

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้จะกล่าวถึงคุณสมบัติทั่วไปของพีชคณิต BCK ที่จำเป็นเพื่อนำไปใช้ในบทที่ 3 โดยจะกล่าวถึง นิยาม ทฤษฎีที่สำคัญพอสังเขป สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีในบทนี้จะไม่แสดงไว้ ผู้อ่านสามารถศึกษาได้จากหนังสืออ้างอิงที่ระบุไว้

นิยาม 2.1 พีชคณิต $\underline{X} = (X; *, 0)$ ชนิด (2,0) จะถูกเรียกว่า พีชคณิต BCK

ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\text{BCK 1} \quad ((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$$

$$\text{BCK 2} \quad (x * (x * y)) * y = 0$$

$$\text{BCK 3} \quad x * x = 0$$

$$\text{BCK 4} \quad 0 * x = 0$$

$$\text{BCK 5} \quad \text{ถ้า } x * y = 0 \text{ และ } y * x = 0 \text{ แล้ว } x = y$$

ทฤษฎีบท 2.2 [1]. ให้ $\underline{X} = (X; *, 0)$ เป็น พีชคณิต BCK จะได้ว่า

- 1) ถ้า $x * y = 0$ แล้ว $(z * y) * (z * x) = 0$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
- 2) ถ้า $x * y = 0$ แล้ว $(x * z) * (y * z) = 0$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$
- 3) ถ้า $x * y = 0$ และ $y * z = 0$ แล้ว $x * z = 0$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ทฤษฎีบท 2.3 [1]. ให้ $\underline{X} = (X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต BCK จะได้ว่า

$$\begin{array}{ll} \text{BCK 6} & x * 0 = x \quad \text{สำหรับทุก } x \in X \\ \text{BCK 7} & (x * y) * z = (x * z) * y \quad \text{สำหรับทุก } x, y, z \in X \\ \text{BCK 8} & (x * y) * x = 0 \quad \text{สำหรับทุก } x, y \in X \\ \text{BCK 9} & x * (x * (x * y)) = x * y \quad \text{สำหรับทุก } x, y \in X \end{array}$$

นิยาม 2.4 พีชคณิต BCK $\underline{X} = (X; *, 0)$ จะมีคุณสมบัติ โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ (positive implicative) ถ้า $(x * y) * y = x * y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ทฤษฎีบท 2.5 [1]. ให้ $\underline{X} = (X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต BCK จะได้ว่า $\underline{X}$ มีคุณสมบัติ โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ ก็ต่อเมื่อ $(x * z) * (y * z) = (x * y) * z$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

นิยาม 2.6 พีชคณิต BCK $\underline{X} = (X; *, 0)$ จะมีคุณสมบัติ คอมมิวเททีฟ (commutative) ถ้า $x * (x * y) = y * (y * x)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

นิยาม 2.7 พีชคณิต BCK $\underline{X} = (X; *, 0)$ จะมีคุณสมบัติ อิมพลิเคทีฟ (implicative) ถ้า $x = x * (y * x)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ทฤษฎีบท 2.8 [1]. ให้ $\underline{X} = (X; *, 0)$ เป็น พีชคณิต BCK จะได้ว่า

$\underline{X}$ มีคุณสมบัติ อิมพลิเคทีฟ ก็ต่อเมื่อ $\underline{X}$ มีคุณสมบัติ โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ และ คอมมิวเททีฟ

นิยาม 2.9 ให้ $\underline{X} = (X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต BCK ถ้ามีสมาชิก $1 \in \underline{X}$ สอดคล้องกับ
 สมการ $x * 1 = 0$ สำหรับทุก $x \in X$ แล้ว 1 จะถูกเรียกว่า สมาชิกหน่วย (unit) ของ $\underline{X}$
 และจะเรียก พีชคณิต BCK $\underline{X} = (X; *, 0)$ ที่ประกอบด้วย 1 ว่า พีชคณิต BCK ที่มีขอบเขต
 (bounded)