียญ ก็จะเป็นตัวแปรสุ่มแบบอิสระของกระบวนการสโตแคสติค

สมมติว่าบริษัทแห่งหนึ่งมีโทรศัพท์อยู่ 5 สาย และทั้ง 5 สาย จะถูกใช้ในช่วงเวลาที่กำหนดไว้ ภายในช่วงเวลาดังกล่าวจะถูกสังเกตจำนวนการใช้ในทุกๆ 2 นาที และจำนวนครั้งที่มีการใช้สายในแต่ละครั้งจะถูกบันทึกไว้

ให้ X_1 แทนจำนวนของสายที่ถูกใช้ครั้งแรก และ

X_2 คือจำนวนของสายที่ถูกใช้ครั้งที่ 2

ซึ่ง n=1, 2 ,.... ดังนั้น X_n ก็คือจำนวนสายที่ถูกใช้ในช่วงเวลาที่ n

ลำดับของการสังเกต X_1 , X_2 , ..., X_n คือกระบวนการสโตแคสติค หรือเป็นกระบวนการสุ่มเพราะค่าที่ได้จากการสังเกตแต่ละครั้ง ไม่สามารถที่จะคาดเดาได้ล่วงหน้า แต่มีความเป็นไปได้ที่จะระบุค่าที่แตกต่างได้ในแต่ละช่วงเวลา คือกระบวนการสโตแคสติคมีพารามิเตอร์ชนิดไม่ต่อเนื่อง(discrete time parameter) เพราะสายโทรศัพท์ที่ถูกใช้จะถูกสังเกตเฉพาะในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่ง มากกว่าช่วงเวลาที่ต่อเนื่องกัน

ในกระบวนการสโตแคสติค การสังเกตครั้งที่ 1 X_1 เรียกว่าสถานะขั้นต้นหรือสถานะเริ่มต้น และสำหรับ n = 2, 3 ,....การสังเกตที่ X_n เรียกว่าสถานะที่เป็นไปได้ในเวลาที่ n ดังนั้นสถานะของกระบวนการในเวลาที่สายถูกใช้ จะอยู่ระหว่าง 0-5

ในกระบวนการสโตแคสติคที่มีพารามิเตอร์ชนิดไม่ต่อเนื่อง (discrete time parameter) นี้ สถานะของกระบวนการจะแตกต่างกันไปตามลักษณะของการสุ่ม เพื่อบรรยายแบบจำลองของความน่าจะเป็นนี้ จึงมีความจำเป็นที่จะต้องระบุความน่าจะเป็นของทุกๆ เงื่อนไขความน่าจะเป็น X_1 และ X_{n+1} ดังนี้

$$P\left\{X_{n+1} = X_{n+1} \middle| X_1 = X_1, X_2 = X_2, \ldots, X_n = X_n\right\}$$

กล่าวอีกอย่างหนึ่ง คือ ทุกๆ ช่วงเวลาที่ n แบบจำลองความน่าจะเป็นจะต้องระบุเงื่อนไขความน่าจะเป็นว่า กระบวนการอยู่ในสถานะ X_{n+1} ที่เวลา $n+1$ ถ้าให้เวลาเป็น 1,2,...,n กระบวนการก็จะอยู่ในสถานะ X_1 , X_2 , ..., X_n

การวิเคราะห์ที่น่าสนใจอีกอย่างหนึ่งก็คือกระบวนการลูกโซ่มาร์คอฟ ซึ่งเป็นกระบวนการของพารามิเตอร์ชนิดไม่ต่อเนื่อง โดยอนาคตมาจากปัจจุบัน ปัจจุบันมาจากอดีต จากตัวอย่างที่ผ่านมาเรื่องเกมส์โยนเหรียญ พิจารณารูปแบบสโตแคสติคจากจำนวนเหรียญที่อีกฝ่ายจะมีได้ทันที หลังจากที่โยนเหรียญออกก้อย ชุดผลลัพธ์ควรจะเริ่มที่ 5 และอาจจะเพิ่มขึ้น หรือลดลงทีละ 1 จนกระทั่ง

เกมส์จะยุติลงด้วยค่า 0 หรือ 10 สมมติว่าหลังจากการโยนเหรียญ อีกฝ่ายหนึ่งได้ 3 เหรียญ ความน่าจะเป็นที่จะเกิดหลังจากการโยนเหรียญครั้งต่อไปว่าจะได้ 4 เหรียญเป็น 0.5 และนั่นเป็นสิ่งที่รู้มาจากอดีต(ว่าอีกฝ่ายมีเหรียญตอนโยนครั้งที่ 1 หรือครั้งที่ 2 ผ่านมาแล้วเท่าไร) และในอนาคตก็มีความเป็นอิสระกับในอดีต เมื่อได้ค่าในปัจจุบันไปแล้ว

นิยามที่ 2.3

กระบวนการลูกโซ่มาร์คอฟเป็นกระบวนการสโตแคสติคชนิดหนึ่ง ถ้าให้ $X_n = i$ เป็นกระบวนที่สถานะ i ที่เวลา n สมมติว่ากระบวนอยู่ในสถานะ i เราจะให้ความน่าจะเป็น P_{ij} เป็นสถานะต่อไปที่ j นั่นคือ

$$P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, .., X_1 = i_1, X_0 = i_0\right\} = P_{ij}$$

สำหรับทุก ๆ สถานะ $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i$, j และ $n \geq 1$

ซึ่งอธิบายได้ว่า สถานะในอนาคต X_{n+1} จะขึ้นอยู่กับสถานะในปัจจุบัน X_n อย่างเดียว และสถานะปัจจุบัน X_n จะขึ้นอยู่กับสถานะในอดีต X_{n-1} อย่างเดียว ค่าของ P_{ij} จะเป็นความน่าจะเป็นของกระบวนการเมื่ออยู่ในสถานะ i และต่อไปจะเปลี่ยนแปลงไปในสถานะ j ดังนั้นจะได้ว่า

$$P_{ij} \geq 0, \quad i, j \geq 0 \quad \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1, \quad i = 0,1,\ldots$$

ให้ P เป็นเมตริกซ์การเปลี่ยนแปลงความน่าจะเป็นขั้นแรก P_{ij}

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} \cdots \end{bmatrix}$$

2.2 สมการแชพแมนโคลโมโกรอฟ (Chapman-Kolmogorov Equations)

จากที่ได้กำหนดให้ P_{ij} เป็นเมตริกซ์เริ่มแรกของการเปลี่ยนแปลงความน่าจะเป็น และในขณะนี้ถ้าความน่าจะเป็นเปลี่ยนไปจนถึงขั้นที่ n P_{ij}^n ก็จะเป็นเมตริกซ์ความน่าจะเป็นที่เกิดจากกระบวนการที่สถานะ i เปลี่ยนเป็นสถานะ j จนถึงเปลี่ยนไปเป็นสถานะที่ n

นั่นหมายความว่า $P_{ij}^n = P\left\{X_{n+m} = j \middle| X_m = i\right\}, n, i, j \geq 0$ (2.1)

เนื่องจากว่า $P_{ij}^1 = P_{ij}$

สมการแชพแมนโคลโมโกรอฟ จึงเป็นวิธีสำหรับการหาความน่าจะเป็นที่เปลี่ยนแปลงในขั้นที่ n ตามสมการ

$$P_{ij}^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^n P_{kj}^m \quad \text{สำหรับทุก ๆ } n, m \geq 0 \text{ และทุก } i, j \qquad (2.2)$$

เพื่อความเข้าใจที่ง่ายขึ้นจะให้ $P_{ik}^n P_{kj}^m$ เป็นตัวแทนของความน่าจะเป็นที่เริ่มต้นที่ i ไปยัง j จนเปลี่ยนแปลงไปถึง $n+m$ ไปเรื่อย ๆ ในระหว่างนั้นจะผ่านสู่สถานะ k ที่การเปลี่ยนแปลงลำดับ n ดังนั้นผลรวมทั้งหมดของสถานะ k จะได้ความน่าจะเป็นว่ากระบวนการจะอยู่ในสถานะ j หลังจากการเปลี่ยนแปลงที่ $n+m$ ดังนี้

$$P_{ij}^{n+m} = P\left\{X_{n+m} = j \,\middle|\, X_0 = i\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{X_{n+m} = j, X_n = k \middle| X_0 = i\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{X_{n+m} = j,\ X_n = k, X_0 = i\right\} P\left\{X_n = k \middle| X_0 = i\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_{kj}^m P_{ik}^n$$

ถ้าให้ P^n ใช้แทนเมตริกซ์ของการเปลี่ยนแปลงความน่าจะเป็น P_{ij}^n ขั้น n ตามสมการที่ (2.2) จะได้ว่า

$$P^{n+m} = P^n \,.\, P^m$$

ใช้จุดเป็นตัวแทนการคูณเมตริกซ์ เช่น

$$P^2 = P^{(1+1)} = P \, . \, P = P^2$$

และโดยการพิสูจน์จาก

$$P^n = P^{(n-1+1)} = P^{n-1} . P = P^n$$

จะได้ว่าการเปลี่ยนแปลงเมตริกซ์ n ขั้น อาจจะหาได้จากการคูณกันของเมตริกซ์ P ด้วยตัวมันเองถึง n ครั้ง

ตัวอย่างที่ 2.1 พิจารณาการพยากรณ์อากาศจาก

$$P = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

โดย α คือความน่าจะเป็นที่ฝนตกในวันนี้ แล้วฝนจะตกในวันพรุ่งนี้

β คือความน่าจะเป็นที่ฝนไม่ตกในวันนี้ แต่ฝนจะตกในวันพรุ่งนี้

ถ้า $\alpha = 0.7$ และ $\beta = 0.4$ เป็นสถานะขั้นที่ 2 ให้คำนวณความน่าจะเป็นที่จะมีฝนตกอีก 4 วัน นับจากวันนี้โดยให้ฝนตกในวันนี้

การคำนวณ

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $P^2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = (P^2)^2 = \begin{bmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5668 & 0.4332 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่ฝนจะตกในวันที่ 4 มีค่าเท่ากับ 0.5749

ดังนั้นความน่าจะเป็นทั้งหมด จะพิจารณาจากความน่าจะเป็นแบบเป็นเงื่อนไข ตัวอย่างเช่น P_{ij}^n เป็นความน่าจะเป็นที่สถานะเวลา n เป็น j ให้สถานะเวลาเริ่มต้น 0 เป็น i ถ้าการแจกแจงไม่เป็นแบบเป็นเงื่อนไข ก็จะได้การแจกแจงความน่าจะเป็นของสถานะเริ่มต้นเป็น

$$\alpha_i = P\{X_0 = i\}, \quad i \geq 0\left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = 1\right)$$

ความน่าจะเป็นแบบไม่มีเงื่อนไขทั้งหมด อาจจะคำนวณโดยเงื่อนไขของสถานะเริ่มต้นดังนี้

$$P\{X_n = j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_n = j | X_0 = i\} P\{X_0 = i\}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}^n \alpha_i$$

ตัวอย่างเช่น ถ้า $\alpha_0 = 0.4$ $\alpha_1 = 0.6$ ในตัวอย่างที่ 2.1 และเมื่อความน่าจะเป็นเป็นแบบไม่มีเงื่อนไข ก็จะได้ความน่าจะเป็นที่ฝนจะตกในวันที่ 4 หลังจากที่เราบันทึกข้อมูลในวันแรก

$$P\{X_4 = 0\} = 0.4P_{00}^4 + 0.6P_{10}^4$$

$$= (0.4)(0.574) + (0.6)(0.5668)$$

$$= 0.5700$$

2.3 การจำแนกสถานะ (Classification of States)

กล่าวได้ว่าสถานะ j ได้มาจากสถานะ i ถ้า $P_{ij}^n > 0$ สำหรับบางค่าของ $n \geq 0$ ซึ่งหมายความว่าสถานะ j ได้มาจากสถานะ i ถ้าเริ่มจากสถานะ i เท่านั้น และทำไปเรื่อย ๆ จนถึงสถานะ j

$$P\{\text{ทำจน ถึง } j \mid \text{ เริ่มต้น } i\} = P\left\{\bigcup_{n=0}^{\infty}\left\{X_n = j \middle| X_0 = i\right\}\right\}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{X_n = j \middle| X_0 = i\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^n$$

$$= 0$$

สถานะ i และสถานะ j จะต่อเนื่องถึงกันได้ (communicate) เขียนเป็น $i \leftrightarrow j$ และสถานะอื่น ๆ ก็สามารถต่อเนื่องถึงกันได้ ด้วยตัวของมันเอง

จากนิยาม

$$P_{ii}^0 = P\left\{X_0 = i \middle| X_0 = i\right\} = 1$$

ความสัมพันธ์ของการต่อเนื่องถึงกันมีคุณสมบัติ 3 ข้อดังนี้

1. สถานะ i ต่อเนื่องถึงสถานะ i , ทุก ๆ $i \geq 0$
2. ถ้าสถานะ i ต่อเนื่องกับสถานะ j แล้ว สถานะ j ก็จะต่อเนื่องกับสถานะ i ด้วย
3. ถ้าสถานะ i ต่อเนื่องกับสถานะ j และสถานะ j ต่อเนื่องกับสถานะ k แล้วสถานะ i ต่อเนื่องกับสถานะ k ด้วย

คุณสมบัติข้อที่ 1, 2 ก็เป็นไปตามนิยามของการต่อเนื่องถึงกัน ส่วนการพิสูจน์ในข้อที่ 3 สมมติว่าให้ i ต่อเนื่องถึงกันกับ j และ j ต่อเนื่องถึงกันกับ k จะเป็นอยู่ 3 จำนวน ให้ n และ m โดย $P_{ij}^{n} > 0,\ P_{ik}^{m} > 0$ ใช้ สมการแแชพแมนโคลโมโกรอฟ จะได้ว่า

$$P_{ik}^{n+m} \quad = \quad \sum_{r=0}^{\infty} P_{ir}^{n} P_{rk}^{m} \geq P_{ij}^{n} P_{ik}^{m} > 0$$

ดังนั้นสถานะ k ก็จะได้มาจากสถานะ i ขณะเดียวกันสถานะ i ก็จะได้มาจากสถานะ k ดังนั้นสถานะ i และ k ก็จะต่อเนื่องถึงกันได้ (communicate)

2 สถานะที่ต่อเนื่องถึงกันได้จะเรียกว่าเป็นชั้นเดียวกัน (class) ผลที่ตามมาจากคุณสมบัติข้อ 1, 2 และ 3 ก็จะแบ่งสถานะออกเป็น 2 ชั้น หรือแยกต่างกันอาจจะกล่าวได้ว่า แนวคิดของการต่อเนื่องถึงกัน ก็คือการแบ่งสถานะที่เป็นไปได้ทั้งหมดออกเป็นชั้นต่าง ๆ
กระบวนการลูกโซ่มาร์คอฟจะเรียกลักษณะนี้ว่า irreducible ถ้ามีเพียงชั้นเดียว นั่นคือถ้าทุกสถานะต่อเนื่องถึงกันและกัน

ตัวอย่างที่ 2.2

พิจารณาลูกโซ่มาร์คอฟที่มีค่าคงที่ 3 สถานะ 0, 1, 2 มีเมตริกซ์การเปลี่ยนแปลงความน่าจะเป็นดังนี้

$$P \quad = \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

มันง่ายที่จะตรวจสอบว่า ลูกโซ่มาร์คอฟ เป็น irreducible หรือไม่ จากตัวอย่างนี้ มันเป็นไปได้ที่จะเริ่มต้นจากสถานะ 0 ไปสถานะ 2

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$$

นั่นคือจากสถานะ 0 ไปสถานะ 2 จะมีความน่าจะเป็นดังนี้ จากสถานะ 0 ไปสถานะ 1 ด้วยความน่าจะเป็น $\frac{1}{2}$ และจากสถานะ 1 ไปสถานะ 2 ด้วยความน่าจะเป็น $\frac{1}{4}$

ตัวอย่างที่ 2.3

พิจารณาลูกโซ่มาร์คอฟที่มีค่าคงที่ของ 4 สถานะ 0, 1,2, 3 และมีเมตริกซ์การเปลี่ยนแปลงของความน่าจะเป็นดังนี้

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ชั้นของลูกโซ่มาร์คอฟจะเป็น {0, 1} , {2} และ {3} ในขณะที่สถานะ 0 หรือ (1) เป็นค่าที่ได้มาจากสถานะ 2 การกลับกันดังนี้ จะไม่เป็นความจริง

ดังนั้นสถานะที่ 3 จะเรียกว่าเป็นสถานะดูดกลืน (absorbing State) นั่นคือ $P_{33} = 1$ ซึ่งสถานะที่ 3 นี้ ไม่สามารถที่จะเปลี่ยนเป็นสถานะอื่นได้อีก

สำหรับทุก ๆ สถานะ i จะให้ f_i เป็นความน่าจะเป็นที่เริ่มต้นจากสถานะ i กระบวนการจะทำการเข้าไปในสถานะ i ใหม่ สถานะ i จะเรียกว่าเป็น recurrent ถ้า $f_i = 1$ และ transient ถ้า $f_i < 1$

สมมติว่ากระบวนการเริ่มที่สถานะ i และวนเกิดซ้ำที่ i ดังนั้นด้วยความน่าจะเป็น 1 กระบวนการจะถูกวนกลับมาในสถานะ i ในที่สุด อย่างไรก็ตาม ตามคำจำกัดความหรือนิยามของลูกโซ่มาร์คอฟ จะกล่าวว่ากระบวนการจะเริ่มขึ้นอีกครั้ง เมื่อวนกลับไปทำที่สถานะ i ใหม่ ดังนั้นในที่สุดสถานะ i จะถูกทำอีกครั้ง

การทำซ้ำต่อเนื่องไปนาน ๆ ก็เป็นเหตุผลที่จะนำไปสู่ข้อสรุปว่า ถ้าสถานะ i เป็น recurrent แล้ว เริ่มต้นที่สถานะ i กระบวนการจะวนกลับมาที่สถานะ i อีกซ้ำแล้วซ้ำเล่าไม่มีที่สิ้นสุด

ส่วนอีกเรื่องหนึ่ง สมมติว่าถ้าสถานะเป็น transient ดังนั้นแต่ละเวลาของกระบวนการที่จะเข้าไปในสถานะ i จะมีความน่าจะเป็นเชิงบวก 1 - f_i นั่นคือจะไม่เข้าไปในสถานะนั้นอีก ดังนั้น เมื่อเริ่มต้นที่สถานะ i ความน่าจะเป็นที่กระบวนการจะอยู่ในสถานะ i เป็นช่วงเวลา n อย่างแน่นอนมีค่าเท่ากับ $f_i^{n-1}(1-f_i)$, $n \geq 1$

อาจกล่าวได้ว่า ถ้าสถานะ i เป็น transient แล้วเริ่มต้นที่สถานะ i จำนวนของช่วงเวลาที่กระบวนการจะอยู่ในสถานะ i จะมีการแจกแจงแบบเรขาคณิตด้วยค่าเฉลี่ย $1/(1 - f_i)$

จากที่กล่าวมา จะได้ว่าสถานะ i เป็น recurrent ถ้าเริ่มต้นที่สถานะ i เท่านั้น จำนวนค่าคาดหวังของช่วงเวลาที่กระบวนการอยู่ในสถานะ i จะไม่มีที่สิ้นสุด (infinite) แต่จะทำให้เกิด

$$A_n = \begin{cases} 1 \text{ ถ้า} & X_n = i \\ 0 \text{ ถ้า} & X_n \neq i \end{cases}$$

จะใช้ $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ แสดงจำนวนของช่วงเวลาที่กระบวนการอยู่ในสถานะ i

$$\text{ดังนั้น} \quad E\left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n \middle| X_0 = i\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[A_n \middle| X_0 = i\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{X_n = i \middle| X_n = i\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n$$

จะพิสูจน์ได้ตามนี้

ข้อเสนอที่ 2.1 สถานะ i เป็น

$$\text{recurrent ถ้า} \quad \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n = \infty$$

$$\text{transient ถ้า} \quad \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n < \infty$$

เหตุผลที่จะทำให้ข้อเสนอที่กล่าวมามีความสำคัญมากขึ้น ในการแสดงให้เห็นว่าสถานะ transient จะถูกวนกลับมาทำด้วยจำนวนครั้งที่นับได้ (finite) เท่านั้น ตรงนี้จะนำไปสู่การสรุปว่า สถานะที่นับได้ในลูกโซ่มาร์คอฟนั้น ไม่ได้เป็นสถานะทั้งหมดที่จะเป็น transient จะเห็นว่าสมมติให้สถานะเป็น 0, 1, ... , M และให้สถานะทั้งหมดเป็น transient ดังนั้นหลังจากเวลาที่นับได้ (T_0) สถานะที่ 0 จะไม่มีการกลับมาทำอีก และหลังจากเวลา (T_1) สถานะที่ 1 ก็จะไม่มีการกลับมาทำอีก และหลังจากเวลา (T_2) สถานะที่ 2 ก็จะไม่มีการกลับมาทำอีกไปเรื่อย ๆ ดังนั้นหลังจากเวลาที่นับได้ $T = Max\left[T_0, T_1, \ldots, T_M\right]$ จะไม่เป็นสถานะที่ถูกวนมาพบได้ แต่กระบวนการจะต้องมีบางสถานะหลังเวลา T' ที่จะมีการถูกทำซึ่งแสดงว่าอย่างน้อยที่สุด หนึ่งสถานะจะต้อง recurrent อีกประการหนึ่งที่ใช้ข้อเสนอ 2.1 ก็เพื่อจะแสดงถึงคุณสมบัติของชั้นการเกิดขึ้นซ้ำ ๆ (recurrence)

บทพิสูจน์ 2.2 ถ้าสถานะ i เป็น recurrent และสถานะ i ต่อเนื่องถึงกันกับสถานะ j ดังนั้น สถานะ j เป็น recurrent

พิสูจน์ เริ่มแรกจะพิสูจน์ว่า เมื่อสถานะ i ต่อเนื่องถึงกันกับสถานะ j จำนวนเต็มที่มีอยู่ของ k และ m จะเป็นดังนี้

$$P_{jj}^{m+n+k} \geq P_{ji}^{m} P_{ii}^{n} P_{ij}^{k}$$

ดังนั้นด้านซ้ายมือเป็นความน่าจะเป็นจาก j ไป j ในขั้นที่ $m+n+k$ ขณะที่ด้านขวามือเป็นความน่าจะเป็นจาก j ไป j ในขั้นที่ $m+n+k$ โดยผ่านจาก j ไป i ในขั้นที่ m แล้วจาก i ไป i ในขั้นที่ n แล้วจาก i ไป j ในขั้นที่ k

จากสิ่งที่ได้มา โดยใช้การรวมด้วย n จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{m+n+k} \geq P_{ji}^{m} P_{ij}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n} = \infty$$

เมื่อ $P_{ji}^{m} P_{ij}^{k} > 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n}$ เป็นค่าที่ไม่จำกัด (infinite) เมื่อสถานะ i เป็น recurrent ดังนั้นตามข้อเสนอที่ 2.1 จึงแสดงว่าสถานะ j เป็น recurrent ด้วย

ข้อสังเกต 1. บทพิสูจน์ที่ 2.2 มีความหมายว่า transience เป็นคุณสมบัติของชั้นชนิดหนึ่ง ถ้าสถานะ i เป็น transient และต่อเนื่องถึงกันกับสถานะ j แล้วสถานะ j จะต้องเป็น transient ด้วย และถ้า j เป็น recurrent แล้ว ตามบทพิสูจน์ที่ 2.2 i จะต้องเป็น recurrent ด้วย ดังนั้นจะไม่เป็น transient

2. บทพิสูจน์ที่ 2.2 จะเป็นแนวทางที่ทำให้ได้ผลลัพธ์ว่า ไม่ใช่สถานะทั้งหมดที่นับได้ในลูกโซ่มาร์คอฟ ที่จะเป็น transient ซึ่งนำไปสู่การสรุปว่าสถานะทั้งหมดที่นับได้ในลูกโซ่มาร์คอฟชนิด irreducible เป็น recurrent

ตัวอย่างที่ 2.4

ให้ลูกโซ่มาร์คอฟที่มีสถานะคงที่ 0, 1, 2, 3 มีเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จะกำหนดว่าสถานะจะเป็น transient หรือเป็น recurrent

การวิเคราะห์

เนื่องจากสถานะทั้งหมดต่อเนื่องถึงกัน และเป็นลูกโซ่ที่สามารถนับได้ ดังนั้นสถานะทั้งหมดจะต้องเป็น recurrent

ตัวอย่างที่ 2.5 พิจารณาลูกโซ่มาร์คอฟที่มีสถานะ 0, 1, 2, 3, 4 และ

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

จะกำหนดให้เป็นสถานะ transient หรือ recurrent

การวิเคราะห์ ลูกโซ่นี้จะมีชั้นที่คงที่แบ่งได้เป็น 3 ชั้น {0, 1} , {2, 3} และ {4} 2 ชั้นแรกเป็น recurrent และชั้นที่ 3 เป็น transient

2.4 ลิมิตความน่าจะเป็น(Limiting Probabilities)

ทฤษฎีที่ 2.1 สำหรับลูกโซ่มาร์คอฟที่ irreducible ergodic

$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$ มีค่าและ i เป็นอิสระแล้วจะได้ว่า

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n \quad , \quad j \geq 0$$

เมื่อ π_j มีลักษณะเฉพาะในการคำนวณคือ

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij} \quad , \quad j \geq 0 \qquad (2.3)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

ข้อสังเกต 1. ให้ $\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$ และสถานะเริ่มต้นที่ i เป็นอิสระ จะเห็นว่าค่าของ π ในสมการที่ 2.3 จะได้มาจาก $P\{X_{n+1} = j\}$ โดยเป็นเงื่อนไขของสถานะ ณ เวลา n นั่นคือ

$$\begin{aligned} P\{X_{n+1} = j\} &= \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} P\{X_n = i\} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij} P\{X_n = i\} \end{aligned}$$

ให้ $n \to \infty$ และเมื่อใส่ค่าลิมิตเข้าไป

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}\pi_i$$

2. นั่นแสดงว่า π_j เป็นลิมิตความน่าจะเป็นของกระบวนการในสถานะ j ณ เวลา n ดังนั้นจะมีค่าเท่ากับสัดส่วนระยะยาวของเวลาที่กระบวนการจะอยู่ในสถานะ j

3. ใน irreducible ที่ recurrent เกิดขึ้นแน่นอน ช่วงเวลาที่จะยังคงให้ π_j , $j \geq 0$ เป็นลักษณะเฉพาะในการคำนวณ

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}$$

$$\sum_j \pi_j = 1$$

แต่ π_j จะต้องเป็นสัดส่วนระยะยาวของเวลาของลูกโซ่มาร์คอฟที่สถานะ j

ตัวอย่างที่ 2.6

พิจารณาตัวอย่างที่ 2.1 ซึ่งสมมติว่าถ้ามีฝนตกในวันนี้ จากนั้นแล้วจะตกในวันพรุ่งนี้ ด้วยความน่าจะเป็น α ; และถ้าฝนไม่ตกในวันนี้ จากนั้นฝนจะตกในวันพรุ่งนี้ ด้วยความน่าจะเป็น β ถ้าให้ว่าสถานะที่ 0 เป็นฝนตก และให้สถานะที่ 1 เป็นฝนไม่ตก ดังนั้นโดยการใช้สมการที่ 2.3 ลิมิตความน่าจะเป็น π_0 และ π_1 จะเป็น

$$\pi_0 = \alpha\pi_0 + \beta\pi_1$$

$$\pi_1 = (1-\alpha)\pi_0 + (1-\beta)\pi_1$$

$$\pi_0 + \pi_1 = 1$$

จะได้ $\pi_0 = \dfrac{\beta}{1+\beta-\infty}$, $\pi_1 = \dfrac{1-\alpha}{1+\beta-\infty}$

ในตัวอย่างถ้า $\alpha = 0.7$ และ $\beta = 0.4$ ดังนั้นลิมิตความน่าจะเป็นที่ฝนจะตก $\pi_0 = \dfrac{4}{7} = 0.571$

ตัวอย่างที่ 2.7

พิจารณาลูกโซ่มาร์คอฟที่มีเมตริกซ์การเปลี่ยนแปลงความน่าจะเป็นของสภาวะทางด้านอารมณ์ 3 ลักษณะดังนี้ ร่าเริง, ธรรมดา และเศร้าซึม ดังนี้

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

ในระยะยาว สัดส่วนเวลาของกระบวนการนี้จะมีสถานะทั้ง 3 เป็นอย่างไร

$$\pi_0 = 0.5\pi_0 + 0.3\pi_1 + 0.2\pi_2$$

$$\pi_1 = 0.4\pi_0 + 0.4\pi_1 + 0.3\pi_2$$

$$\pi_2 = 0.1\pi_0 + 0.3\pi_1 + 0.5\pi_2$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

เมื่อแก้สมการแล้วจะได้

$$\pi_0 = 21/62 \qquad \pi_1 = 23/62 \qquad \pi_2 = 18/62$$

ตัวอย่างที่ 2.8

เป็นปัญหาที่น่าสนใจของนักสังคมศาสตร์ที่มีข้อสรุปเกี่ยวกับการจัดระดับสังคมอาชีพระดับบน หรือระดับล่าง พบว่ามีรูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่จะสมมติให้การเปลี่ยนแปลงระหว่างชั้นของสังคมเชื่อถือได้ โดยการใช้การเปลี่ยนแปลงแบบลูกโซ่มาร์คอฟ นั่นคือจะสมมติให้อาชีพของเด็กขึ้นอยู่กับครอบครัวของเขาเพียงอย่างเดียว สมมติว่าได้เมตริกซ์การเปลี่ยนแปลงแล้ว ดังนี้

$$P = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.48 & 0.07 \\ 0.05 & 0.70 & 0.25 \\ 0.01 & 0.50 & 0.49 \end{bmatrix}$$

ตามตัวอย่างสมมติว่าเด็กที่ทำงานอยู่ในระดับกลาง ก็จะได้ทำงานอาชีพระดับบนระดับกลาง หรือระดับต่ำ ด้วยความน่าจะเป็น 0.05, 0.70, 0.25

ดังนั้นลิมิตความน่าจะเป็น π_i จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 0.45\pi_0 + 0.05\pi_1 + 0.01\pi_2 \\ \pi_1 &= 0.48\pi_0 + 0.70\pi_1 + 0.50\pi_2 \\ \pi_2 &= 0.07\pi_0 + 0.25\pi_1 + 0.49\pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\pi_0 = 0.07 \qquad \pi_1 = 0.62 \qquad \pi_2 = 0.31$$

อาจจะกล่าวได้ว่า สังคมที่มีการเปลี่ยนแปลงระหว่างชั้นนั้นสามารถอธิบายได้ด้วยเมตริกซ์ความน่าจะเป็นของกระบวนการลูกโซ่มาร์คอฟ (ตามเมตริกซ์ที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น) และในระยะยาวจะมีเพียง 7 เปอร์เซ็นต์ที่จะทำงานในระดับบน 62 เปอร์เซ็นต์ จะทำงานในระดับกลาง และ 31 เปอร์เซ็นต์จะทำงานในระดับล่าง

2.5 กระบวนการแตกแขนง(Branching Process)

ในเรื่องนี้จะพิจารณาชั้นของกระบวนการลูกโซ่มาร์คอฟด้วยกระบวนการแตกแขนง (Branching Process) ซึ่งจะมีการประยุกต์อย่างมากมายหลายด้านเช่นทางด้านชีววิทยา ด้านสังคมศาสตร์ ด้านวิศวกรรมศาสตร์ และวิทยาศาสตร์

เช่น ปัญหาการเจริญเติบโตของประชากร

ให้ P_x เป็นความน่าจะเป็นในการผลิตลูกหลาน (off spring) ของแต่ละคน

ซึ่งถ้า $P_x = 0$ หมายถึงการสูญสิ้นหรือการตายของแต่ละคน

$P_x > 0$ หมายถึงการที่แต่ละคน สามารถผลิตลูกหลานได้ต่อไป

การเกิดปฏิกิริยานิวเคลียร์

สมมติว่าเราปล่อยให้รังสีนิวตรอน ไปกระทบสารนิวเคลียร์มีผลทำให้เกิดการแตกสลายของนิวเคลียร์ เนื่องจากปฏิกิริยาการปะทะกัน ซึ่งผลจากการแตกสลายของนิวเคลียร์ ก็จะทำให้เกิดนิวตรอนใหม่ ๆ ขึ้นมา ซึ่งนิวตรอนเหล่านี้เกิดไปชนหรือปะทะกันอีก ก็จะมีผลทำให้เกิดเป็นนิวตรอนใหม่ ๆ เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ

ปัญหาด้านชีววิทยา

กระบวนการสืบสกุล ซึ่งการสืบสกุลจะนับจากการมีบุตรชาย เนื่องจากเราจะถือว่าบุตรชายเป็นผู้สืบสกุล ซึ่งถ้า generation ใดไม่มีบุตรชายสำหรับสืบสกุล จะถือว่า generation นั้นสูญหายหรือหมดไป ในการผลิตลูกหลาน

พิจารณาประชากรที่ประกอบด้วยความสามารถในการที่จะผลิตของแต่ละอย่างที่ให้ผลผลิตคล้าย ๆ กัน สมมติให้แต่ละชนิดหรือแต่ละอย่างโดยชั่วชีวิตหรือเวลาการทำงานสุดท้ายมีผลผลิตเป็น j มีความน่าจะเป็นเป็น P_j , $j \geq 0$ และจำนวนผลผลิตของแต่ละอย่างต้องเป็นอิสระกัน สมมติว่า $P_j < 1$ สำหรับทุก ๆ $j \geq 0$ แต่ละจำนวนของผลผลิตที่เริ่มต้นจะให้เป็น X_0 เรียกว่าเป็นขนาดของ generation ที่ 0 ผลผลิตทั้งหมดของสถานะที่ 0 จะประกอบหรือก่อขึ้นเป็น generation ที่หนึ่ง และจำนวนของผลผลิตเหล่านี้ จะให้เป็น X_1 ลักษณะนี้ไปเรื่อย ๆ จึงให้ X_n เป็นขนาดของ generation ที่ n โดย $\{X_n , n = 0, 1, ...\}$ เป็นลูกโซ่มาร์คอฟ ที่มีสถานะที่เป็นไปได้เป็นจำนวนเต็มบวก

สังเกตได้ว่าสถานะที่ 0 จะเป็นสถานะที่เกิดขึ้นซ้ำ ๆ กัน (recurrent) จึงให้ $P_{00} = 1$ ดังนั้น ถ้า $P_0 > 0$ สถานะอื่น ๆ ทั้งหมดก็จะเป็นสถานะที่มีการเปลี่ยนแปลง (transient) จะเขียนด้วย $P_{i0} = P_0^i$ ซึ่งมีความหมายว่า เริ่มต้นด้วยสถานะ i ที่มีความน่าจะเป็นเชิงบวก P_0^i เป็นอย่างน้อย

ยิ่งไปกว่านั้นเซตของสถานะที่มีการเปลี่ยนแปลง $\{1, 2, \dots, n\}$ จะถูกทำซ้ำจนบ่อยครั้ง ซึ่งนำไปสู่บทสรุปที่สำคัญว่า ถ้า $P_0 > 0$ แล้วประชากรอาจจะหมดไปสูญไป หรืออาจมีขนาดที่ประมาณไม่ได้

ให้

$$\mu = \sum_{j=0}^{\infty} jP_j$$

เป็นค่าเฉลี่ยของผลผลิตในแต่ละอัน และให้

$$\sigma^2 = \sum_{j=0}^{\infty} (j-\mu)^2 P_j$$

เป็นความแปรปรวนของผลผลิตที่ผลิตได้ในแต่ละอัน

สมมติว่า $X_0 = 1$ เป็นค่าเริ่มต้นของแต่ละอันในปัจจุบัน จะคำนวณ $E[X_n]$ และ $Var(X_n)$ โดยอาจจะเขียนเป็น

$$X_n = \sum_{i=0}^{X_{n-1}} Z_i$$

ให้ Z_i เป็นจำนวนผลผลิตของแต่ละ i ครั้ง ณ. generation ที่ $(n$-1) ตามเงื่อนไขของ X_{n-1} จะได้ว่า

$$E[X_n] = E\left[E\left[X_n \middle| X_{n-1}\right]\right]$$

$$= E\left[E\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i \middle| X_{n-1}\right]\right]$$

$$= E\left[X_{n-1}\mu\right]$$

$$= \mu E\left[X_{n-1}\right] \qquad (2.4)$$

จะใช้ $E\left[Z_i\right] = \mu$ เนื่องจาก $E\left[X_0\right] = 1$ ในสมการที่ 2.4 จะได้ว่า

$$E\left[X_1\right] = \mu$$

$$E\left[X_2\right] = \mu E\left[X_1\right] = \mu^2$$

$$\vdots$$

$$E\left[X_n\right] = \mu E\left[X_{n-1}\right] = \mu^n$$

ในทำนองเดียวกัน $Var(X_n)$ ก็จะหาได้จากการใช้เงื่อนไขของความแปรปรวนตามสูตร

$$Var(X_n) = E\left[Var(X_n|X_{n-1})\right] + Var\left(Var\left[X_n|X_{n-1}\right]\right)$$

ให้ X_{n-1}, X_n เป็นผลรวมของตัวแปรสุ่มอิสระ X_{n-1} ซึ่งมีการแจกแจง $\{P_j\ ,\ j \geq 0\}$ ดังนั้น

$$Var\left(X_n|X_{n-1}\right) = X_{n-1}\sigma^2$$

ดังนั้นเงื่อนไขความแปรปรวนก็จะได้

$$Var(X_n) = E\left[X_{n-1}\sigma^2\right] + Var\left(X_{n-1}\mu\right)$$

$$= \sigma^2\mu^{n-1} + \mu^2 Var(X_{n-1})$$

จาก $Var(X_0) = 0$ จะทำให้ได้

$$Var(X_n) = \begin{cases} \sigma^2 \mu^{n-1}\left(\dfrac{\mu^n - 1}{\mu - 1}\right) & \text{ถ้า } \mu \neq 1 \\ n\sigma^2 & \text{ถ้า } \mu = 1 \end{cases} \qquad (2.5)$$

ให้ π_0 เป็นความน่าจะเป็นที่ประชากรมีโอกาสหมดไปสูญไป (ภายใต้ข้อสมมติว่า $X_0 = 1$)

$$\pi_0 \;=\; \lim_{n\to\infty} P\{X_n = 0 | X_0 = 1\}$$

ปัญหาในการกำหนดค่า π_0 เป็นการรวมครั้งแรก ด้วยการทำให้หมดไป เริ่มแรกจะให้ $\pi_0 = 1$ ถ้า $\mu < 1$ จะได้ดังนี้

$$m^n = E[X_n] = \sum_{j=1}^{\infty} jP_j\{X_n = j\}$$

$$\geq \sum_{j=1}^{\infty} 1 \;.\; P\{X_n = j\}$$

$$= \quad P\{X_n \geq 1\}$$

เนื่องจาก $\mu^n \to 0$ เมื่อ $\mu < 1$ จะทำให้ $P\{X_n \geq 1\} \to 0$ ดังนั้นจะได้ $P\{X_n = 0\} \to 1$ นั่นแสดงว่า $\pi_0 = 1$ เสมอเมื่อ $\mu = 1$

$\pi_0 < 1$ เมื่อ $\mu > 1$ และในการกำหนดสมการ π_0 อาจจะเป็นผลจากเงื่อนไขของจำนวนผลผลิตในสถานะเริ่มแรกเช่น

$$\pi_0 \quad = \quad P\,\{\text{ประชากรหมดไปสูญไป}\}$$

$$= \quad \sum_{j=0}^{\infty} P\,\{\text{ประชากรหมดไปสูญไป} \,|\, X_1 = j\} P_j$$

ให้ $X_1 = j$ เป็นประชากรที่มีโอกาสที่จะหมดไป ถ้าแต่ละ j เริ่มด้วยให้สมาชิกหมดไปตั้งแต่ใน generation ที่หนึ่ง เนื่องจากแต่ละ j จะถูกสมมติให้เป็นอิสระต่อกัน และความน่าจะเป็นของแต่ละ j ที่จะหมดไปเป็น π_0 ดังนั้นจะได้ว่า

$$P\,\{\text{ประชากรหมดไปสูญไป} \,|\, X_1 = j\} = \pi_o^j$$

ดังนั้น π_0 ก็จะได้

$$\pi_0 \quad = \quad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_0^j P_j \qquad (2.6)$$

เมื่อ $\mu > 1$ สามารถแสดงได้ว่า π_0 จะเป็นจำนวนบวกที่น้อยที่สุดในสมการที่ 2.6

ตัวอย่างที่ 2.9

ถ้า $P_0 = \frac{1}{2}$, $P_1 = \frac{1}{4}$, $P_2 = \frac{1}{4}$ ดังนั้นจะได้ข้อสรุป π_0 เป็นดังนี้

จาก $\mu \quad = \quad \sum_{j=0}^{2} jP_j$

$$= \quad 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} \quad = \quad \frac{3}{4}$$

ซึ่ง μ มีค่า ≤ 1 ดังนั้น $\pi_0 = 1$

ตัวอย่างที่ 2.10

ถ้า $P_0 = 1/4$, $P_1 = 1/4$, $P_2 = 1/2$ ดังนั้นจะได้ข้อสรุป π_0 เป็นดังนี้

จากสูตร $p_0 = \sum_{j=0}^{2} p_0^j P_j$

$$\pi_0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_0^2$$

$$2\pi_0^2 - 3\pi_0 + 1 = 0$$

ค่าบวกที่น้อยที่สุดในสมการนี้ จะทำให้ได้ค่า $\pi_0 = \frac{1}{2}$

ดังนั้นประชากรจะหมดไปสูญไป ถ้าแต่ละสถานะมีจำนวนสมาชิกหมดไป ตั้งแต่เริ่มต้นใน generation เริ่มแรก ซึ่งจะทำให้ได้ความน่าจะเป็น π_0^n ตามตัวอย่างที่ 2.9 จะได้ $\pi_0^n = 1$ และตัวอย่างที่ 2.10 $\pi_0^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

2.6 กระบวนการตัดสินใจมาร์คอฟ(Markov Decision Processes)

พิจารณากระบวนการที่มีค่าสังเกต ณ เวลาที่ไม่ต่อเนื่อง (discrete) ซึ่งให้เป็น M สถานะที่เป็นไปได้ และจะมีจำนวน 1, 2, ... , M หลังจากสังเกตสถานะของกระบวนการแล้ว มีการกระทำที่ต้องถูกเลือก จะให้เป็น A สมมติเป็นเซตของการกระทำที่เป็นไปได้อย่างมีจำนวนจำกัด (finite)

ถ้ากระบวนการในสถานะ i ณ เวลาที่ n และการกระทำ a เป็นตัวที่ถูกเลือกมา ดังนั้นสถานะต่อไปของระบบจะได้ข้อสรุปตามนี้ คือเป็นความน่าจะเป็นที่มีการเปลี่ยนแปลง (transition) $P_{ij}(a)$ ถ้าให้ X_n แสดงเป็นสถานะของกระบวนการ ณ เวลาที่ n และ a_n เป็นการกระทำที่ถูกเลือกที่เวลา n

ดังนั้นสถานะจะมีผลลัพธ์เป็น

$$P\left\{X_{n+1} = j \middle| X_0, a_0, X_1, a_1, ..., X_n = i, a_n = a\right\} = P_{ij}(a)$$

ความน่าจะเป็นแบบ transition ก็จะเป็นฟังก์ชันสำหรับที่จะแสดงสถานะปัจจุบันและการกระทำหรือเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นภายหลัง

ตามนโยบายหรือหลักการ เลือกเหตุการณ์หรือการกระทำที่อยู่ในสภาพที่ปกติ จะต้องควบคุมนโยบายให้เข้มงวด ด้วยรูปแบบการกระทำที่กำหนดไว้ว่าทุก ๆ เวลาจะขึ้นอยู่สถานะของกระบวนการ ณ เวลานั้น ๆ และไม่เกี่ยวข้องกับข้อมูลอื่นในสถานะและเหตุการณ์นั้น ๆ แม้ว่าจะยอมให้นโยบายเป็นแบบสุ่ม (randomized) แล้ว อาจจะต้องแนะนำให้เลือกการกระทำหรือเหตุการณ์ตามการแจกแจงของความน่าจะเป็น อาจจะกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่า นโยบาย β เป็นเซตของจำนวน $\beta = \{\beta_i(a), a \in A, i = 1, ..., M\}$ ในการอธิบายตีความว่าถ้ากระบวนการในสถานะที่ i เนื่องจากมีการกระทำหรือเหตุการณ์ a เป็นเหตุการณ์ที่ถูกเลือกและมีความน่าจะเป็น $\beta_i(a)$ ดังนั้นจะได้ว่า

$0 \le \beta_i(a) \le 1$, สำหรับทุก ๆ i , a

$\sum_a \beta_i(a) = 1$, สำหรับทุก ๆ i

ภายใต้นโยบายการกำหนด β ลำดับการเกิดของสถานะ $\{X_n, n = 0,1, ...\}$ จะเรียกว่าเป็นกระบวนการลูกโซ่มาร์คอฟ ที่มีความน่าจะเป็นเป็นแบบ transition ด้วย $P_{ij}(\beta)$

$$P_{ij}(\beta) \quad = \quad P_\beta\left\{X_{n+1} = j \middle| X_n = i\right\}$$

$$= \quad \sum_a P_{ij}(a)\beta_i(a)$$

(จะใช้ P_β เป็นสัญลักษณ์ของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข ในกรณีที่นโยบาย β ได้ถูกนำมาใช้)

จะมีค่าตามเงื่อนไขของเหตุการณ์ที่ถูกเลือกเมื่ออยู่ในสถานะ i สมมติให้ทุก ๆ ทางเลือกของนโยบาย β ซึ่งเป็นผลมาจากกระบวนการลูกโซ่มาร์คอฟ $\{X_n, n = 0,1,.....\}$ เป็น ergodic

สำหรับทุก ๆ นโยบาย β ให้ π_{ia} เป็นลิมิตของความน่าจะเป็น (หรือสเตดีเสตท Steady state) กระบวนการจะอยู่ในสถานะ i และเหตุการณ์ a จะถูกเลือกถ้านโยบาย ถูกใช้

$$\pi_{ia} = \lim_{n\to\infty} P_\beta\{X_n = i,\ a_n = a\}$$

คุณสมบัติของ $\pi = (\pi_{ia})$ ต้องเป็นดังนี้

1. $\pi_{ia} \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ i , a
2. $\sum_{i}\sum_{a}\pi_{ia} = 1$
3. $\sum_{a} p_{ja} = \sum_{i}\sum_{a}\pi_{ia}P_{ij}(a)$ สำหรับทุกค่าของ j (2.7)

สมการในข้อ 1, 2 ก็เป็นที่ชัดเจนดีอยู่แล้ว และสมการในข้อที่ 3 ซ้ายมือก็จะมีค่าเท่ากับความน่าจะเป็นที่คงรูปหรือสเตดีเสตท (Steady-state) ของสถานะ j และด้านขวามือจะมีลักษณะเหมือนกับความน่าจะเป็นที่คำนวณด้วยเงื่อนไขของสถานะและเหตุการณ์ที่ถูกเลือกมาในระยะก่อนนั้นแล้ว

ดังนั้นทุก ๆ นโยบาย β จะมีคุณสมบัติ $\pi = (\pi_{ia})$ เป็นดังนี้ ① - ③ และในการอธิบายจะตีความว่า π_{ia} มีค่าเท่ากับความน่าจะเป็นสเตดีเสตท(Steady-state) ของสถานะ i และเลือกเหตุการณ์ a เมื่อนโยบาย β ถูกใช้ นอกจากนั้น มันก็กลับกลายเป็นว่าเกิดการพลิกกลับเกิดเป็นความจริง นั่นก็คือสำหรับทุก ๆ Vector $\pi = (\pi_{ia})$ ซึ่งมาจาก ① - ③ ซึ่งมีนโยบาย β อยู่จริง ถ้า β ถูกใช้ ดังนั้นความน่าจะเป็นแบบสเตดีเสตทของสถานะ i และเลือกเหตุการณ์ a ก็จะเท่ากับ π_{ia} การตรวจสอบข้อความสุดท้าย สมมติว่า $\pi = (\pi_{ia})$ เป็น vector ซึ่งมาจาก ① - ③ ดังนั้นให้นโยบาย $\beta = (\beta_i(a))$ เป็นดังนี้

$$\beta_i(a) = P\{\beta\ chooses\ a \mid State\ is\ i\}$$

$$= \frac{\pi_{ia}}{\sum_{a}\pi_{ia}}$$

ถ้าให้ P_{ia} เป็น limiting ความน่าจะเป็นในสถานะ i และเลือกเหตุการณ์ a เมื่อนโยบาย β ถูกใช้ ต้องการแสดงให้เห็นว่า $P_{ia} = \pi_{ia}$ ดังนั้นขั้นตอนการทำ เริ่มแรกจาก { P_{ia} , $i = 1, \dots, M$, $a \in A$ } เป็น limiting ความน่าจะเป็นของ 2 มิติในกระบวนการลูกโซ่มาร์คอฟ $\{(X_n , a_n), n \geq 0\}$

ดังนั้นจากทฤษฎี 4.1 เบื้องต้น การคำนวณเป็นลักษณะเฉพาะดังนี้

(1′) $P_{ia} \geq 0$

(2′) $\sum_i \sum_a P_{ia} = 1$

(3′) $P_{ja} = \sum_i \sum_{a'} P_{ia'} P_{ij}(a') \beta_j(a)$

(3′) มีค่าตามนี้

$$P\left\{X_{n+1} = j , a_{n+1} = a \,\middle|\, X_n = i , a_n = a'\right\} = P_{ij}(a')\beta_j(a)$$

นั่นคือ $$\beta_i(a) = \frac{\pi_{ja}}{\sum_a \pi_{ja}}$$

จะเห็นว่า (P_{ia})เป็น การคำนวณลักษณะโดยเฉพาะของ

$$P_{ia} \geq 0 ,$$

$$\sum_i \sum_a P_{ia} = 1 ,$$

$$P_{ja} = \sum_i \sum_{a'} P_{ia'} P_{ij}(a') \frac{\pi_{ja}}{\sum_a \pi_{ja}}$$

ดังนั้นจะแสดงว่า $P_{ia} = \pi_{ia}$ นั่นคือ

$$\pi_{ia} \geq 0,$$

$$\sum_i \sum_a \pi_{ia} = 1,$$

$$\pi_{ja} = \sum_i \sum_{a'} \pi_{ia'} P_{ij}(a') \frac{\pi_{ja}}{\sum_a \pi_{ja}}$$

จุดสูงสุดของ 2 สมการจาก (1) และ (2) ในสมการที่ (2.7) และในขั้นที่ 3 จะมีผลเท่ากันกับ

$$\sum_a \pi_{ja} = \sum_i \sum_{a'} \pi_{ia'} P_{ij}(a')$$

จากเงื่อนไข (3) ของสมการที่ 2.7

จากนี้จะแสดงให้เห็นว่า Vector $\pi = (\pi_{ia})$ จะเป็นไปตาม (1) , (2) และ (3) ของสมการ 2.7 ถ้านโยบาย β มีอยู่จริงและ π_{ia} มีค่าเท่ากับความน่าจะเป็นแบบสเตดีเสตท (Steady-State) ของสถานะ i และเลือกเหตุการณ์ a เมื่อ β ถูกใช้ ตามความเป็นจริง นโยบาย β จะถูกกำหนดให้เป็น

$$\beta_i(a) = \frac{\pi_{ia}}{\sum_a \pi_{ia}}$$

ความสำคัญจากที่กล่าวมาทั้งหมดก็จะสรุปได้ว่าเป็นนโยบายที่ดีที่สุด สำหรับตัวอย่างนี้สมมติว่าผลตอบแทนที่หามาได้ $R(i, a)$ ไม่ว่าเมื่อใดเหตุการณ์ a ถูกเลือกใช้ในสถานะ i จาก $R(X_i, a_i)$ จะแสดงให้เห็นว่าผลตอบแทนที่หามาได้ในเวลา i ค่าคาดหวังเฉลี่ยของผลตอบแทนต่อเวลาภายใต้นโยบาย β สามารถหาได้จาก

$$\beta = \lim_{n\to\infty} E_\beta\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} R(X_i,a_i)}{n}\right]$$

ถ้า π_{ia} เป็นความน่าจะเป็นแบบสเตดีเสตท (Steady-State) ของสถานะ i และเลือกเหตุการณ์ a จะเห็นว่า limiting ค่าคาดหวังของผลตอบแทนที่เวลา n จะเท่ากับ

$$\lim_{n\to\infty} E\left[R(X_n,a_n)\right] = \sum_i \sum_a \pi_{ia} R(i,a)$$

และจะอธิบายได้ว่า

ค่าคาดหวังเฉลี่ยของผลตอบแทนภายใต้ $\beta = \sum_i \sum_a \pi_{ia} R(i,a)$

ดังนั้นข้อสรุปของปัญหานโยบาย คือ ค่าคาดหวังเฉลี่ยสูงสุดของผลตอบแทนจะเป็น

$$\underset{\pi = (\pi_{ia})}{Maximize} \sum_i \sum_a \pi_{ia} R(i,a)$$

ภายใต้ข้อกำหนด $\pi_{ia} \geq 0$, สำหรับทุก ๆ i ,a

$$\begin{aligned} &\sum_i \sum_a \pi_{ia} = 1, \\ &\sum_a \pi_{ja} = \sum_i \sum_a \pi_{ia} P_{ij}(a)\text{, สำหรับทุก ๆ } j \end{aligned} \qquad (2.8)$$

อย่างไรก็ตาม ปัญหาการหาค่าสูงสุดดังที่กล่าวมาเป็นเรื่องพิเศษในความรู้เรื่อง linear program และสามารถแก้ปัญหาโดยวิธี Simplex algorithm ถ้า $\pi^* = (\pi^*_{ia})$ เมื่อนโยบายที่ดีที่สุดจะให้เป็น β^*

$$\beta_i^*(a) = \frac{\pi_{ia}^*}{\sum_a \pi_{ia}^*}$$

ข้อสังเกต 1. สามารถแสดงได้ว่า π^* เป็นสมการที่ให้ค่าสูงสุดตามสมการ (2.8) มีคุณสมบัติว่า สำหรับแต่ละ i π^*_{ia} เป็นศูนย์หมดทุกตัว แต่มี a หนึ่งค่าซึ่งสามารถอธิบาย (ให้ความหมายว่า) เป็นนโยบายที่ดีที่สุด ที่ไม่ได้มาจากการสุ่ม (nonrandomized) นั่นคือเหตุการณ์ที่อ้างถึงเมื่ออยู่ในสถานะ i จะถูกกำหนดโดยฟังก์ชันของ i

2. สูตรโปรแกรมเชิงเส้น linear Programming จะใช้งานเมื่อมีการจำกัดสถานที่ชนิดชั้นของนโยบาย ตัวอย่างสมมติว่ามีการจำกัดเวลาเป็นส่วน ๆ ในการใช้ในสถานะ ให้เป็นสถานะ 1 สมมติว่าจะพิจารณาเฉพาะนโยบายที่มีคุณสมบัติว่า มีผลลัพธ์ในกระบวนการสถานะที่ 1 น้อยกว่า 100α เปอร์เซ็นต์ของเวลา ในการกำหนดนโยบายที่ดีที่สุดที่เราต้องการ เราจะใช้ปัญหา linear programming เป็นการบังคับเพิ่มเติม $\sum_a \pi_{1a} \le \alpha$

ดังนั้น $\sum_a \pi_{1a}$ จะแสดงให้เห็นถึงสัดส่วนของเวลาในกระบวนการของสถานะที่ 1

2.7 การแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล(The Exponential Distribution)

นิยามที่ 2.4

ตัวแปรสุ่มอย่างต่อเนื่อง X จะมีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล ด้วยพารามิเตอร์ λ , $\lambda > 0$ ถ้า probability density function ; pdf. เป็น

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; \quad x \ge 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

หรือจะมีผลเท่ากัน ถ้ามี cdf เป็น

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & ; \quad x \ge 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

ค่าเฉลี่ยของการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล, $E[X]$ เป็น

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \\
&= \int_{0}^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx
\end{aligned}
$$

อินทิเกรต by parts ($u = x, dv = \lambda e^{-\lambda x} dx$) จะได้

$$
E[X] = -Xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}
$$

The moment generating function $\phi(t)$ ของการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล จะเป็น

$$
\begin{aligned}
\phi(t) &= E\left[e^{tx}\right] \\
&= \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad \text{สำหรับ } t < \lambda \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

สำหรับ moment ทั้งหมดของ X สามารถหาได้จากการหาอนุพันธ์ในสมการ 2.9 เช่นตัวอย่าง

$$
\begin{aligned}
E\left[X^2\right] &= \frac{d^2}{dt^2}\phi(t)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{2}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

ดังนั้นจากที่ผ่านมา ทำให้ได้ว่า

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}$$

2.7.1 คุณสมบัติของการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล

ตัวแปรสุ่ม X ปราศจากความจำ (Memoryless)

ถ้า $P\{X > s+t | X > t\} = P\{X > s\}$ สำหรับทุก ๆ s , $t \geq 0$ (2.10)

ถ้าคิดว่า X เป็นระยะเวลาการใช้งานของเครื่องมือ ตามสมการ 2.10 ความน่าจะเป็นที่เครื่องมือจะยังมีอยู่สำหรับเวลาอย่างน้อย $s+t$ ชั่วโมง ให้ว่ามีเวลาอยู่ได้ t ชั่วโมง เป็นเหมือนความน่าจะเป็นเริ่มต้น และยังอยู่อย่างน้อย s ชั่วโมง อาจจะพูดได้ว่า ถ้าเครื่องมือที่มีอยู่ในเวลา t แล้วการแจกแจงของจำนวนเวลาที่ยังเหลืออยู่จะเป็นการอยู่รอด เหมือนกับการแจกแจงเริ่มแรกของชั่วชีวิต นั่นคือ เครื่องมือที่ปราศจากความจำเวลาที่ใช้ไปแล้ว ในเวลา t

$$\frac{P\{X > s+t,\ X > t\}}{P\{X > t\}} = P\{X > s\}$$

หรือ

$$P\{X > s+t\} = P\{X > s\}P\{X > t\} \qquad (2.11)$$

ดังนั้นสมการ (2.11) จะเป็นไปตามนั้น เมื่อ X มีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล(สำหรับ $e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s}e^{-\lambda t}$) มันก็จะเป็นไปตามการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล ตัวแปรสุ่มปราศจากความจำ (memoryless)

ตัวอย่าง 2.11

สมมติว่าระยะเวลาที่ลูกค้าใช้บริการในธนาคารมีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล ด้วยค่าเฉลี่ยเป็น 10 นาที จะได้ว่า $\lambda = \frac{1}{10}$ ต้องการทราบว่าความน่าจะเป็นที่ลูกค้าจะใช้เวลามากกว่า 15 นาที ในธนาคารเป็นเท่าไร และอยากทราบว่าความน่าจะเป็นที่ลูกค้าจะใช้เวลามากกว่า 15 นาที ในธนาคารโดยให้พวกเขายังคงอยู่ในธนาคารหลังจาก 10 นาที

การวิเคราะห์ ถ้า X เป็นระยะเวลาที่ลูกค้าใช้เวลาในธนาคารแล้วความน่าจะเป็นค่าแรก จะได้

$$P\{X > 15\} = e^{-15\lambda} = e^{-3/2} \approx 0.220$$

สำหรับคำถามที่ 2 หาความน่าจะเป็นที่ลูกค้าที่ใช้เวลา 10 นาที ในธนาคารจะใช้อย่างน้อย 5 นาที อย่างไรก็ตาม เมื่อการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล ไม่ได้ปราศจากความจำ ลูกค้าที่ใช้เวลา 10 นาที ในธนาคารแล้ว จะต้องเท่ากับความน่าจะเป็นที่ลูกค้าจะเข้ามาใช้เวลาอย่างน้อย 5 นาที ในธนาคาร ดังนั้นความน่าจะเป็นที่จะได้

$$P\{X > 5\} = e^{-5\lambda} = e^{-1/2} \approx 0.604$$

ตัวอย่าง 2.12

พิจารณาในที่ทำการไปรษณีย์ ซึ่งมีเสมียนเป็นชาย 2 คน สมมติว่า เมื่อ Mr.Smith เข้ามาในระบบเข้าก็พบว่า Mr. Jones กำลังบริการอยู่กับลูกค้าคนหนึ่ง ส่วน Mr. Brown ก็ให้บริการกับอีกคนหนึ่ง สมมติว่า Mr. Smith บอก ว่าการให้บริการของเขาจะทำในไม่ช้านี้ โดยที่ไม่ใช่ Mr. Jones หรือ Mr. Brown ต้องเสร็จจากการบริการ ถ้าระยะเวลาที่เสมียนใช้กับลูกค้ามีการแจกแจงแบบเอกซ์โป-เนนเชียล ด้วยค่าเฉลี่ย เป็น $\frac{1}{\lambda}$ อยากทราบว่าความน่าจะเป็นของลูกค้า 3 คน เมื่อ Mr. Smith จะออกจากที่ทำการไปรษณีย์เป็นคนสุดท้ายเป็นเท่าไร

การวิเคราะห์ คำตอบที่จะได้ก็มาจากเหตุผลที่ว่า จะพิจารณาเวลาที่ซึ่ง Mr. Smith หาเสมียนที่ว่างคนแรก จุดสำคัญไม่ว่า Mr. Jones หรือ Mr.Brown จะเสร็จจากการบริการคนหนึ่ง ก็ต้องเหลืออีกคนหนึ่ง แม้ว่าความจำที่ขาดไปของเอกซ์โปเนนเชียล ที่ว่าจำนวนเวลาของชายอีกคนหนึ่ง (ไม่ว่าจะเป็น Jones หรือ Brown) จะยังคงถูกใช้ในที่ทำการไปรษณีย์ด้วยการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล มี ค่าเฉลี่ย $\frac{1}{\lambda}$ ก็เหมือนกับว่า ถ้าเขาเริ่มให้บริการของเขา ดังนั้นในทำนองเดียวกัน ความน่าจะเป็นที่จะเสร็จจากการบริการก่อนที่จะบริการ Smith จะต้องเท่ากับ $\frac{1}{2}$

ดังนั้นการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียลเท่านั้นที่มีคุณสมบัติปราศจากความจำ (memoryless) นี้ จะเห็นว่า ถ้า X เป็น memoryless และให้ $\overline{F}(x) = P\{X > x\}$ แล้ว สมการที่ 2.11 จะได้ว่า

$$\overline{F}(s+t) = \overline{F}(s)\overline{F}(t)$$

นั่นคือ $\overline{F}(x)$ จะมีสมการฟังก์ชั่นเป็น $g(s+t) = g(s)g(t)$
แม้ว่ามันจะกลายเป็นว่า การแก้สมการฟังก์ชันเป็นไปต่อเนื่องด้านขวา (ด้านบวก)

$$g(x) = e^{-\lambda x}$$

จะพิสูจน์ว่า ถ้า $g(s+t) = g(s)g(t)$ แล้ว

$$g\left(\frac{2}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right) = g^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

และจะได้ว่า $g(\frac{m}{n}) = g^m(\frac{1}{n})$ ด้วย ดังนั้น

$$g(1) = g\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = g^n\left(\frac{1}{n}\right) \text{ หรือ } g\left(\frac{1}{n}\right) = (g(1))^{1/n}$$

ดังนั้น $g(m/n) = (g(1))^{m/n}$ นั่นหมายถึง ให้ g ต่อเนื่องไปทางบวก ให้ $g(x) = (g(1))^x$

ถ้า g(1) = $\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \geq 0$ จะได้ว่า $g(x) = e^{-\lambda x}$ เมื่อ $\lambda = -\log(g((1))$

และเมื่อฟังก์ชันการแจกแจงนี้เป็นแบบต่อเนื่องไปทางบวก เราจะได้ว่า

$$\overline{F}(x) = e^{-\lambda x}$$

หรือ

$$F(x) = P\{X \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x}$$

ซึ่งเป็นการแสดงให้เห็นว่า X มีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล

2.7.2 คุณสมบัติต่อไปของการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล

ให้ $X_1, \ldots, X_1$ เป็นอิสระจากกัน และแต่ละตัวมีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล ตัวแปรสุ่มมีค่าเฉลี่ยเป็น $\frac{1}{\lambda}$ ให้ $X_1 + \ldots + X_n$ มีการแจกแจงแบบแกมมา มีพารามิเตอร์ n และ λ การพิสูจน์ผลลัพธ์ขั้นที่ 2 โดยใช้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และไม่มีการพิสูจน์เลย เมื่อ $n = 1$ ให้เริ่มโดยสมมติว่า $X_1 + \ldots + X_{n-1}$ มีความหนาแน่น (density) ดังนี้

$$f_{X_1+\ldots+X_{n-1}}(t) = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-2}}{(n-2)!}$$

ดังนั้น $$f_{X_1+\ldots+X_{n+1}+X_n}(t) = \int_0^{\infty} f_{X_n}(t-s) f_{X_1+\ldots+X_{n-1}}(s)ds$$

$$= \int_0^{t} \lambda e^{-\lambda(t-s)} \lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{n-2}}{(n-2)!}ds$$

$$= \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

ประโยชน์ของการคำนวณอีกอันหนึ่งก็คือ จะได้ข้อสรุปความน่าจะเป็นว่าตัวแปรสุ่มแบบเอกซ์โปเนนเชียลตัวหนึ่งจะมีค่าน้อย หรือต่ำกว่าตัวอื่น ๆ นั่นคือ สมมติว่า X_1 และ X_2 เป็นตัวแปรสุ่มเอกซ์โปเนนเชียลแบบเป็นอิสระด้วยค่าเฉลี่ยแต่ละอัน $\frac{1}{\lambda_1}$ และ $\frac{1}{\lambda_2}$ ถ้าต้องการทราบ $P\{X_1 < X_2\}$ เป็นเท่าไร ความน่าจะเป็นนี้สามารถคำนวณด้วยเงื่อนไขของ X_2

$$
\begin{aligned}
P\{X_1 < X_2\} &= \int_0^\infty P\{X_1 < X_2 \mid X_2 = x\}\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}dx \\
&= \int_0^\infty P\{X_1 < x\}\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}dx \\
&= \int_0^\infty (1-e^{-\lambda_1 x})\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}dx \\
&= \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}dx - \lambda_2\int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}dx \\
&= 1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 2.13

สมมติว่าสเตอริโอเครื่องหนึ่งมีระบบเป็น 2 ส่วนหลักคือ วิทยุ และลำโพง ถ้าอายุการใช้งานของวิทยุมีการแจกแจงเป็นเอกซ์โปเนนเชียล ด้วยค่าเฉลี่ย 1000 ชั่วโมง และอายุการใช้งานลำโพงมีการแจกแจงเป็นเอกซ์โปเนนเชียล ด้วยค่าเฉลี่ย 500 ชั่วโมง และยังเป็นอิสระกับการใช้งานของวิทยุ ดังนั้นต้องการทราบความน่าจะเป็นที่ระบบจะใช้การไม่ได้ (เมื่อมันเกิดขึ้น) โดยที่วิทยุใช้การไม่ได้

การวิเคราะห์ จากสมการที่ 2.12 (ด้วย $\lambda_1 = \frac{1}{1000},\ \lambda_2 = \frac{1}{500}$) จะได้คำตอบว่า

$$\frac{1/1000}{1/1000+1/500} = \frac{1}{3}$$

2.8 กระบวนการปัวซอง(The Poisson Process)

2.8.1 กระบวนการที่นับได้(Counting Processes)

กระบวนการสโตแคสติก (Stochastic process) $\{N(t), t \geq 0\}$ เรียกว่า กระบวนการที่นับได้ ถ้า $N(t)$ เป็นผลรวมของจำนวน "เหตุการณ์" ที่จะเกิดขึ้นในเวลา t

ตัวอย่างเกี่ยวกับกระบวนการที่นับได้ (Counting processes)

a) ถ้าให้ $N(t)$ มีค่าเท่ากับจำนวนของคนที่เข้ามาร้านหรือก่อนเวลา t ดังนั้น $\{N(t), t \geq 0\}$ เป็นกระบวนการที่นับได้ ซึ่งมีเหตุการณ์ที่สอดคล้องกันกับคนที่เข้ามาในร้าน

ข้อสังเกต ถ้าให้ N(t) เท่ากับจำนวนคนที่อยู่ในร้าน ณ เวลา t ดังนั้น $\{N(t), t \geq 0\}$ จะไม่เป็นกระบวนการที่นับได้

b) ถ้าให้ว่าเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นเป็นเด็กแต่ละคนเกิด ดังนั้น $\{N(t), t \geq 0\}$ จะเป็นกระบวนการที่นับได้ เมื่อ $N(t)$ เท่ากับจำนวนคนทั้งหมดที่จะเกิดในเวลา t (แต่ $N(t)$ จะรวมคนที่ตายในเวลา t

c) ถ้า $N(t)$ เท่ากับจำนวนประตูที่นักฟุตบอลจะทำคะแนนได้ได้คะแนนในเวลา t ดังนั้น $\{N(t), t \geq 0\}$ จะเป็นกระบวนการที่นับได้ เหตุการณ์ในกระบวนการนี้จะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อ นักฟุตบอลได้ประตู

จากความหมายของกระบวนการที่นับได้ $N(t)$ จะต้องเป็นตามนี้

1) $N(t) \geq 0$

2) $N(t)$ มีค่าเป็นจำนวนเต็ม

3) ถ้า $s < t$ ดังนั้น $N(s) \leq N(t)$

4) สำหรับ $s < t$, $N(t)$ - $N(s)$ จะเท่ากับจำนวนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในช่วงของ (s, t)

กล่าวได้ว่ากระบวนการที่นับได้เป็นการเพิ่มขึ้นอย่างเป็นอิสระ(independent increments) ถ้าจำนวนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นที่แบ่งเป็นช่วงเวลานั้นเป็นอิสระกัน ตัวอย่างเช่น
จำนวนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในเวลา 10 (นั่นคือ $N(10)$ จะต้องเป็นอิสระกับจำนวนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นระหว่างเวลา 10 และ 15 (นั่นคือ $N(15)$ - $N(10)$)

ข้อสมมติของการเพิ่มขึ้นอย่างเป็นอิสระจะต้องเป็นเหตุผลของตัวอย่างที่ a แต่มันน่าจะเป็นไปได้ที่จะไม่เป็นเหตุผลของข้อ b เหตุผลข้อนี้ถ้าเป็นตัวอย่าง b $N(t)$ จะต้องใหญ่มาก ดังนั้นมันน่าจะเป็นไปได้ว่ามีคนมากที่มีชีวิตอยู่ที่เวลา t ส่วนนี้จะทำให้เชื่อว่าจำนวนของคนเกิดใหม่ระหว่างเวลา t และเวลา $t+s$ มีแนวโน้มที่ใหญ่ (มาก) (นั่นคือ มันไม่น่าจะเป็นเหตุผลที่ $N(t)$ จะเป็นอิสระกับ $N(t+s)-N(t)$ และดังนั้น $\{N(t), t \geq 0\}$ จะไม่เป็นการเพิ่มขึ้นอย่างเป็นอิสระในตัวอย่าง b ข้อสมมติของการเพิ่มขึ้นอย่างเป็นอิสระในตัวอย่าง c จะถูกต้องถ้าเชื่อว่านักฟุตบอลเล่นได้ประตูโดยบังเอิญในวันนี้ ซึ่งไม่ขึ้นอยู่กับว่าเขาจะเล่นอย่างไร มันจะไม่ใช่เรื่องของความเชื่อและเรื่องดวง

กล่าวได้ว่ากระบวนการที่นับได้เป็นการเพิ่มขึ้นอย่างคงที่(stationary increments) ถ้าการแจกแจงจำนวนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นเป็นช่วงเวลาที่ขึ้นอยู่กับความยาวของช่วงเวลา อาจจะพูดได้ว่าขบวนการมีการเพิ่มขึ้นอย่างคงที่ ถ้าจำนวนเหตุการณ์ในช่วง (t_1+s, t_2+s) นั่นคือ
$N(t_2+s)-N(t_1+s)$ มีการแจกแจงเหมือนกับจำนวนเหตุการณ์ในช่วง (t_1, t_2) และ
$N(t_2)+N(t_1)$ สำหรับทุก ๆ $t_1 < t_2$ และ $s > 0$

ข้อสมมติของการเพิ่มขึ้นอย่างคงที่จะเป็นเหตุผลเดียวของตัวอย่าง a ถ้าไม่มีช่วงเวลาของวันที่มีคนชอบเข้ามาในร้าน

ตัวอย่างเช่น ถ้ามีชั่วโมงเร่งด่วน (ระหว่างเที่ยงถึงบ่ายโมง) ของแต่ละวัน ดังนั้นข้อสมมติของการคงที่ (Stationarity) จะไม่ถูกต้อง ถ้าเชื่อว่าข้อมูลพื้นฐานของประชากรโลกมีค่าคงที่ (ซึ่งมันน่าจะเป็นไปไม่ได้ในทางวิทยาศาสตร์) ดังนั้นข้อสมมติของการเพิ่มขึ้นอย่างคงที่จะต้องเป็นเหตุผลของตัวอย่าง b การเพิ่มขึ้นอย่างคงที่จะไม่เหมือนข้อสมมติของเหตุผลในตัวอย่าง c สำหรับบางสิ่งบางอย่างคนส่วนมากจะเห็นด้วยว่า นักฟุตบอลขณะอายุ (25-30 ปี) จะทำคะแนนประตูได้มากกว่าอายุ (35-40 ปี)

2.8.2 คำจำกัดความของกระบวนการปัวซอง

สิ่งหนึ่งที่สำคัญที่สุดของกระบวนการที่นับได้ คือ กระบวนการปัวซอง มีคำนิยามดังนี้

นิยามที่ 2.5

กระบวนการที่นับได้ $\{N(t), t \geq 0\}$ คือ กระบวนการปัวซอง ที่มีอัตรา λ , $\lambda > 0$ ถ้า

1. $N(0) = 0$
2. ขบวนการมีการเพิ่มขึ้นอย่างเป็นอิสระ และ
3. จำนวนเหตุการณ์ในช่วงความยาว t มีการแจกแจงแบบปัวซอง ด้วยค่าเฉลี่ย $\lambda\, t$ สำหรับ $s, t \geq 0$

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \ n = 0, 1, \ldots$$

หมายเหตุ กระบวนการปัวซอง จะมีการเพิ่มขึ้นอย่างคงที่ ตามเงื่อนไขที่ 3 และจะได้ว่า

$$E[N(t)] = \lambda\, t$$

ซึ่งอธิบายได้ว่าทำไม จึงเรียกว่าเป็นอัตรา (rate) ของกระบวนการ
จะได้ข้อสรุปถ้ากระบวนการที่นับได้เกิดขึ้นจริง กระบวนการปัวซองจะต้องกำหนดให้มีเงื่อนไข 1, 2 และ 3 เงื่อนไขที่ 1 เป็นขั้นต้นซึ่งกล่าวว่าจำนวนของเหตุการณ์เริ่มต้นที่เวลา $t = 0$ และเงื่อนไขที่ 2 สามารถที่จะตรวจสอบได้โดยตรงจากความรู้ความเข้าใจในเรื่องของกระบวนการ แม้ว่ามันอาจไม่ชัดเจนทั้งหมด แต่ก็สามารถได้ข้อสรุปว่าเงื่อนไขข้อที่ 3 เป็นจริง และสำหรับเหตุผลที่ให้นิยามของ กระบวนการปัวซองก็เพื่อจะได้ใช้เป็นประโยชน์ต่อไป

จากที่กล่าวมาจะทำให้ได้นิยามที่ 2 ของกระบวนการปัวซองซึ่งจะกำหนดแนวคิดของฟังก์ชัน $f(\cdot)$ เป็น $o(h)$

นิยามที่ 2.6 ฟังก์ชัน $f(\cdot)$ จะเป็น $o(h)$ ถ้า

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} \;=\; 0$$

ตัวอย่างที่ 2.14

1. ฟังก์ชัน $f(x)=x^2$ เป็น $o(h)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} h \;=\; 0$$

2. ฟังก์ชัน $f(x)= x$ ไม่ได้เป็น $o(h)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} 1 \;=\; 1\neq 0$$

3. ถ้า $f(\cdot)$ เป็น $o(h)$ และ $g(\cdot)$ เป็น $o(h)$ ดังนั้น $f(\cdot)+g(\cdot)$ จะเป็นดังนี้

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+g(h)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h} \;=\; 0+0 \;=\; 0$$

4. ถ้า $f(\cdot)$ เป็น $o(h)$ ดังนั้น $g(\cdot)=cf(\cdot)$ เป็นดังนี้

$$\lim_{h\to 0}\frac{cf(h)}{h} \;=\; c\lim\frac{f(h)}{h} \;=\; c\cdot 0 \;=\; 0$$

5. จาก (3) และ (4) นำเอาฟังก์ชันมารวมกันเป็นเชิงเส้นตรงอย่างมีขีดจำกัด ซึ่งแต่ละ $o(h)$ เป็น $o(h)$

ถ้า ฟังก์ชัน $f(\cdot)$ เป็น $o(h)$ แล้ว $f(h)/h$ จะเข้าใกล้ 0 เมื่อ h เข้าสู่ 0

นิยามที่ 2.7 กระบวนการที่นับได้ $\{N(t), t \geq 0\}$ เป็นกระบวนการปัวซองที่มีอัตรา $\lambda, \lambda > 0$ ถ้า

1. $N(0) = 0$
2. กระบวนการจะมีการคงที่ และการเพิ่มขึ้นอย่างเป็นอิสระ
3. $P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$
4. $P\{N(h) \geq 2\} = o(h)$

ทฤษฎีที่ 2.2 เท่ากับนิยาม 2.5 และ 2.7 รวมกัน

พิสูจน์ จะแสดงให้เห็นว่านิยาม 2.7 มีความหมายเดียวกับ 2.5 ดังนี้

$$P_n(t) = P\{N(t) = n\}$$

สำหรับ $P_0(t)$ จะได้จากการหาอนุพันธ์ สมการ

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= P\{N(t+h) = 0\} \\ &= P\{N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0\} \\ &= P\{N(t) = 0\} P\{N(t+h) - N(t) = 0\} \\ &= P_0(t)\left[1 - \lambda h + o(h)\right] \end{aligned}$$

ในที่สุดจะมี 2 สมการจากข้อสมมติที่ 2 รวมกับค่าความจริงของข้อสมมติที่ 3 และ 4 จะมีความหมายว่า $P\{N(h) = 0\} = 1 - \lambda h + o(h)$ ดังนั้น

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + \frac{0(h)}{h}$$

ให้ $h \longrightarrow 0$ จะได้

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$$

หรือ

$$\frac{P_0'(t)}{P_0(t)} = -\lambda$$

โดยการ integrate จะได้ว่า

$$\log P_0(t) = -\lambda t + c$$

หรือ

$$P_0(t) = K e^{-\lambda t}$$

ดังนั้น $P_0(0) = P\{N(0) = 0\} = 1$ ถึงจะได้ว่า

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \tag{2.13}$$

โดยทำนองเดียวกับ สำหรับ n > 0

$$\begin{aligned} P_n(t+h) &= P\{N(t+h) = n\} \\ &= P\{N(t) = n, N(t+h) - N(t) = 0\} + P\{N(t) = n-1, N(t+h) - N(t) = 1\} \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n} P\{N(t) = n-k, N(t+h) - N(t) = k\} \end{aligned}$$

จากข้อสมมติที่ 4 เทอมสุดท้ายที่ได้มาก่อนนั้นเป็น $o(h)$ ดังนั้นโดยการใช้ข้อสมมติที่ 2 จะได้

$$\begin{aligned} P_n(t+h) &= P_n(t)P_0(h) + P_{n-1}(t)P_1(h) + o(h) \\ &= (1-\lambda h)P_n(t) + \lambda h P_{n-1}(t) + o(h) \end{aligned}$$

ดังนั้น $$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{0(h)}{h}$$

ให้ $h \rightarrow 0$ ผลที่จะได้

$$P_n^{'}(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

หรือมีค่าเท่ากับ $e^{\lambda t}\left[P_n^{'}(t) + \lambda P_n(t)\right] = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t)$

ดังนั้น $\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} P_n(t)) = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t)$ (2.14)

ด้วยสมการ 2.13 จะมี

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} P_1(t)) = \lambda$$

หรือ

$$P_1(t) = (\lambda t + c)e^{-\lambda t}$$

ซึ่ง $P_1(0) = 0$ ผลที่ได้

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

แสดงให้เห็นว่า $P_n(t) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^n / n!$ เราใช้การพิสูจน์โดยทางคณิตศาสตร์ และด้วยข้อสมมติข้อแรกสำหรับ n - 1 ด้วยสมการ (2.14)

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} P_n(t)) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}$$

หรือ

$$e^{\lambda t} P_n(t) = \frac{(\lambda t)}{n!} + c$$

ซึ่งจะอธิบายผลลัพธ์ ($P_n(0) = 0$) การพิสูจน์นี้นิยาม 2.7 จะอธิบายนิยาม 2.5 ได้

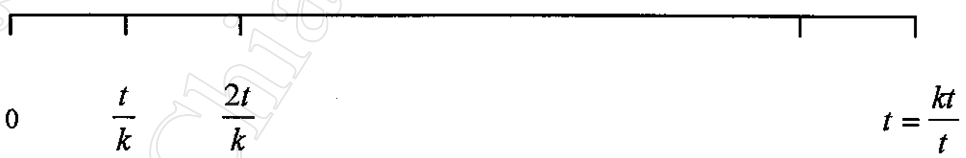
ข้อสังเกต

1)ผลลัพธ์ของ $N(t)$ มีการแจกแจงแบบปัวซองซึ่งเป็นผลลัพธ์ของการประมาณแบบปัวซองไปเป็นการแจกแจงแบบทวินาม จะเห็นว่าการแบ่งช่วงย่อย $[0,t]$ จะเป็น k ส่วนเท่า ๆ กัน โดย k จะมีค่ามากตามรูปที่ 2.1 ขณะนี้แสดงให้เห็นว่าการใช้ข้อความจริงที่ไม่ต้องพิสูจน์ข้อ 4 ของนิยามที่ 2.7 ว่า k จะเพิ่มไปเรื่อยจนไปถึง ∞ ความน่าจะเป็นของการมี 2 เหตุการณ์ หรือมากกว่านั้นในทุกค่าของช่วง k จะเข้าสู่ 0 ดังนั้น $N(t)$ (ด้วยความน่าจะเป็นเข้าสู่ 1) จะเท่ากับจำนวนของแต่ละช่วงของเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้น แม้ว่าจะโดยการคงที่และการเพิ่มขึ้นอย่างเป็นอิสระ จำนวนนี้จะมีการแจกแจงแบบทวินาม ด้วยค่าพารามิเตอร์ k และ $P = \lambda t / k + o(t / k)$ ดังนั้น โดยการประมาณแบบปัวซองให้เป็นแบบทวินาม จะให้ k มีค่าเข้าใกล้ ∞ $N(t)$ จะมีการแจกแจงเป็นแบบปัวซองด้วยค่าเฉลี่ย เท่ากับ

$$\lim_{k\to 0} k\left[\lambda \frac{t}{k} + o\left(\frac{t}{k}\right)\right] = \lambda t + \lim_{k\to\infty} \frac{to(t/k)}{t/k}$$

$$= \lambda t$$

โดยการใช้คำนิยามของ $o(h)$ และความจริงที่ว่า $t / k \to 0$ เมื่อ $t \to \infty$



รูปที่ 2.1

2) ข้อสมมติที่ชัดเจนแน่นอนว่ากระบวนการมีการเพิ่มขึ้นอย่างคงที่จะถูกขจัดไปจากนิยาม 2.7 ภายใต้เงื่อนไขว่า เปลี่ยนข้อสมมติข้อ 3 และข้อ 4 เพื่อต้องการว่าสำหรับทุก ๆ t ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ในช่วง $(t, t+h)$ เป็น $\lambda h + o(h)$ และความน่าจะเป็นของ 2 เหตุการณ์ หรือมากกว่านั้นในช่วงเป็น $o(h)$ นั่นคือสมมติฐานว่า 2, 3 และ 4 ของคำนิยามที่ 2.7 สามารถที่จะแทนได้โดย

2) กระบวนการมีการเพิ่มขึ้นอย่างเป็นอิสระ

3) $P\{N(t+h)-N(t)=1\} = \lambda h+o(h)$

4) $P\{N(t+h)-N(t)\geq 2\} = o(h)$

2.8.3 หลักการทั่วไปของกระบวนการปัวซอง(Generalizations of the Poisson Process)

2.8.3.1 กระบวนการปัวซองแบบนอนโฮโมจีเนียส(Nonhomogeneous Poisson Process)

นิยามที่ 2.8

กระบวนการที่นับได้ $\{N(t), t\geq 0\}$ จะเป็นกระบวนการปัวซองแบบนอนโฮโมจีเนียส ด้วย intensity function $\lambda(t), t\geq 0$ ถ้า

1. $N(0)=0$,
2. $\{N(t), t\geq 0\}$ มีการเพิ่มขึ้นอย่างเป็นอิสระ,
3) $P\{N(t+h)-N(t)\geq 2\} = o(h)$,
4) $P\{N(t+h)-N(t)=1\} = \lambda(t)h+ o(h)$

ถ้าให้ $m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$P\{N(t+s)-N(t)=n\} = e^{-[m(t+s)-m(t)]}\frac{[m(t+s)-m(t)]^n}{n!} \text{ , } n\geq 0 \quad (2.14)$$

หรืออาจจะกล่าวได้ว่า $N(t+s)$ - $N(t)$ มีการแจกแจงแบบปัวซอง ด้วยค่าเฉลี่ย $m(t+s)$ - $m(t)$ ตัวอย่างเช่น $N(t)$ มีการแจกแจงแบบปัวซอง ด้วยค่าเฉลี่ย $m(t)$ และสำหรับเหตุผลที่ $m(t)$ ถูกเรียกว่าเป็นฟังก์ชันค่าเฉลี่ยของกระบวนการจะสังเกตได้ว่าถ้า $\lambda(t)=\lambda$ (นั่นคือจะเป็นกระบวนการปัวซอง) ดังนั้น $m(t) = \lambda t$ ตามสมการที่ (2.14) และค่า $N(t+s)$ - $N(t)$ จะมีการแจกแจงแบบปัวซอง ด้วยค่าเฉลี่ย λs

การพิสูจน์สมการ (2.14) จะทำตามการพิสูจน์ของทฤษฎี 2.2 โดยจะมีการเปลี่ยนแปลงเพิ่มเติมคือเจาะจงค่า t และกำหนด

$$P_n(s) \;=\; P\{N(t+s)-N(t)=n\}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} P_n(s+h) &= P\{N(t+s+h)-N(t)=0\} \\ &= P\{\text{เหตุการณ์ที่ 0 ใน } (t,t+s),\ \text{เหตุการณ์ที่ 0 ใน } [t+s,t+s+h]\} \\ &= P\{\text{เหตุการณ์ที่ 0 ใน } (t,t+s)P\{\text{ เหตุการณ์ที่ 0 ใน } [t+s,t+s+h]\} \\ &= P_0(s)\left[1-\lambda(t+s)h+o(h)\right] \end{aligned}$$

ซึ่ง 2 สมการสุดท้ายเป็นผลจากการเพิ่มขึ้นอย่างเป็นอิสระ ของข้อความจริงที่ 3 และ 4 รวมกันและมีความหมายว่า $P\{N(t+s+h)-N(t)=0\} = 1-\lambda(t+s)h+o(h)$ ดังนั้น

$$\frac{P_0(s+h)-P_0(s)}{h} \;=\; -\lambda(t+s)P_0(s)+\frac{0(h)}{h}$$

ให้ $h \rightarrow 0$ ผลที่จะได้

$$P_0^{'}(s) \;=\; -\lambda(t+s)P_0(s)$$

หรือ $\quad \log P_0(s) \;=\; \int_0^s -\lambda(t+u)du \;=\; -\int_t^{t+s}\lambda(y)dy$

หรือ $\quad P_0(s)=e^{-[m(t+s)-m(t)]}$

ความสำคัญของกระบวนการปัวซองแบบนอนโฮโมจีเนียส จะอยู่ที่ว่าไม่ต้องการเงื่อนไขของการเพิ่มขึ้นอย่างคงที่

แต่จะต้องเป็นไปได้ว่า เหตุการณ์ที่น่าจะเป็นไปได้ อาจจะเกิดขึ้นระหว่างเวลาที่แน่นอนระหว่างวัน มากกว่าระหว่างเวลาอื่น ๆ

2.8.3.2 กระบวนการปัวซองแบบคอมพาวด์(Compound Poisson Process)

กระบวนการสโตแคสติก (Stochastic) $\{X(t), t \geq 0\}$ จะกล่าวได้ว่าเป็นกระบวนการปัวซองแบบคอมพาวด์ และสามารถเขียนได้ดังนี้

$$X(t) \quad = \quad \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad t \geq 0 \qquad (2.15)$$

ซึ่ง $\{N(t), t \geq 0\}$ เป็นกระบวนการปัวซอง และ $\{Y_n, n \geq 0\}$ เป็นชุดของตัวแปรสุ่มที่อิสระและมีการแจกแจงเหมือน ๆ กัน ซึ่งจะเหมือนกับความเป็นอิสระของ $\{N(t), t \geq 0\}$

ตัวอย่างของกระบวนการปัวซองแบบคอมพาวด์

1. ถ้า $Y_i = 1$ แล้ว $X(t) = N(t)$ ดังนั้นเราจะมีกระบวนการปัวซองที่ปกติ
2. สมมติว่ารถประจำทางหลาย ๆ คันมาถึงสนามกีฬาเป็นเหตุการณ์ที่มีความสอดคล้องด้วยกระบวนการปัวซอง และสมมติว่าจำนวนของลูกค้าในรถประจำทางแต่ละคันเป็นอิสระและมีการแจกแจงที่เหมือน ๆ กัน ดังนั้น $\{X(t), t \geq 0\}$ เป็นกระบวนการปัวซองแบบคอมพาวด์ ซึ่ง $X(t)$ แสดงถึงจำนวนของลูกค้าที่มาถึงใน t ในสมการ (5.21) Y_i จะแสดงถึงจำนวนของลูกค้าในรถประจำทางคันที่ i
3. สมมติว่าลูกค้าออกจากร้านขายของซึ่งสอดคล้องกับกระบวนการปัวซอง ถ้า Y_i จำนวนการใช้จ่ายของลูกค้าคนที่ i , $i = 1, 2, \ldots$ ซึ่งเป็นอิสระและมีการแจกแจงเหมือน กัน ดังนั้น $\{X(t), t \geq 0\}$ จะเป็นกระบวนการปัวซองแบบคอมพาวด์ เมื่อ $X(t)$ แสดงถึงจำนวนรวมทั้งหมดของเงินที่ใช้จ่ายในเวลา t