# บทที่ 3

## ผลคูณไอดีลของเรสิดิวบนพีชคณิต BCK

การศึกษาในบทนี้ จะแบ่งหัวข้อของการศึกษาออกเป็น 6 หัวข้อดังต่อไปนี้

1 ) คุณสมบัติของไอดีลในพีชคณิต BCK

2) คุณสมบัติต่างๆ ของเรสิดิวคลาส $( X|_{\sim A} ; *, [0]_{\sim A} )$ เมื่อ $\sim_A$ เป็นความสัมพันธ์สมภาค ( congruence ) ที่นิยามจากไอดีล $A$

3 ) คุณสมบัติของเรสิดิวคลาส $( X|_{\theta} ; *, [0]_{\theta} )$ เมื่อ $\theta$ เป็นความสัมพันธ์สมภาค ใด ๆ

4 ) คุณสมบัติของเรสิดิวคลาส $( X|_{\sim A} ; \cdot, [0]_{\sim A} )$ เมื่อ $\cdot$ เป็นการดำเนินการบางอย่างที่แตกต่างจาก $*$

5 ) เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่ทำให้ $( X|_{\sim A} ; \cdot, [0]_{\sim A} )$ เป็นพีชคณิต BCK

6 ) ความเกี่ยวข้องกันระหว่าง $( X|_{\sim A} ; *, [0]_{\sim A} )$ กับ $( X|_{\sim A} ; \circ, [0]_{\sim A} )$

คำศัพท์บางคำที่ปรากฏในนิยาม ทฤษฎี หรือตัวอย่างในบทนี้ ผู้เขียนได้กำหนดไว้ในบทที่ 2 เพราะเห็นว่ามีทฤษฎีต่างๆ ที่เป็นผลสืบเนื่องจากการนิยามอีกมาก ถ้านำมาเขียนไว้ในบทนี้ จะทำให้ขาดการเป็นเอกภาพของเรื่องที่จะศึกษาต่อไป

### 3.1 ไอดีลและคุณสมบัติของไอดีลในพีชคณิต BCK

ในหัวข้อนี้ จะนิยามและแสดงให้เห็นคุณสมบัติต่างๆ ของไอดีลบน พีชคณิต BCK

**นิยาม 3.1.1** ให้ $\underline{X} = (X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต BCK และ $\varnothing \neq A \subseteq X$ จะเรียก $A$ ว่าเป็นไอดีล ( ideal ) บน $\underline{X}$ ก็ต่อเมื่อ

(1) $0 \in A$ ,

(2) ถ้า $y * x \in A$ และ $x \in A$ แล้ว $y \in A$

**ตัวอย่าง 3.1.2** ให้ $X = \{0, a, b, c, 1\}$

| $*$ | 0 | $a$ | $b$ | $c$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $a$ | $a$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $b$ | $b$ | $b$ | 0 | 0 | 0 |
| $c$ | $c$ | $b$ | $a$ | 0 | 0 |
| 1 | 1 | $b$ | $a$ | $a$ | 0 |

จากตารางจะได้ว่า $\underline{X} = (X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต BCK ที่มีขอบเขต

และมี $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \{0, a\}$, $A_3 = \{0, a, b, c, 1\}$ เท่านั้นที่เป็นไอดีลบน $\underline{X}$

**ทฤษฎีบท 3.1.3** ให้ $\underline{X} = (X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต BCK และ $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ จะได้ว่า $A$ มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1) ถ้า $a_1, a_2 \in A$ แล้ว $a_1 * a_2$ , $a_2 * \mathrm{a}_1 \in A$

2) ถ้า $a \in A$ และ $x \in X$ แล้ว $a * x \in A$

3) ถ้า $a \in A$ และ $x \in X$ แล้ว $x * (x * a) \in A$

**พิสูจน์** 1) ให้ $a_1 , a_2 \in A$

พิจารณา $(a_1 * a_2) * a_1 = (a_1 * a_1) * a_2$ โดย BCK 7

$= 0 * a_2$ โดย BCK 3

$= 0$ โดย BCK 4

เนื่องจาก $0 \in A$ ดังนั้น $(a_1 * a_2) * a_1 \in A$

แต่ $a_1 \in A$ และ $A$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$

ดังนั้น $a_1 * a_2 \in A$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $a_2 * a_1 \in A$

2) ให้ $a \in A$ และ $x \in X$

พิจารณา $(a * x) * a = (a * a) * x$ โดย BCK 7

$= 0 * x$ โดย BCK 3

$= 0$ โดย BCK 4

เนื่องจาก $0 \in A$ ดังนั้น $(a * x) * a \in A$

แต่ $a \in A$ และ $A$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ ดังนั้น $a * x \in A$

3) ให้ $a \in A$ และ $x \in X$

พิจารณา $(x * (x * a)) * a = (x * a) * (x * a)$ โดย BCK 7

$= 0$ โดย BCK 3

เนื่องจาก $0 \in A$ ดังนั้น $(x * (x * a)) * a \in A$

แต่ $a \in A$ และ $A$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$

ดังนั้น $x * (x * a) \in A$

**ทฤษฎีบท 3.1.4** ให้ $\underline{X} = (X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต BCK ที่มีขอบเขต และ $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ จะได้ว่า $1 \in A$ ก็ต่อเมื่อ $A = X$

**พิสูจน์** $(\Rightarrow)$ ให้ $1 \in A$ และ $x \in X$

พิจารณา $x * 1 = 0$ แต่ $0 \in A$

และ $1 \in A$ ดังนั้น $x \in A$

จึงทำให้ $X \subseteq A$ แต่ $A \subseteq X$

ดังนั้น $A = X$

$(\Leftarrow)$ ให้ $A = X$

เนื่องจาก $1 \in X = A$

ดังนั้น $1 \in A$

**3.2 คุณสมบัติต่างๆ ของเรสิดิวคลาส $(X|_{\sim A}\,;\, *, [0]_{\sim A})$**

ในหัวข้อ 3.1 ที่ผ่านมา เราทราบถึงคุณสมบัติของไอดีลในพีชคณิต BCK ต่อไปจะนิยามความสัมพันธ์ $\sim_A$ เมื่อ $A$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ ซึ่ง $\sim_A$ จะเป็นความสัมพันธ์สมภาค ( congruence relation ) บน $\underline{X}$ แล้วศึกษาคุณสมบัติของเรสิดิวคลาส $(X|_{\sim A}\,;\, *, [0]_{\sim A})$ ซึ่งจะได้ว่า $(X|_{\sim A}\,;\, *, [0]_{\sim A})$ เป็นพีชคณิต BCK

**นิยาม 3.2.1** ให้ $\underline{X} = (X; *)$ เป็นพีชคณิต ชนิด (2) และ $\theta \subseteq X \times X$ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน $X$ จะเรียก $*$ ว่าเข้ากันได้กับ $\theta$ ( $*$ compatible with $\theta$ ) ถ้า $*$ มีคุณสมบัติว่า

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \theta \Rightarrow (a_1 * a_2, b_1 * b_2) \in \theta$$

**นิยาม 3.2.2** ให้ $\underline{X} = (X;\ *)$ เป็นพีชคณิต ชนิด (2) จะเรียกความสัมพันธ์สมมูล $\theta$ บน $X$ ว่าเป็นความสัมพันธ์สมภาค ( congruence relation ) บน $\underline{X}$ ถ้า $*$ เข้ากันได้กับ $\theta$

**นิยาม 3.2.3** ให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็นพีชคณิต BCK และ $A$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ กำหนดความสัมพันธ์ $\sim_A$ บน $\underline{X}$ โดย $x \sim_A y$ ก็ต่อเมื่อ $x * y \in A$ และ $y * x \in A$ สำหรับทุก $x, y \in X$

**ทฤษฎีบท 3.2.4** ถ้า $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็นพีชคณิต BCK และ $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ แล้ว $\sim_A$ เป็นความสัมพันธ์สมภาค บน $\underline{X}$

**พิสูจน์** เห็นได้ชัดว่า $\sim_A$ มีคุณสมบัติสะท้อน และ สมมาตร บน $\underline{X}$

กำหนดให้ $x \sim_A y$ และ $y \sim_A z$

นั่นคือ $x * y,\ y * x,\ y * z,\ z * y \in A$

เราต้องการแสดงว่า $x \sim_A z$ นั่นคือ ต้องการแสดงว่า $x * z,\ z * x \in A$

จาก BCK 1 จะได้ว่า $((x * z) * (x * y)) * (y * z) = 0 \in A$

และจาก $y * z \in A$ จะได้ว่า $(x * z) * (x * y) \in A$

และจาก $x * y \in A$ จะได้ว่า $x * z \in A$

ในทำนองเดียวกัน จะพิสูจน์ได้ว่า $z * x \in A$

ดังนั้น $x \sim_A z$ นั่นคือ $\sim_A$ มีคุณสมบัติ ถ่ายทอด บน $\underline{X}$

ต่อไปจะแสดงว่า $\sim_A$ มีคุณสมบัติเข้ากันได้ บน $\underline{X}$

ให้ $a \sim_A b$ และ $x \sim_A y$ ดังนั้น $a * b,\ b * a,\ x * y,\ y * x \in A$

ต้องการแสดงว่า $(a * x) \sim_A (b * y)$

1. พิจารณา $((a*x)*(b*x))\ *(a*b)=((a*x)*(a*b))\ *(b*x)$ โดย BCK 7

$=0$ โดย BCK 1

แต่ $0\in A$ ดังนั้น $((a*x)*(b*x))\ *(a*b)\in A$

แต่ $a*b\in A$ ดังนั้น $(a*x)*(b*x)\in A$ เนื่องจาก $A$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$

2. พิจารณา $((b*x)*(a*x))\ *(b*a)=((b*x)*(b*a))\ *(a*x)$ โดย BCK 7

$=0$ โดย BCK 1

แต่ $0\in A$ ดังนั้น $((b*x)*(a*x))\ *(b*a)\in A$

แต่ $b*a\in A$ ดังนั้น $(b*x)*(a*x)\in A$ เนื่องจาก $A$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$

จาก 1. และ 2. จะได้ว่า $(a*x)\sim_A(b*x)$ .......................................(*)

3. พิจารณา $((b*y)*(b*x))\ *(x*y)=0$ โดย BCK 1

แต่ $0\in A$ ดังนั้น $((b*y)*(b*x))\ *(x*y)\in A$

แต่ $x*y\in A$ ดังนั้น $(b*y)*(b*x)\in A$ เนื่องจาก $A$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$

4. พิจารณา $((b*x)*(b*y))\ *(y*x)=0$ โดย BCK 1

แต่ $0\in A$ ดังนั้น $((b*x)*(b*y))\ *(y*x)\in A$

แต่ $y*x\in A$ ดังนั้น $(b*x)*(b*y)\in A$ เนื่องจาก $A$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$

จาก 3. และ 4. จะได้ว่า $(b*x)\sim_A(b*y)$ .......................................(**)

จาก (*) และ (**) จะได้ว่า $(a*x)\sim_A(b*y)$ เนื่องจาก $\sim_A$ มีความสัมพันธ์ถ่ายทอด

ดังนั้น $\sim_A$ มีความสัมพันธ์เข้ากันได้ ( compatible relation )

นั่นคือ $\sim_A$ เป็นความสัมพันธ์สมภาค บน $\underline{X}$

**ทฤษฎีบท 3.2.5** ให้ $\underline{X} = (X\,;\, *\,,\, 0)$ เป็น อิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK และ $\theta$ เป็นความสัมพันธ์สมภาคบน $\underline{X}$ จะได้ว่า $(x,y) \in \theta$ ก็ต่อเมื่อ $(x*y,\, y*x) \in \theta$ สำหรับทุก $x,y \in X$

**พิสูจน์** $(\Rightarrow)$ ให้ $x,y \in \theta$ และ $(x,y) \in \theta$

เนื่องจาก $\theta$ มีความสัมพันธ์สมมาตร ดังนั้น $(y,x) \in \theta$

และ $\theta$ มีความสัมพันธ์เข้ากันได้ ดังนั้น $(x*y, y*x) \in \theta$

$(\Leftarrow)$ ให้ $x,y \in X$ และ $(x*y,\, y*x) \in \theta$

$\Rightarrow (\, x*(x*y)\,,\, x*(y*x)\,) \in \theta$

เนื่องจาก $(x,x) \in \theta$ และ $\theta$ มีคุณสมบัติเข้ากันได้

$\Rightarrow (\, x*(x*y)\,,\, x\,) \in \theta$ โดยคุณสมบัติอิมพลิเคทีฟ

และในทำนองเดียวกัน $(\, y*(x*y)\,,\, y*(y*x)\,) \in \theta$

$\Rightarrow (\, y\,,\, y*(y*x)\,) \in \theta$

แต่ $\underline{X}$ เป็น คอมมิวเททิฟ ดังนั้น $x*(x*y) = y*(y*x)$

และ จากคุณสมบัติ ถ่ายทอด และ คุณสมบัติสมมาตร จะได้ว่า $(x,y) \in \theta$

**ทฤษฎีบทแทรก 3.2.6** ให้ $\underline{X} = (X\,;\, *\,,\, 0)$ เป็น อิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK และ $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ จะได้ว่า $x \sim_A y$ ก็ต่อเมื่อ $(x*y) \sim_A (y*x)$ สำหรับทุก $x,y \in X$

**พิสูจน์** ทำนองเดียวกันกับ ทฤษฎีบท 3.2.5

**ทฤษฎีบท 3.2.7** ให้ $\underline{X} = (X\,;\, *\,,\, 0)$ เป็นพีชคณิต BCK และ $A \subseteq X$ เป็นไอดีลของ $\underline{X}$ นิยามการดำเนินการ ( operation ) $*$ บน $X|_{\sim A}$ โดย $[x]_{\sim A} * [y]_{\sim A} = [x*y]_{\sim A}$ จะได้ว่า $(X|_{\sim A}; *, [0]_{\sim A})$ เป็นพีชคณิต BCK

**พิสูจน์** ให้ $[x]_{\sim A}, [y]_{\sim A}, [z]_{\sim A} \in X|_{\sim A}$

1. พิจารณา $(([x]_{\sim A} * [y]_{\sim A}) * ([x]_{\sim A} * [z]_{\sim A})) * ([z]_{\sim A} * [y]_{\sim A})$

$$= [(x*y)*(x*z)]_{\sim A} * [z*y]_{\sim A}$$

$$= [((x*y)*(x*z)) * (z*y)]_{\sim A}$$

$$= [0]_{\sim A}$$ โดย BCK 1

ดังนั้น $(X|_{\sim A}; *, [0]_{\sim A})$ มีเงื่อนไขตาม BCK 1

2. พิจารณา $([x]_{\sim A} * ([x]_{\sim A} * [y]_{\sim A})) * [y]_{\sim A} = [x*(x*y)]_{\sim A} * [y]_{\sim A}$

$$= [(x*(x*y)) * y]_{\sim A}$$

$$= [0]_{\sim A}$$ โดย BCK 2

ดังนั้น $(X|_{\sim A}; *, [0]_{\sim A})$ มีเงื่อนไขตาม BCK 2

3. พิจารณา $[x]_{\sim A} * [x]_{\sim A} = [x*x]_{\sim A}$

$$= [0]_{\sim A}$$ โดย BCK 3

ดังนั้น $(X|_{\sim A}; *, [0]_{\sim A})$ มีเงื่อนไขตาม BCK 3

4. พิจารณา $[0]_{\sim A} * [x]_{\sim A} = [0*x]_{\sim A}$

$$= [0]_{\sim A}$$ โดย BCK 4

ดังนั้น $(X|_{\sim A}; *, [0]_{\sim A})$ มีเงื่อนไขตาม BCK 4

5. ให้ $[X]_{\sim A} * [y]_{\sim A} = [0]_{\sim A}$ และ $[y]_{\sim A} * [x]_{\sim A} = [0]_{\sim A}$

ดังนั้น $[x*y]_{\sim A} = [0]_{\sim A}$ และ $[y*x]_{\sim A} = [0]_{\sim A}$

$\Rightarrow (x*y) \sim_A 0$ และ $(y*x) \sim_A 0$

$\Rightarrow (x*y)*0,\ 0*(x*y) \in A$ และ $(y*x)*0,\ 0*(y*x) \in A$

$\Rightarrow x*y \in A$ และ $y*x \in A$ โดย BCK 6,4

$\Rightarrow x \sim_A y$

$\Rightarrow [x]_{\sim A} = [y]_{\sim A}$

ดังนั้น $(X|_{\sim A}; *, [0]_{\sim A})$ มีเงื่อนไขตาม BCK 5

จาก 1, 2, 3, 4 และ 5 จึงทำให้ $(X|_{\sim A}; *, [0]_{\sim A})$ เป็นพีชคณิต BCK

**ทฤษฎีบท 3.2.8** ให้ $\underline{X} = (X\,;\, *\,,\, 0)$ เป็นพีชคณิต BCK และ $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ จะได้ว่า $[0]_{\sim A} = A$

**พิสูจน์** ให้ $x \in [0]_{\sim A}$ ดังนั้น $x * 0\,,\, 0 * x \in A$ แต่ $x * 0 = x\,,\, 0 * x = 0$

ดังนั้น $x \in A$

นั่นคือ $[0]_{\sim A} \subseteq A$

ให้ $x \in A$ เนื่องจาก $x * 0 = x$ และ $0 * x = 0$

$\Rightarrow x * 0 \in A$ และ $0 * x \in A$

$\Rightarrow x \sim_A 0$

$\Rightarrow x \in [0]_{\sim A}$

นั่นคือ $A \subseteq [0]_{\sim A}$

จาก $[0]_{\sim A} \subseteq A$ และ $A \subseteq [0]_{\sim A}$ ดังนั้น $[0]_{\sim A} = A$

**ทฤษฎีบท 3.2.9** ให้ $\underline{X} = (X\,;\, *\,,\, 0)$ เป็นพีชคณิต BCK และ $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ จะได้ว่า $A = \{0\}$ ก็ต่อเมื่อ $[x]_{\sim A} = \{x\}$ สำหรับทุก $x \in X$

**พิสูจน์** ($\Rightarrow$) ให้ $A = \{0\}$ และ $y \in [x]_{\sim A}$ เมื่อ $y, x \in X$

ดังนั้น $y * x\,,\, x * y \in A$ แต่ $A = \{0\}$

$\Rightarrow$ $y * x = 0 = x * y$ นั่นคือ $x = y$ โดย BCK 5

นั่นคือ $[x]_{\sim A} = \{x\}$ สำหรับทุก $x \in X$

($\Leftarrow$) ให้ $[x]_{\sim A} = \{x\}$ สำหรับทุก $x \in X$

ดังนั้น $[0]_{\sim A} = \{0\}$

แต่ จากทฤษฎีบท 3.2.8 จะได้ว่า $[0]_{\sim A} = A$

ดังนั้น $A = \{0\}$

**3.3 คุณสมบัติของเรสิดิวคลาส $(X|_\theta ; *, [0]_\theta)$ เมื่อ $\theta$ เป็นความสัมพันธ์สมภาค ใด ๆ บน $\underline{X}$**

ในหัวข้อนี้ จะแสดงให้เห็นว่ามีเงื่อนไขใดที่ทำให้ $(X|_\theta ; *, [0]_\theta)$ เป็นพีชคณิต BCK เมื่อ $\theta$ เป็นความสัมพันธ์สมภาคใดๆ และจะศึกษาถึงคุณสมบัติของเรสิดิวคลาส $(X|_\theta ; *, [0]_\theta)$

**ทฤษฎีบท 3.3.1** ให้ $\underline{X} = (X ; * , 0)$ เป็นคอมมิวเททีฟ พีชคณิต BCK และ $\theta$ เป็นความสัมพันธ์สมภาค บน $\underline{X}$ กำหนดการดำเนินการ $*$ บน $X|_\theta$ โดย $[x]_\theta * [y]_\theta = [x * y]_\theta$ จะได้ว่า $(X|_\theta ; *, [0]_\theta)$ เป็นพีชคณิต BCK

**พิสูจน์** เนื่องจาก $\theta$ เป็นความสัมพันธ์สมภาค

ดังนั้น การดำเนินการ $*$ ที่กำหนดบน $X|_\theta$ ข้างต้นเป็นการดำเนินการที่ใช้ได้ ( well - defined )

ให้ $[x]_\theta , [y]_\theta , [z]_\theta \in X|_\theta$

1. พิจารณา $(([x]_\theta * [y]_\theta) * ([x]_\theta * [z]_\theta)) * ([z]_\theta * [y]_\theta)$

$= [((x * y) * (x * z)) * (z * y)]_\theta$

$= [0]_\theta$ โดย BCK 1

ดังนั้น $(X|_\theta ; *, [0]_\theta)$ มีเงื่อนไขตาม BCK 1

2. พิจารณา $([x]_\theta * ([x]_\theta * [y]_\theta)) * [y]_\theta = [(x*(x*y)) * y]_\theta$

$= [0]_\theta$ โดย BCK 2

ดังนั้น $(X|_\theta ; *, [0]_\theta)$ มีเงื่อนไขตาม BCK 2

3. พิจารณา $[x]_\theta * [x]_\theta = [x * x]_\theta$

$= [0]_\theta$ โดย BCK 3

ดังนั้น $(X|_\theta ; *, [0]_\theta)$ มีเงื่อนไขตาม BCK 3

4. พิจารณา $[0]_\theta * [x]_\theta = [0 * x]_\theta$

$= [0]_\theta$ โดย BCK 4

ดังนั้น $(X|_\theta ; *, [0]_\theta)$ มีเงื่อนไขตาม BCK 4

5. ให้ $[x]_\theta * [y]_\theta = [0]_\theta$ และ $[y]_\theta * [x]_\theta = [0]_\theta$

$\Rightarrow [x*y]_\theta = [0]_\theta$ และ $[y*x]_\theta = [0]_\theta$

$\Rightarrow (x*y, 0) \in \theta$ และ $(y*x, 0) \in \theta$

$\Rightarrow (x*(x*y), x*0) \in \theta$ และ $(y*(y*x), y*0) \in \theta$

เนื่องจาก $\theta$ มีความสัมพันธ์เข้ากันได้ และ $(x,x)$ , $(y,y) \in \theta$

$\Rightarrow (x*(x*y), x) \in \theta$ และ $(y*(y*x), y) \in \theta$ โดย BCK 6

$\Rightarrow (x*(x*y), x) \in \theta$ และ $(x*(x*y), y) \in \theta$

เนื่องจาก $\underline{X}$ เป็น คอมมิวเททีฟ พีชคณิต BCK

$\Rightarrow (x, y) \in \theta$ เนื่องจาก $\theta$ เป็นความสัมพันธ์สมมูล

$\Rightarrow [x]_\theta = [y]_\theta$

ดังนั้น $(X|_\theta ; *, [0]_\theta)$ มีเงื่อนไขตาม BCK 5

จาก 1., 2., 3., 4. และ 5. จะได้ว่า $(X|_\theta ; *, [0]_\theta)$ เป็นพีชคณิต BCK

**ตัวอย่าง 3.3.2** ให้ $X = \{ 0 , a , b \}$

| $*$ | $0$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ | $0$ | $0$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $0$ |

จากตาราง จะได้ว่า $\underline{X} = ( X ; * , 0 )$ เป็นพีชคณิต BCK

แต่ $a * (a * b) = a * 0 = a \neq 0 = b * b = b * (b * a)$

แสดงว่า $\underline{X} = ( X ; * , 0 )$ ไม่เป็น คอมมิวเททีฟ พีชคณิต BCK

จะได้ว่า $A = \{0\}$ เป็นไอดีลหนึ่งบน $\underline{X}$ และ $\sim_A$ เป็นความสัมพันธ์สมภาค บน $\underline{X}$

นั่นคือ $[0]_{\sim A} = \{0\}$ , $[a]_{\sim A} = \{a\}$ และ $[b]_{\sim A} = \{b\}$

| $*$ | $[0]_{\sim A}$ | $[a]_{\sim A}$ | $[b]_{\sim A}$ |
|---|---|---|---|
| $[0]_{\sim A}$ | $[0]_{\sim A}$ | $[0]_{\sim A}$ | $[0]_{\sim A}$ |
| $[a]_{\sim A}$ | $[a]_{\sim A}$ | $[0]_{\sim A}$ | $[0]_{\sim A}$ |
| $[b]_{\sim A}$ | $[b]_{\sim A}$ | $[b]_{\sim A}$ | $[0]_{\sim A}$ |

จากตาราง หรือ ทฤษฎีบท 3.2.7 จะได้ว่า $( X|_{\sim A} ; * , [0]_{\sim A} )$ เป็น พีชคณิต BCK

**ทฤษฎีบทแทรก 3.3.3** ให้ $\underline{X} = ( X ; * , 0 )$ เป็นคอมมิวเททีฟ พีชคณิต BCK และ $\theta$ เป็นความสัมพันธ์สมภาค จะได้ว่า $( X|_{\theta} ; *, [0]_{\theta})$ เป็นคอมมิวเททีฟ พีชคณิต BCK

**พิสูจน์** ให้ $[x]_{\theta} , [y]_{\theta} \in X|_{\theta}$

จาก ทฤษฎีบท 3.3.1 จะได้ว่า $( X|_{\theta} ; *, [0]_{\theta})$ เป็นพีชคณิต BCK

พิจารณา $[x]_{\theta} * ([x]_{\theta} * [y]_{\theta}) = [x * (x * y)]_{\theta}$

$= [y * (y * x)]_{\theta}$ เนื่องจาก $\underline{X}$ เป็นคอมมิวเททีฟ

$= [y]_{\theta} * ([y]_{\theta} * [x]_{\theta})$

ดังนั้น $( X|_{\theta} ; * , [0]_{\theta})$ เป็นคอมมิวเททีฟ พีชคณิต BCK

สังเกตจากพิสูจน์ ใน ทฤษฎีบท 3.3.1 ใช้คุณสมบัติการเป็นคอมมิวเททีฟ ของ $\underline{X}$ เฉพาะในการแสดงว่า $( X|_\theta ; * , [0]_\theta)$ มีคุณสมบัติ BCK 5 เท่านั้น ดังนั้นเราอาจจะ กำหนด $\underline{X}$ เป็นพีชคณิต BCK ใด และเพิ่มคุณสมบัติของความสัมพันธ์สมภาค $\theta$ เป็นดังทฤษฎีบทแทรกต่อไปนี้

**ทฤษฎีบทแทรก 3.3.4** ให้ $\underline{X} = ( X ; * , 0 )$ เป็น พีชคณิต BCK และ $\theta$ เป็นความสัมพันธ์สมภาค บน $\underline{X}$ ที่มีคุณสมบัติ $(x*(x*y), y*(y*x)) \in \theta$ สำหรับทุก $x, y \in X$ กำหนดการดำเนินการ $*$ บน $X|_\theta$ โดย $[x]_\theta * [y]_\theta = [x*y]_\theta$ จะได้ว่า $( X|_\theta ; *, [0]_\theta )$ เป็นพีชคณิต BCK

**3.4 คุณสมบัติของเรสิดิวคลาส $(X|_{\sim A};\cdot,[0]_{\sim A})$ เมื่อ $\cdot$ เป็นการดำเนินการบางอย่างที่แตกต่างจาก $*$**

หัวข้อนี้จะนิยามการดำเนินการเมื่อ $\cdot$ เป็นการดำเนินการบางอย่างที่แตกต่างจาก $*$ และ ศึกษาคุณสมบัติของ $(X;\cdot,0)$ และ เรสิดิวคลาส $(X|_{\sim A};\cdot,[0]_{\sim A})$

**นิยาม 3.4.1** จะเรียก **พีชคณิต BCK** $\underline{X}=(X;*,0)$ ว่ามีเงื่อนไข (S) ถ้า แต่ละ $x,y\in X$ จะมี $z\in X$ ซึ่ง 1) $(z*x)*y=0$ และ

2) ถ้า $c\in X$ และ $(c*x)*y=0$ แล้ว $c*z=0$

จะนิยามไบนารี่โอเปอเรชัน $\circ$ บน $X$ โดย

$x\circ y=z$ เมื่อ $z\in X$ มี คุณสมบัติดังกล่าวข้างต้น

**ทฤษฎีบท 3.4.2** [2]. ให้ $\underline{X}=(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต BCK ที่มีเงื่อนไข (S) จะได้ว่า

$x\circ x=x$ สำหรับทุก $x\in X$

**ทฤษฎีบทแทรก 3.4.3** ให้ $\underline{X}=(X;*,0)$ เป็นพีชคณิต BCK ที่มีเงื่อนไข (S) จะได้ว่า

$(X;\circ,0)$ เป็น **พีชคณิต BCK** ก็ต่อเมื่อ $X=\{0\}$

**พิสูจน์** $(\Rightarrow)$ ให้ $(X;\circ,0)$ เป็น พีชคณิต BCK และ $x\in X$

ดังนั้น $x\circ x=0$ แต่ จากทฤษฎีบท 3.4.2 จะได้ว่า $x\circ x=x$

จึงทำให้ $x=0$ ดังนั้น $X=\{0\}$

$(\Leftarrow)$ เห็นได้ชัด

**ทฤษฎีบทนำ 3.4.4** ให้ $\underline{X} = (X; *, 0)$ เป็นพีชคณิต BCK ที่มีเงื่อนไข (S) จะได้ว่า

1. ถ้า $x \circ y = c$ แล้ว $z * c = 0$

   เมื่อ $z \in \{0, x, y, x*y, y*x, c*x, c*y\}$

2. $x \circ y = y \circ x$ สำหรับทุก $x, y \in X$

3. ถ้า $x \circ y = 0$ แล้ว $x = y$

4. $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ y$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

5. $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

**พิสูจน์** 1. ให้ $x, y, z \in X$ และ $x \circ y = c$

นั่นคือ $c \in X$ ที่ $(c * x) * y = 0$

และ ถ้า $z \in X$ และ $(z * x) * y = 0$ แล้ว $z * c = 0$

แต่ $(0 * x) * y = 0 * y = 0$ โดย BCK 4

$(x * x) * y = 0 * y$ โดย BCK 3

$= 0$ โดย BCK 4

$(y * x) * y = (y * y) * x$ โดย BCK 7

$= 0 * x$ โดย BCK 3

$= 0$ โดย BCK 4

$((x * y) * x) * y = ((x * x) * y) * y$ โดย BCK 7

$= (0 * y) * y$ โดย BCK 3

$= 0$ โดย BCK 4

$((y * x) * x) * y = ((y * x) * y) * x$ โดย BCK 7

$= ((y * y) * x) * x$ โดย BCK 7

$= (0 * x) * x$ โดย BCK 3

$= 0$ โดย BCK 4

ดังนั้นจาก $x \circ y = c$ ตามนิยามจะได้ว่า $z * c = 0$ ทุก $z = \{0, x, y, x * y, y * x\}$

และค่า $z$ ที่เป็นไปได้อีก 2 ค่า คือ $z = c * x$ หรือ $c * y$

และ $(c * x) * c = (c * c) * x$ โดย BCK 7

$= 0 * x$ โดย BCK 3

$= 0$ โดย BCK 4

และ ทำนองเดียวกัน $(c * y) * c = 0$

ดังนั้น จะได้ว่า $z \in \{0, x, y, x * y, y * x, c * x, c * y\}$ แล้ว $z * c = 0$

2. ให้ $x, y \in X$

สมมติว่า $x \circ y = c_1$ และ $y \circ x = c_2$

ดังนั้น $(c_1 * x) * y = 0$ และ $(c_2 * y) * x = 0$

จาก BCK 7 จะได้ว่า

$(c_1 * y) * x = 0$ และ $(c_2 * x) * y = 0$

ดังนั้นจาก $y \circ x = c_2$ และ $x \circ y = c_1$ ตามลำดับจะได้ว่า $c_1 * c_2 = 0$ และ $c_2 * c_1 = 0$

นั่นคือ $c_1 = c_2$ โดย BCK 5

ดังนั้น $x \circ y = y \circ x$

3. ให้ $x \circ y = 0$ โดยที่ $x, y \in X$

จาก (1) จะได้ว่า $(x * y) * (x \circ y) = 0$

แต่ $x \circ y = 0$ ดังนั้น $x * y = 0$ โดย BCK 6...........(*)

ทำนองเดียวกัน จาก (1) จะได้ว่า $(y * x) * (y \circ x) = 0$

แต่ $y \circ x = x \circ y = 0$ ดังนั้น $y * x = 0$ โดย BCK 6.............(**)

จาก (*) และ (**) จะได้ว่า $x = y$ โดย BCK 5

4. ให้ $x, y, z \in X$

โดยนิยามของการมีเงื่อนไข (S) จะได้ว่า

$(((x \circ y) \circ z) * (x \circ y)) * z = 0$

$\Rightarrow (((x \circ y) \circ z) * z) * (x \circ y) = 0$ โดย BCK 7

$\Rightarrow ((((x \circ y) \circ z) * z) * y) * x) * (((x \circ y) * y) * x) = 0$ โดย ทฤษฎีบท 2.2 (2)

$\Rightarrow ((((x \circ y) \circ z) * z) * y) * x) * (((x \circ y) * x) * y) = 0$ โดย BCK 7

แต่ $((x \circ y) * x) * y = 0$

$\Rightarrow (((x \circ y) \circ z) * z) * y) * x = 0$ โดย BCK 6

$\Rightarrow (((x \circ y) \circ z) * y) * z) * x = 0$ โดย BCK 7

$\Rightarrow (((x \circ y) \circ z) * y) * x) * z = 0$ โดย BCK 7

$\Rightarrow (((x \circ y) \circ z) * y) * (x \circ z) = 0$ โดยนิยามของ $x \circ z$

$\Rightarrow ((x \circ y) \circ z) * (x \circ z)) * y = 0$ โดย BCK 7

$\Rightarrow ((x \circ y) \circ z) * ((x \circ z) \circ y) = 0$ โดยนิยามของ $(x \circ z) \circ y$

ทำนองเดียวกัน จะพิสูจน์ได้ว่า $((x \circ z) \circ y) * ((x \circ y) \circ z) = 0$

จาก BCK 5 จะได้ว่า $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ y$

5. ให้ $x, y, z \in X$

พิจารณา $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ y$ โดย 4.

$= (z \circ x) \circ y$ โดย 2.

$= (z \circ y) \circ x$ โดย 4.

$= x \circ (z \circ y)$ โดย 2.

$= x \circ (y \circ z)$ โดย 2.

ดังนั้น จะได้ว่า $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

**ทฤษฎีบท 3.4.5** [4] . ให้ $\underline{X} = (X ; *, 0)$ เป็นโพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK ที่มีเงื่อนไข (S) และ $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ กำหนด $\circ$ บนเรสิดิวคลาส $(X|_{\sim A} ; \circ, [0]_{\sim A})$ โดย

$$[x]_{\sim A} \circ [y]_{\sim A} = [x \circ y]_{\sim A} \quad \text{สำหรับทุก} \quad [x]_{\sim A}, [y]_{\sim A} \in X|_{\sim A}$$

จะได้ว่า $\circ$ เป็นการดำเนินการที่ใช้ได้ ( well - defined )

ตัวอย่างต่อไปเป็นตัวอย่างที่ $\underline{X}$ เป็นโพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK ที่มีเงื่อนไข (S) แต่ $(X|_{\sim A} ; \circ, [0]_{\sim A})$ **ไม่เป็น** พีชคณิต BCK

**ตัวอย่าง 3.4.6** ให้ $X = \{ 0 , a , b \}$

| $*$ | $0$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ | $0$ | $0$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $0$ |

จากตาราง จะได้ว่า $\underline{X} = (X ; *, 0)$ โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK

| $\circ$ | $0$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $a$ | $b$ |
| $a$ | $a$ | $a$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $b$ |

และ จะได้ว่า $A = \{ 0, a \}$ เป็นไอดีลหนึ่งบน $\underline{X}$

นั่นคือ $[0]_{\sim A} = \{ 0 , a \} = [a]_{\sim A}$

และ $[b]_{\sim A} = \{b\}$

พิจารณาตารางต่อไปนี้ เมื่อกำหนด $[x]_{\sim A} \circ [y]_{\sim A} = [x \circ y]_{\sim A}$

| $\circ$ | $[0]_{\sim A}$ | $[b]_{\sim A}$ |
|---|---|---|
| $[0]_{\sim A}$ | $[0]_{\sim A}$ | $[b]_{\sim A}$ |
| $[b]_{\sim A}$ | $[b]_{\sim A}$ | $[b]_{\sim A}$ |

จากตารางจะเห็นว่า $[0]_{\sim A} \circ [b]_{\sim A} = [b]_{\sim A}$ ดังนั้น $[0]_{\sim A}$ , $[b]_{\sim A}$ ไม่มีคุณสมบัติเป็น 0 ใน BCK 6 และ BCK 4 ตามลำดับ

ดังนั้น แสดงว่า $(X|_{\sim A}; \circ, [0]_{\sim A})$ ไม่เป็น พีชคณิต BCK

**ทฤษฎีบท 3.4.7** ให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็นโพซทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK ที่มีเงื่อนไข (S) และ $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ จะได้ว่า $[0]_{\sim A}$ เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ของ $(X|_{\sim A}; \circ, [0]_{\sim A})$

**พิสูจน์** ให้ $[x]_{\sim A} \in X|_{\sim A}$

พิจารณา $[x]_{\sim A} \circ [0]_{\sim A} = [x \circ 0]_{\sim A}$

เนื่องจาก $((x \circ 0) * x) * 0 = 0$ โดยนิยาม $x \circ 0$

$\Rightarrow (x \circ 0) * x = 0$ โดย BCK 6

$\Rightarrow (x \circ 0) * x \in A$ เนื่องจาก $0 \in A$

แต่ $x * (x \circ 0) = 0$ โดย ทฤษฎีบทนำ 3.4.4 (1)

ดังนั้น $x * (x \circ 0) \in A$ เนื่องจาก $0 \in A$

จาก $(x \circ 0) * x \in A$ และ $x * (x \circ 0) \in A$

จะได้ว่า $(x \circ 0) \sim_A x$

นั่นคือ $[x \circ 0]_{\sim A} = [x]_{\sim A}$

เนื่องจาก $[0]_{\sim A} \circ [x]_{\sim A} = [0 \circ x]_{\sim A} = [x \circ 0]_{\sim A}$ โดยทฤษฎีบทนำ 3.4.4(2)

ดังนั้น $[0]_{\sim A} \circ [x]_{\sim A} = [x]_{\sim A}$

จึงทำให้ได้ว่า $[x]_{\sim A} \circ [0]_{\sim A} = [x]_{\sim A} = [0]_{\sim A} \circ [x]_{\sim A}$

แสดงว่า $[0]_{\sim A}$ เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ ของ $(X|_{\sim A}\ ;\ \circ,\ [0]_{\sim A})$

**ทฤษฎีบท 3.4.8** ให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็นโพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK ที่มีเงื่อนไข (S) และ $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ จะได้ว่า $(X|_{\sim A};\circ,[0]_{\sim A})$ เป็นโมนอยด์ (monoid)

**พิสูจน์** 1. เนื่องจาก $(X|_{\sim A};\circ,[0]_{\sim A})$ มีคุณสมบัติปิด

2. จาก ทฤษฎีบทนำ 3.4.4 (5)

ดังนั้น $([x]_{\sim A} \circ [y]_{\sim A}) \circ [z]_{\sim A} = [x]_{\sim A} \circ ([y]_{\sim A} \circ [z]_{\sim A})$

3. $(X|_{\sim A};\circ,[0]_{\sim A})$ มีเอกลักษณ์คือ $[0]_{\sim A}$ โดย ทฤษฎีบท 3.4.7

จาก 1., 2. และ 3. จึงทำให้ว่า $(X|_{\sim A};\circ,[0]_{\sim A})$ เป็นโมนอยด์

**นิยาม 3.4.9** พีชคณิต $(L;\ \Lambda)$ จะถูกเรียกว่า กึ่งแลตทิซ (semi lattice) ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1) $x \Lambda x = x$ สำหรับ ทุก $x \in L$

2) $x \Lambda y = y \Lambda x$ สำหรับ ทุก $x, y \in L$

3) $x \Lambda (y \Lambda z) = (x \Lambda y) \Lambda z$ สำหรับ ทุก $x, y, z \in L$

จากทฤษฎีบท 3.4.2 และ ทฤษฎีบทนำ 3.4.4 (2), (5) จะได้ว่า

**ทฤษฎีบท 3.4.10** ให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็นโพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK ทีมีเงื่อนไข (S) และ $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ แล้ว $(X|_{\sim A};\circ)$ จะเป็นกึ่งแลตทิซ

ต่อไปจะกำหนด การดำเนินการอีกลักษณะหนึ่งที่ต่างไปจาก $*$ และ $\circ$ บนพีชคณิต

**นิยาม 3.4.11** ให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็นพีชคณิต BCK และ $0 \neq r \in X$ กำหนดการดำเนินการ $\Delta_r$ บน $X$ โดย $x \Delta_r y = (x * r) * y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

**ตัวอย่าง 3.4.12** ให้ $X = \{0 , a , b\}$

| $*$ | $0$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ | $0$ | $a$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $0$ |

จากตารางจะได้ว่า $\underline{X} = (X ; * , 0)$ เป็น พีชคณิต BCK

ถ้าให้ $r = a$ จะได้ว่า

| $\Delta_r$ | $0$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $0$ |

**ทฤษฎีบท 3.4.13** ให้ $\underline{X} = (X ; * , 0)$ เป็นพีชคณิต BCK และ $0 \neq r \in X$ จะได้ว่า $(X ; \Delta_r , 0)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1) $(x \,\Delta_r\, (x \,\Delta_r\, y)) \,\Delta_r\, y = 0$ BCK 2

2) $x \,\Delta_r\, x = 0$ BCK 3

3) $0 \,\Delta_r\, x = 0$ BCK 4

4) $(x \,\Delta_r\, y) \,\Delta_r\, z = (x \,\Delta_r\, z) \,\Delta_r\, y$ BCK 7

5) $(x \,\Delta_r\, y) \,\Delta_r\, x = 0$ BCK 8

6) $x \,\Delta_r\, (x \,\Delta_r\, (x \,\Delta_r\, y)) = x \,\Delta_r\, y$ BCK 9

**พิสูจน์** ให้ $x , y , z \in X$

1) พิจารณา $(x \,\Delta_r\, (x \,\Delta_r\, y)) \,\Delta_r\, y = (((x * r) * ((x * r) * y)) * r) * y$

$= (((x * r) * ((x * r) * y)) * y) * r$ โดย BCK 7

$= (((x * r) * y) * ((x * r) * y)) * r$ โดย BCK 7

$= 0 * r$ โดย BCK 3

$= 0$ โดย BCK 4

ดังนั้น $(x \, \Delta_r \, (x \, \Delta_r \, y)) \, \Delta_r \, y = 0$

2) พิจารณา $x \, \Delta_r \, x = (x * r) * x$

$= (x * x) * r$ โดย BCK 7

$= 0 * r$ โดย BCK 3

$= 0$ โดย BCK 4

ดังนั้น $x \, \Delta_r \, x = 0$

3) พิจารณา $0 \, \Delta_r \, x = (0 * r) * x$

$= 0$ โดย BCK 4

ดังนั้น $0 \, \Delta_r \, x = 0$

4) พิจารณา $(x \, \Delta_r \, y) \, \Delta_r \, z = (((x * r) * y) * r) * z$

$= (((x * r) * y) * z) * r$ โดย BCK 7

$= (((x * r) * z) * y) * r$ โดย BCK 7

$= (((x * r) * z) * r) * y$ โดย BCK 7

ดังนั้น $(x \, \Delta_r \, y) \, \Delta_r \, z = (x \, \Delta_r \, z) \, \Delta_r \, y$

5) พิจารณา $(x \, \Delta_r \, y) \, \Delta_r \, x = (x \, \Delta_r \, x) \, \Delta_r \, y$ โดย 4)

$= 0 \, \Delta_r \, y$ โดย 2)

$= 0$ โดย 3)

ดังนั้น $(x \, \Delta_r \, y) \, \Delta_r \, x = 0$

6) พิจารณา $x \, \Delta_r \, (x \, \Delta_r \, (x \, \Delta_r \, y)) = (x * r) * ((x * r) * ((x * r) * y))$

$= (x * r) * y$ โดย BCK 9

$$= x \, \Delta_r \, y$$

ดังนั้น $\quad x \, \Delta_r \, (x \, \Delta_r \, (x \, \Delta_r \, y)) = x \, \Delta_r \, y$

**ทฤษฎีบทนำ 3.4.14** ให้ $\underline{X} = (X;\, *,\, 0)$ **เป็นโพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK** และ $0 \neq r \in X$ จะได้ว่า $(X;\, \Delta_r,\, 0)$ จะสอดคล้องกับเงื่อนไข $((x \, \Delta_r \, y) \, \Delta_r \, (x \, \Delta_r \, z)) \, \Delta_r \, (z \, \Delta_r \, y) = 0$ BCK 1 สำหรับทุก $x, y, z \in X$

**พิสูจน์** ให้ $x, y, z \in X$

พิจารณา $((x \, \Delta_r \, y) \, \Delta_r \, (x \, \Delta_r \, z)) \, \Delta_r \, (z \, \Delta_r \, y)$

$= (((x * r) * y) \, \Delta_r \, ((x * r) * z)) \, \Delta_r \, ((z * r) * y)$

$= (((((x * r) * y) * r) * ((x * r) * z)) * r) * ((z * r) * y)$

$= (((((x * r) * y) * r) * r) * ((x * r) * z)) * ((z * r) * y)$ โดย BCK 7

$= (((((x * r) * r) * y) * r) * ((x * r) * z)) * ((z * r) * y)$ โดย BCK 7

$= (((((x * r) * r) * r) * y) * ((x * r) * z)) * ((z * r) * y)$ โดย BCK 7

$= (((x * r) * y) * ((x * r) * z)) * ((z * r) * y)$ โดย $\underline{X}$ เป็นโพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ

$= (((x * y) * r) * ((x * z) * r)) * ((z * y) * r)$ โดย BCK 7

$= (((x * y) * (x * z)) * r) * ((z * y) * r)$ โดย $\underline{X}$ เป็นโพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ

$= (((x * y) * (x * z)) * (z * y)) * r$ โดย $\underline{X}$ เป็นโพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ

$= 0 * r$ โดย BCK 1

$= 0$ โดย BCK 4

ดังนั้น $\quad ((x \, \Delta_r \, y) \, \Delta_r \, (x \, \Delta_r \, z)) \, \Delta_r \, (z \, \Delta_r \, y) = 0$

**ทฤษฎีบทนำ 3.4.15** ให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็นพีชคณิต BCK , $A \subseteq X$ และ $0 \neq r \in A$ ถ้า $A$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ แล้ว $A$ เป็นไอดีลบน $(X;\ \Delta_r,\ 0)$

**พิสูจน์** ให้ $A$ เป็นไอดีลบน $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$

1) เนื่องจาก $0 \in A$

2) ให้ $x\,\Delta_r\,y,\ y \in A$

จะได้ว่า $x\,\Delta_r\,y = (x * r) * y \in A$

เนื่องจาก $y \in A$ และ $A$ เป็นไอดีลบน $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$

ดังนั้น $x * r \in A$

เนื่องจาก $r \in A$ และ $A$ เป็นไอดีลบน $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$

ดังนั้น $x \in A$

จาก 1) และ 2) จะได้ว่า $A$ เป็นไอดีลบน $(X;\ \Delta_r,\ 0)$

**ทฤษฎีบทนำ 3.4.16** ให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็นพีชคณิต BCK , $A \subseteq X$ และ $0 \neq r \in A$ ถ้า $A$ เป็นไอดีลบน $(X;\ \Delta_r,\ 0)$ แล้ว $a\,\Delta_r\,b \in A$ สำหรับทุก $a, b \in A$

**พิสูจน์** ให้ $a,\ b \in A$

พิจารณา $(a\,\Delta_r\,b)\,\Delta_r\,a = (a\,\Delta_r\,a)\,\Delta_r\,b$ BCK 7

$= 0\,\Delta_r\,b$ BCK 3

$= 0$ BCK 4

ดังนั้น $(a\,\Delta_r\,b)\,\Delta_r\,a \in A$ เนื่องจาก $a \in A$ และ $A$ เป็นไอดีลบน $(X;\ \Delta_r,\ 0)$

นั่นคือ $a\,\Delta_r\,b \in A$

**ทฤษฎีบทนำ 3.4.17** ให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็นโพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK , $A \subseteq X$ และ $0 \neq r \in A$ จะได้ว่า ถ้า $A$ เป็นไอดีลบน $(X;\ \Delta_r,\ 0)$ แล้ว $A$ จะเป็นไอดีลบน $\underline{X}$

**พิสูจน์** ให้ $A$ เป็นไอดีลบน $(X;\ \Delta_r,\ 0)$

1) เนื่องจาก $0 \in A$

2) ให้ $x * y,\ y \in A$

จะได้ว่า $(x * y)\ \Delta_r\ r \in A$ โดย ทฤษฎีบทนำ 3.4.16 และ $r \in A$

พิจารณา $(x * r) * y = (x * y) * r$

$= ((x * y) * r) * r$ โดย $\underline{X}$ เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ

$= (x * y)\ \Delta_r\ r \in A$

ดังนั้น $x\ \Delta_r\ y = (x * r) * y \in A$

เนื่องจาก $y \in A$ และ $A$ เป็นไอดีลบน $(X;\ \Delta_r,\ 0)$

ดังนั้น $x \in A$

จาก 1) และ 2) จะได้ว่า $A$ เป็นไอดีลบน $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$

จาก ทฤษฎีบทนำ 3.4.15 และ 3.4.17 จะได้ว่า

**ทฤษฎีบท 3.4.18** ให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK , $A \subseteq X$ และ $0 \neq r \in A$ จะได้ว่า $A$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ ก็ต่อเมื่อ $A$ เป็นไอดีลบน $(X;\ \Delta_r,\ 0)$

ต่อไปจะกำหนดการดำเนินการ ${}_k\Delta_r$ ซึ่งเป็นแบบที่ทั่วไป ของ $\Delta_r$

**นิยาม 3.4.19** ให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็นพีชคณิต BCK และ $0 \neq r \in X$ กำหนดการดำเนินการ ${}_k\Delta_r$ บน $X$ เมื่อ k = 1,2,3......

โดย $x\ {}_k\Delta_r\ y = ((\ldots\ldots(((x * r) * y) * r) * y\ldots\ldots) * r) * y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

r (k ครั้ง)

**ทฤษฎีบท 3.4.20** ให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็นพีชคณิต BCK และ $0 \neq r \in X$ จะได้ว่า $(X;\ {}_k\Delta_r,\ 0)$ เมื่อ k = 1,2,3...... สอดคล้องกับเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1) $x\ {}_k\Delta_r\ x = 0$, BCK 3

2) $0\ {}_k\Delta_r\ x = 0$, BCK 4

3) $(x * y)\ {}_k\Delta_r\ z = (x\ {}_k\Delta_r\ z) * y$,

4) $(x\ {}_k\Delta_r\ y)\ {}_k\Delta_r\ z = (x\ {}_k\Delta_r\ z)\ {}_k\Delta_r\ y$, BCK 7

5) $(x\ {}_k\Delta_r\ y)\ {}_k\Delta_r\ x = 0$, BCK 8

6) $(x\ {}_k\Delta_r\ (x\ {}_r\Delta_r\ y))\ {}_k\Delta_r\ y = 0$ BCK 2

**พิสูจน์** ใช้วิธีการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

1) $x\ {}_k\Delta_r\ x = 0$ สำหรับ k = 1,2,3,......... BCK 3

ให้ P(k) คือ $x\ {}_k\Delta_r\ x = 0$

I ) P(1) เป็น จริง โดยทฤษฎีบท 3.4.13 (2)

II ) สมมติให้ P(m) เป็นจริง สำหรับบาง $m \geq 1$ ดังนั้น $x\ {}_m\Delta_r\ x = 0$

III ) จะแสดง P(m + 1) เป็นจริง

พิจารณา $x\ {}_{m+1}\Delta_r\ x = ((x\,{}_m\Delta_r x) * r) * x$

$= (0 * r) * x$ จาก II )

$= 0$ โดย BCK 4

ดังนั้น P(m+1) เป็นจริง

นั่นคือ P(k) เป็นจริง สำหรับทุก k = 1,2,3,......

2) $0 \ _k\Delta_r \ x = 0$ สำหรับ k = 1,2,3,......... BCK 4

ให้ P(k) คือ $0 \ _k\Delta_r \ x = 0$

I ) P(1) เป็น จริง โดยทฤษฎีบท 3.4.13 (3)

II ) สมมติให้ P(m) เป็นจริง สำหรับบาง $m \geq 1$ ดังนั้น $0 \ _m\Delta_r \ x = 0$

III ) จะแสดง P(m+1) เป็นจริง

พิจารณา $0 \ _{m+1}\Delta_r \ x = ((0_m\Delta_r x) * r) * x$

$= (0 * r) * x$ จาก II )

$= 0$ โดย BCK 4

ดังนั้น P(m+1) เป็นจริง

นั่นคือ P(k) เป็นจริง สำหรับทุก k = 1,2,3,......

3) $(x * y) \ _k\Delta_r \ z = (x \ _k\Delta_r \ z) * y$ สำหรับ k = 1,2,3........

ให้ P(k) คือ $(x * y) \ _k\Delta_r \ z = (x \ _k\Delta_r \ z) * y$

I ) P(1) เป็นจริง เพราะ

$(x * y) \ \Delta_r \ z = ((x * y) * r) * z$

$= ((x * r) * y) * z$ โดย BCK 7

$= ((x * r) * z) * y$ โดย BCK 7

$= (x \ \Delta_r \ z) * y$

II ) สมมติให้ P(m) เป็นจริง สำหรับบาง $m \geq 1$ ดังนั้น $(x * y) \ _m\Delta_r \ z = (x \ _m\Delta_r \ z) * y$

III ) จะแสดงว่า P(m+1) เป็นจริง

พิจารณา $(x * y) \ _{m+1}\Delta_r \ z = (((x * y) \ _m\Delta_r \ z) * r) * z$

$= (((x \ _m\Delta_r \ z) * y) * r) * z$ จาก II )

$= (((x\ {}_m\Delta_r\ z) * r) * y) * z$ โดย BCK 7

$= (((x\ {}_m\Delta_r\ z) * r) * z) * y$ โดย BCK 7

$= (x\ {}_{m+1}\Delta_r\ z) * y$

ดังนั้น P(m + 1) เป็นจริง

นั่นคือ P(k) เป็นจริง สำหรับทุก k = 1,2,3..........

4) $(x\ {}_k\Delta_r\ y)\ {}_k\Delta_r\ z = (x\ {}_k\Delta_r\ z)\ {}_k\Delta_r\ y$ สำหรับ k = 1,2,3,......... BCK 7

ให้ P(k) คือ $(x\ {}_k\Delta_r\ y)\ {}_k\Delta_r\ z = (x\ {}_k\Delta_r\ z)\ {}_k\Delta_r\ y$

I ) P(1) เป็น จริง โดยทฤษฎีบท 3.4.13 (4)

II ) สมมติให้ P(m) เป็นจริง สำหรับบาง $m \geq 1$ ดังนั้น $(x\ {}_m\Delta_r\ y)\ {}_m\Delta_r\ z = (x\ {}_m\Delta_r\ z)\ {}_m\Delta_r\ y$

III ) จะแสดง P(m + 1) เป็นจริง

พิจารณา $(x\ {}_{m+1}\Delta_r\ z)\ {}_{m+1}\Delta_r\ y = (((((x\ {}_m\Delta_r\ z) * r) * z)\ {}_m\Delta_r\ y) * r) * y$

$= (((((x_m\Delta_r z) * r)_m\Delta_r y) * z) * r) * y$ จาก 3)

$= (((((x_m\Delta_r z)_m\Delta_r y) * r) * z) * r) * y$ จาก 3)

$= (((((x_m\Delta_r y)_m\Delta_r z) * r) * z) * r) * y$ โดย II )

$= (((x_m\Delta_r y)_m\Delta_{r+1} z) * r) * y$

$= (((x_m\Delta_r y) * r)_{m+1}\Delta_r z) * y$ จาก 3)

$= (((x_m\Delta_r y) * r) * y)_{m+1}\Delta_r z$ จาก 3)

$= (x\ {}_{m+1}\Delta_r\ y)\ {}_{m+1}\Delta\ z$

ดังนั้น P(m + 1) เป็นจริง

นั่นคือ P(k) เป็นจริง สำหรับทุก k = 1,2,3,......

จาก 1) , 2) และ 4) จะได้ว่า 5) $(x\ {}_k\Delta_r\ y)\ {}_k\Delta_r\ x = 0$ , BCK 8

6) $(x\ {}_k\Delta_r\ (x\ {}_r\Delta_r\ y))\ {}_k\Delta_r\ y = 0$ BCK 2

**ทฤษฎีบทนำ 3.4.21** ให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็น พีชคณิต BCK , $A \subseteq X$ และ $0 \neq r \in A$ ถ้า $A$ เป็นไอดีลบน $(X;\ {}_k\Delta_r,\ 0)$ แล้ว $a\ {}_k\Delta_r\ b \in A$ สำหรับทุก $a, b \in A$ เมื่อ k = 1,2,....

**พิสูจน์** ใช้วิธีการอุปนัยเชิงคณิตสาสตร์

ให้ $A$ เป็นไอดีล บน $(X;\ {}_k\Delta_r, 0)$ , $a, b \in A$ และ

P(k) คือ $a\ {}_k\Delta_r\ b \in A$

I) P(1) เป็น จริง โดย ทฤษฎีบท 3.4.16

II) สมมติให้ P(m) เป็น จริง สำหรับบาง $m \geq 1$ นั่นคือ $a\ {}_m\Delta_r\ b \in A$

III) จะแสดงว่า P( m +1) เป็นจริง

พิจารณา $(a\ {}_{m+1}\Delta_r\ b)\ {}_{m+1}\Delta_r\ a = (a\ {}_{m+1}\Delta_r\ a)\ {}_{m+1}\Delta_r\ b$

$$= 0\ {}_{m+1}\Delta_r\ b$$

$$= 0 \in A$$

เนื่อง $a \in A$ และ $A$ เป็น ไอดีล ของ $(X;\ {}_k\Delta_r,\ 0)$ เมื่อ k = 1,2,3...

นั่นคือ $a\ {}_{m+1}\Delta_r\ b \in A$

ดังนั้น P(m +1) เป็น จริง

นั่นคือ P(k) เป็น จริง ทุก k = 1,2,3.......

**ข้อสังเกต 3.4.22** ถ้า $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็นโพซิทีฟอิมเคทีฟ พีชคณิต BCK แล้ว

1) $x\ {}_k\Delta_r\ y = x\ \Delta_r\ y$ สำหรับ ทุก k =1,2,3,.....

2) $(X;\ {}_k\Delta_r,\ 0)$ จะสอดคล้องกับ BCK 1 : $((x\ {}_k\Delta_r\ y)\ {}_k\Delta_r\ (x\ {}_k\Delta_r\ z))\ {}_k\Delta_r\ (z\ {}_k\Delta_r\ y) = 0$

**ทฤษฎีบท 3.4.23** ถ้า $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน พีชคณิต BCK $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ และ $0 \neq r \in A$ แล้ว $A$ จะเป็นไอดีลบน $(X;\ {}_k\Delta_r,\ 0)$ สำหรับทุก k =1,2,3,.......

**พิสูจน์** ให้ $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน พีชคณิต BCK $\underline{X} = (X\,;\ *\ ,\ 0)$ และ $0 \neq r \in A$

ให้ P(k) คือ $A$ เป็น ไอดีลบน $(X\,;\ {}_k\Delta_r\ ,\ 0)$

I) P(1) เป็น จริง โดย ทฤษฎีบท 3.4.15

II) สมมติให้ P(m) เป็น จริง สำหรับบาง $m \geq 1$ นั่นคือ $A$ เป็น ไอดีลบน $(X\,;\ {}_m\Delta_r\ ,\ 0)$

III) จะแสดงว่า P(m +1 ) เป็นจริง

พิจารณา 1) $0 \in A$

2) ให้ $x\ {}_{m+1}\Delta_r\ y \in A$ และ $y \in A$

จะได้ว่า $x\ {}_{m+1}\Delta_r\ y = ((x\ {}_m\Delta_r\ y) * r) * y \in A$

เนื่องจาก $y \in A$ และ $A$ เป็น ไอดีล บน $\underline{X}$

ดังนั้น $(x\ {}_m\Delta_r\ y) * r \in A$

เนื่องจาก $r \in A$ และ $A$ เป็น ไอดีลบน $\underline{X}$

ดังนั้น $x\ {}_m\Delta_r\ y \in A$ และ $y \in A$

จาก II) จะได้ว่า $A$ เป็น ไอดีลบน $(X\,;\ {}_m\Delta_r\ ,\ 0)$

จึงทำให้ได้ว่า $x \in A$

ดังนั้น P(m+1) เป็น จริง

นั่นคือ P(k) เป็น จริง ทุก k = 1,2,3....

**ทฤษฎีบทแทรก 3.4.24** ให้ $\underline{X} = (X\,;\ *\ ,\ 0)$ เป็นโพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK , $A \subseteq X$ และ $0 \neq r \in A$ ถ้า $A$ เป็นไอดีลบน $(X\,;\ {}_k\Delta_r\ ,\ 0)$ แล้ว $A$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$

**พิสูจน์** ให้ $A$ เป็นไอดีลบน $(X\,;\ {}_k\Delta_r\ ,\ 0)$

เนื่องจาก $\underline{X}$ เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK

ดังนั้น $x\ {}_k\Delta_r\ y = x\ \Delta_r\ y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

โดย ทฤษฎีบท 3.4.17 ดังนั้น $A$ เป็นไอดีลของ $\underline{X}$

จาก ทฤษฎีบท 3.4.23 และ ทฤษฎีบทแทรก 3.4.24 จะได้ว่า

**ทฤษฎีบทแทรก 3.4.25** ให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK , $A \subseteq X$ และ $0 \neq r \in A$ จะได้ว่า $A$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ ก็ต่อเมื่อ $A$ เป็นไอดีลบน $(X;\ {}_k\Delta_r,\ 0)$ สำหรับ ทุก k = 1,2,3........

**3.5 $(X|_{\sim A}\,;\,\cdot\,,[0]_{\sim A})$ เป็นพีชคณิต BCK เมื่อ $\cdot$ เป็นการดำเนินการที่แตกต่างจาก $*$**

ในหัวข้อนี้จะแสดงถึงเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่ทำให้ $(X|_{\sim A}\,;\,\cdot\,,[0]_{\sim A})$ เป็นพีชคณิตBCK เมื่อ $\cdot$ เป็นการดำเนินการที่แตกต่างจาก $*$

**ทฤษฎีบท 3.5.1** ให้ $\underline{X}=(X;\,*\,,\,0)$ เป็นโพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK ที่มีเงื่อนไข (S) และ $A\subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ จะได้ว่า $(X|_{\sim A}\,;\circ\,,[0]_{\sim A})$ เป็นพีชคณิต BCK ก็ต่อเมื่อ $A=X$

**พิสูจน์** ($\Rightarrow$) ให้ $(X|_{\sim A};\circ,[0]_{\sim A})$ เป็นพีชคณิต BCK

ดังนั้น $[0]_{\sim A}\circ[x]_{\sim A}=[0]_{\sim A}$

แต่ $[0]_{\sim A}\circ[x]_{\sim A}=[x]_{\sim A}$ โดย ทฤษฎีบท 3.4.7

ดังนั้น $[0]_{\sim A}=[x]_{\sim A}$

$\Rightarrow 0\sim_A x$

$\Rightarrow 0*x=0,\ x*0=x\in A$

ดังนั้น $X\subseteq A$

แต่ $A\subseteq X$ ดังนั้น $A=X$

($\Leftarrow$) ให้ $A=X$

จะได้ว่า $[0]_{\sim A}=A=X$ โดย ทฤษฎีบท 3.2.8

ดังนั้น $X|_{\sim A}=\{[0]_{\sim A}\}$ สำหรับทุก $x\in X$

ดังนั้น $(X|_{\sim A};\circ,[0]_{\sim A})$ มีเงื่อนไขตาม BCK 1 ถึง BCK 5

นั่นคือ $(X|_{\sim A};\circ,[0]_{\sim A})$ เป็นพีชคณิต BCK

**นิยาม 3.5.2** ให้ $\underline{X}=(X;\,*\,,\,0)$ เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK, $A\subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ และ $r\neq 0\in A$ กำหนดการดำเนินการ $\Delta_r$ บน $X|_{\sim A}$ โดย

$$[x]_{\sim A}\,\Delta_r\,[y]_{\sim A}=[x\Delta_r y]_{\sim A} \qquad \text{เมื่อ} \quad [x]_{\sim A}\,,\,[y]_{\sim A}\in X|_{\sim A}$$

ต้องการแสดงว่า $\Delta_r$ เป็นการดำเนินการใช้ได้ ( well-defined )

ให้ $[x]_{\sim A}=[u]_{\sim A}$ และ $[y]_{\sim A}=[v]_{\sim A}$

ดังนั้น $x\sim_A u$ และ $y\sim_A v$

จะได้ว่า $x*u\,,\,u*x\in A$ และ $y*v\,,\,v*y\in A$

พิจารณา $((x\,\Delta_r\,y)*(u\,\Delta_r\,y))*(x\,\Delta_r\,u)$

$=(((x*r)*y)*((u*r)*y))*((x*r)*u)$

$=(((x*y)*r)*((u*y)*r))*((x*u)*r)$ โดย BCK7

$=(((x*y)*(u*y))*r)*((x*u)*r)$ โดย $\underline{X}$ เป็นโพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ

$=(((x*y)*(u*y))*(x*u))*r$ โดย $\underline{X}$ เป็นโพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ

$=0*r$ โดย BCK 1

$=0$ โดย BCK 4

ดังนั้น $((x\,\Delta_r\,y)*(u\,\Delta_r\,y))*(x\,\Delta_r\,u)=0\in A$

เนื่องจาก $x\,\Delta_r\,u=(x*r)*u=(x*u)*r\in A$ โดย ทฤษฎีบท 3.1.3 (1)

จาก $((x\,\Delta_r\,y)*(u\,\Delta_r\,y))*(x\,\Delta_r\,u)\in A$ และ $x\,\Delta_r\,u\in A$

ดังนั้น $(x\,\Delta_r\,y)*(u\,\Delta_r\,y)\in A$..........................................(*)

ทำนองเดียวกัน $((u\,\Delta_r\,y)*(x\,\Delta_r\,y))*(u\,\Delta_r\,x)=0\in A$

เนื่องจาก $u\,\Delta_r\,x=(u*r)*x=(u*x)*r\in A$ โดย ทฤษฎีบท 3.1.3(1)

จาก $((u\,\Delta_r\,y)*(x\,\Delta_r\,y))*(u\,\Delta_r\,x)\in A$ และ $u\,\Delta_r\,x\in A$

ดังนั้น $(u\,\Delta_r\,y)*(x\,\Delta_r\,y)\in A$..........................................(**)

จาก (*) และ (**) จะได้ว่า $(x\,\Delta_r\,y)\sim_A(u\,\Delta_r\,y)$

ทำนองเดียวกันจะพิสูจน์ จะได้ว่า $(u\,\Delta_r\,y)\sim_A(u\,\Delta_r\,v)$

จาก คุณสมบัติถ่ายทอดของ $\sim_A$ จะได้ว่า $(x \, \Delta_r \, y) \sim_A (u \, \Delta_r \, v)$

ดังนั้น $[x\Delta_r y]_{\sim A} = [u\Delta_r v]_{\sim A}$

**ตัวอย่าง 3.5.3** ให้ $X = \{0 , a , b\}$

| $*$ | $0$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $a$ | $a$ | $0$ | $0$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $0$ |

จากตารางจะได้ว่า $\underline{X} = (X ; * , 0)$ เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK

และ $A = \{0 , a\}$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$

จะได้ $[0]_{\sim A} = \{0 , a\} = [a]_{\sim A}$ ,

$[b]_{\sim A} = \{b\}$

ถ้าให้ $r = a \in A$ จะได้

| $\Delta_r$ | $[0]_{\sim A}$ | $[b]_{\sim A}$ |
|---|---|---|
| $[0]_{\sim A}$ | $[0]_{\sim A}$ | $[0]_{\sim A}$ |
| $[b]_{\sim A}$ | $[b]_{\sim A}$ | $[0]_{\sim A}$ |

**ทฤษฎีบท 3.5.4** ให้ $\underline{X} = (X ; * , 0)$ เป็นโพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK , $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ และ $r \neq 0 \in A$ จะได้ว่า $(X|_{\sim A}; \Delta_r, [0]_{\sim A})$ เป็น พีชคณิต BCK

**พิสูจน์** จาก ทฤษฎีบท 3.4.13 ข้อ 1) , 2) และ 3) และ ทฤษฎีบทนำ 3.4.14

จะได้ว่า $(X|_{\sim A}; \Delta_r, [0]_{\sim A})$ มีเงื่อนไขตาม BCK 1 ,2 ,3 และ 4

ต่อไปจะแสดงว่า $(X|_{\sim A}; \Delta_r, [0]_{\sim A})$ มีเงื่อนไขตาม BCK 5

ให้ $[x]_{\sim A} \, \Delta_r \, [y]_{\sim A} = [0]_{\sim A} = [y]_{\sim A} \, \Delta_r \, [x]_{\sim A}$

$\Rightarrow [x\Delta_r y]_{\sim A} = [0]_{\sim A} = [y\Delta_r x]_{\sim A}$

$\Rightarrow \left[(x * r) * y\right]_{\sim A} = [0]_{\sim A} = \left[(y * r) * x\right]_{\sim A}$

$\Rightarrow ((x * r) * y) \sim_A 0$ และ $0 \sim_A ((y * r) * x)$

$\Rightarrow ((x * r) * y) * 0 , 0 * ((x * r) * y) \in A$

และ $((y * r) * x) * 0 ,\ 0 * ((y * r) * x) \in A$

$\Rightarrow (x * r) * y \in A$ และ $(y * r) * x \in A$ โดย BCK 6,4

$\Rightarrow (x * y) * r \in A$ และ $(y * x) * r \in A$ โดย BCK 7

แต่ $r \in A$

$\Rightarrow x * y \in A$ และ $y * x \in A$

$\Rightarrow x \sim_A y$

$\Rightarrow [x]_{\sim A} = [y]_{\sim A}$

ดังนั้น $(X|_{\sim A}; \Delta_r, [0]_{\sim A})$ มีเงื่อนไขตาม BCK 5

นั่นคือ $(X|_{\sim A}; \Delta_r, [0]_{\sim A})$ เป็นพีชคณิต BCK

**ทฤษฎีบทแทรก 3.5.5** ให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK , $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ และ $r \neq 0 \in A$ จะได้ว่า $(X|_{\sim A}; \Delta_r, [0]_{\sim A})$ เป็นโพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK

**พิสูจน์** จาก ทฤษฎีบท 3.5.4 จะได้ว่า $(X|_{\sim A}; \Delta_r, [0]_{\sim A})$ เป็น พีชคณิต BCK

พิจารณา $([x]_{\sim A}\ \Delta_r \left[y\right]_{\sim A})\ \Delta_r \left[y\right]_{\sim A}$

$= \left[x\Delta_r y\right]_{\sim A}\ \Delta_r \left[y\right]_{\sim A}$

$= \left[(x * r) * y\right]_{\sim A}\ \Delta_r \left[y\right]_{\sim A}$

$= \left[((x * r) * y)\Delta_r y\right]_{\sim A}$

$= \left[(((x * r) * y) * r) * y\right]_{\sim A}$

$= \left[ (((x * r) * r) * y) * y \right]_{\sim A}$ โดย BCK 7

$= \left[ ((x * r) * r) * y \right]_{\sim A}$ โดย $\underline{X}$ เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ

$= \left[ (x * r) * y \right]_{\sim A}$ โดย $\underline{X}$ เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ

$= \left[ x \Delta_r y \right]_{\sim A}$

$= [x]_{\sim A} \, \Delta_r \left[ y \right]_{\sim A}$

ดังนั้น $( X|_{\sim A}; \Delta_r, [0]_{\sim A})$ เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK

**3.6 ความเกี่ยวข้องกันระหว่าง $( X|_{\sim A}; *, [0]_{\sim A})$ กับ $( X|_{\sim A}; \circ, [0]_{\sim A})$**

ในหัวข้อสุดท้ายนี้จะแสดงให้เห็นถึงความเกี่ยวข้องกันระหว่าง $( X|_{\sim A}; *, [0]_{\sim A})$ กับ $( X|_{\sim A}; \circ, [0]_{\sim A})$

**นิยาม 3.6.1** ให้ $\underline{X}, \underline{Y}$ เป็น พีชคณิต BCK จะได้ว่า $f : X \to Y$ เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ ( homomorphism ) ก็ต่อเมื่อ $f(x * y) = f(x) * f(y)$ สำหรับ ทุก $x, y \in X$

**ทฤษฎีบทนำ 3.6.2** ให้ $\underline{X}, \underline{Y}$ เป็น พีชคณิต BCK จะได้ว่า ถ้า $\psi : X \to Y$ เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ และ $A \subseteq Y$ เป็นไอดีลบน $\underline{Y}$ แล้ว $\psi^{-1}(A)$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$

เมื่อ $\psi^{-1}(A) = \{x \in X \,/\, \psi(x) \in A\}$

**พิสูจน์** ให้ $\psi : X \to Y$ เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ และ $A \subseteq Y$ เป็นไอดีลของ $\underline{Y}$

1) เนื่องจาก $\psi(0) * \psi(0) = 0 \in A$ โดย BCK 3 และ $A$ เป็นไอดีลบน $\underline{Y}$

$\Rightarrow \psi(0 * 0) = 0 \in A$ เนื่องจาก $\psi$ เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ

$\Rightarrow \psi(0) = 0 \in A$ โดย BCK 3

ดังนั้น $0 \in \psi^{-1}(A)$

2) ให้ $y * x, x \in \psi^{-1}(A)$

$\Rightarrow \psi(y * x)\ ,\ \psi(x) \in A$

$\Rightarrow \psi(y) * \psi(x)\ ,\ \psi(x) \in A$ เนื่องจาก $\psi$ เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ

เนื่องจาก $\psi(x) \in A$ และ $A$ เป็นไอดีลบน $\underline{Y}$

ดังนั้น $\psi(y) \in A$

นั่นคือ $y \in \psi^{-1}(A)$

1) และ 2) จะได้ว่า $\psi^{-1}(A)$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$

**ทฤษฎีบท 3.6.3** ให้ $\underline{X}, \underline{Y}$ เป็นพีชคณิต BCK และ $A \subseteq Y$ เป็นไอดีลบน $\underline{Y}$ ถ้า $\psi : X \to Y$ เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ แล้ว จะมีฟังก์ชันถ่ายแบบ $f: X|_{\sim\psi^{-1}(A)} \to Y|_{\sim A}$ เพียงฟังก์ชันเดียวที่สอดคล้องกับ $\pi'\psi = f\pi$ เมื่อ $\pi : X \to X|_{\sim\psi^{-1}(A)}$ ที่กำหนดโดย $\pi(x) = [x]_{\sim\psi^{-1}(A)}$ และ $\pi' : Y \to Y|_{\sim A}$ ที่กำหนดโดย $\pi'(y) = [y]_{\sim A}$ ( $\pi, \pi'$ เรียกว่า ฟังก์ชันธรรมชาติ (natural mapping))

**พิสูจน์** ให้ $\psi : X \to Y$ เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ , $\pi(x) = [x]_{\sim\psi^{-1}(A)}$ สำหรับทุก $x \in X$ $\pi'(y) = [y]_{\sim A}$ สำหรับทุก $y \in Y$

พิจารณาแผนภาพดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi} & Y \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi' \\ X|_{\sim\psi^{-1}(A)} & \xrightarrow{f} & Y|_{\sim A} \end{array}$$

กำหนด $f: X|_{\sim\psi^{-1}(A)} \to Y|_{\sim A}$

โดย $f([a]_{\sim\psi^{-1}(A)}) = [\psi(a)]_{\sim A}$ สำหรับ ทุก $a \in X$

1) ต้องการแสดงว่า $f$ เป็นฟังก์ชัน

ให้ $[a]_{\sim\psi^{-1}(A)} = [b]_{\sim\psi^{-1}(A)}$

$\Rightarrow a \sim_{\psi^{-1}(A)} b$

$\Rightarrow a * b\,,\ b * a \in \psi^{-1}(A)$

$\Rightarrow \psi(a * b)\,,\ \psi(b * a) \in A$

$\Rightarrow \psi(a) * \psi(b)\,,\ \psi(b) * \psi(a) \in A$ เนื่องจาก $\psi$ เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ

$\Rightarrow \psi(a) \sim_A \psi(b)$

$\Rightarrow \left[\psi(a)\right]_{\sim A} = \left[\psi(b)\right]_{\sim A}$

$\Rightarrow f([a]_{\sim\psi^{-1}(A)}) = f([b]_{\sim\psi^{-1}(A)})$

ดังนั้น $f$ เป็นฟังก์ชัน

2) ต้องการแสดงว่า $f$ เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ

พิจารณา $f([a]_{\sim\psi^{-1}(A)} * [b]_{\sim\psi^{-1}(A)}) = f([a * b]_{\sim\psi^{-1}(A)})$

$= \left[\psi(a * b)\right]_{\sim A}$ เนื่องจาก $\psi$ เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ

$= \left[\psi(a) * \psi(b)\right]_{\sim A}$

$= \left[\psi(a)\right]_{\sim A} * \left[\psi(b)\right]_{\sim A}$

$= f([a]_{\sim\psi^{-1}(A)}) * f([b]_{\sim\psi^{-1}(A)})$

ดังนั้น $f$ เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ

3) ต้องการแสดงว่า $f$ สอดคล้องกับ $\pi'\psi = f\pi$

ให้ $x \in X$

พิจารณา $(\pi'\psi)(x) = \pi'(\psi(x))$

$= \left[\psi(x)\right]_{\sim A}$

$= f(\,[x]_{\sim\psi^{-1}(A)})$

$= f(\pi(x))$

$= (f\pi)(x)$

ดังนั้น $\pi' \psi = f\pi$

4) ต้องการแสดงว่า $f$ เป็นฟังก์ชันเพียงฟังก์ชันเดียวที่สอดคล้องกับ $\pi' \psi = f\pi$

ให้ $f' : X|_{\sim\psi^{-1}(A)} \to Y|_{\sim A}$ โดย $\pi' \psi = f'\pi$

พิจารณา $f'(\pi(a)) = \pi'(\psi(a))$ สำหรับ ทุก $a \in X$

$\Rightarrow f'([a]_{\sim\psi^{-1}(A)}) = [\psi(a)]_{\sim A}$

$\Rightarrow f'([a]_{\sim\psi^{-1}(A)}) = f([a]_{\sim\psi^{-1}(A)})$

ดังนั้น $f$ เป็นฟังก์ชันเพียงฟังก์ชันเดียวที่สอดคล้องกับ $\pi' \psi = f\pi$

**ทฤษฎีบท 3.6.4** ให้ $\underline{X} = (X; *, 0)$ เป็น พีชคณิต BCK ที่มีเงื่อนไข (S) และ $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ ถ้า $\psi : (X|_{\sim A}; *, [0]_{\sim A}) \to (X|_{\sim A}; \circ, [0]_{\sim A})$ เป็น ฟังก์ชันถ่ายแบบ แล้ว จะมีฟังก์ชันถ่ายแบบ $f : (X; *, 0) \to (X|_{\sim A}; \circ, [0]_{\sim A})$ เพียงฟังก์ชันเดียวที่สอดคล้องกับ $f = \psi\pi$ เมื่อ $\pi : (X; *, 0) \to (X|_{\sim A}; *, [0]_{\sim A})$ เป็น ฟังก์ชัน ธรรมชาติ

**พิสูจน์** ให้ $\psi : (X|_{\sim A}; *, [0]_{\sim A}) \to (X|_{\sim A}; \circ, [0]_{\sim A})$ เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ และ $\pi(x) = [x]_{\sim A}$ สำหรับทุก $x \in X$

พิจารณาแผนภาพดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{ccc} (X; *, 0) & & \\ \pi \downarrow & \searrow f & \\ (X|_{\sim A}; *, [0]_{\sim A}) & \xrightarrow{\psi} & (X|_{\sim A}; \circ, [0]_{\sim A}) \end{array}$$

กำหนด $f : (X; *, 0) \to (X|_{\sim A}; \circ, [0]_{\sim A})$

โดย $f(x) = \psi([x]_{\sim A})$ สำหรับ ทุก $x \in X$

1) ต้องการแสดงว่า $f$ เป็นฟังก์ชัน

ให้ $a = b$

$\Rightarrow \pi(a) = \pi(b)$

$\Rightarrow [a]_{\sim A} = [b]_{\sim A}$

$\Rightarrow \psi([a]_{\sim A}) = \psi([b]_{\sim A})$

$\Rightarrow f(a) = f(b)$

ดังนั้น $f$ เป็นฟังก์ชัน

2) ต้องการแสดงว่า $f$ เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ

ให้ $f(a * b) = \psi([a * b]_{\sim A})$

$= \psi([a]_{\sim A} * [b]_{\sim A})$

$= \psi([a]_{\sim A}) \circ \psi([b]_{\sim A})$

$= f(a) \circ f(b)$ ดังนั้น $f$ เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ

3) ต้องการแสดงว่า $f$ สอดคล้องกับ $f = \psi\pi$

ให้ $x \in X$

พิจารณา $f(x) = \psi([x]_{\sim A})$

$= \psi(\pi(x)) = (\psi\pi)(x)$

ดังนั้น $f = \psi\pi$

4) ต้องการแสดงว่า $f$ เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบเพียงฟังก์ชันเดียวที่สอดคล้องกับ $f = \psi\pi$

ให้ $f' : (X; *, 0) \to (X|_{\sim A}; \circ, [0]_{\sim A})$ โดยที่ $f' = \psi\pi$ และ $a \in X$

จะได้ว่า $f'(a) = \psi(\pi(a))$

$= \psi([a]_{\sim A})$

$= f(a)$

ดังนั้น $f'(a) = f(a)$ สำหรับทุก $a \in X$

นั่นคือ $f' = f$

ดังนั้น $f$ เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบเพียงฟังก์ชันเดียวที่สอดคล้องกับ $f = \psi\pi$

ตัวอย่างต่อไปเป็นการแสดงว่ามีฟังก์ชันถ่ายแบบจาก $(X|_{\sim A}\,;\,*\,,[0]_{\sim A})$ ไป $(X|_{\sim A}\,;\circ\,,[0]_{\sim A})$

**ตัวอย่าง 3.6.5** ให้ $\underline{X} = (X\,;\,*\,,\,0)$ เป็นพีชคณิต BCK ที่มีเงื่อนไข (S), $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$ และ $\theta : (X|_{\sim A}\,;*\,,[0]_{\sim A}) \to (X|_{\sim A}\,;\circ,[0]_{\sim A})$ โดยที่ $\theta([x]_{\sim A}) = [c]_{\sim A}$ สำหรับ บาง $c \in X$ จะได้ว่า $\theta$ เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ

**พิสูจน์** ให้ $[x]_{\sim A}\,,[y]_{\sim A} \in (X|_{\sim A}\,;*,[0]_{\sim A})$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\theta([x]_{\sim A} * [y]_{\sim A}) &= \theta([x * y]_{\sim A})\\ &= [c]_{\sim A}\\ &= [c \circ c]_{\sim A}\\ &= [c]_{\sim A} \circ [c]_{\sim A}\\ &= \theta([x]_{\sim A}) \circ \theta([y]_{\sim A})\end{aligned}$$

ดังนั้น $\theta$ จึงเป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ

**ข้อสังเกต 3.6.6** ให้ $\underline{X} = (X\,;\,*\,,\,0)$ เป็น พีชคณิต BCK ที่มีเงื่อนไข (S) และ $i : (X|_{\sim A};*,[0]_{\sim A}) \to (X|_{\sim A};\circ,[0]_{\sim A})$ เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ จะได้ว่า $i$ ไม่เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ เมื่อ $A \subseteq X$ เป็นไอดีลบน $\underline{X}$

พิจารณา
$$\begin{aligned}i([a]_{\sim A} * [b]_{\sim A}) &= i([a * b]_{\sim A})\\ &= [a * b]_{\sim A}\end{aligned}$$

$$\neq [a \circ b]_{\sim A} \quad \text{จากตัวอย่าง 3.4.6}$$

$$= [a]_{\sim A} \circ [b]_{\sim A}$$

ดังนั้น $\quad i\,([a]_{\sim A} * [b]_{\sim A}) \neq [a]_{\sim A} \circ [b]_{\sim A}$

**ข้อสังเกต 3.6.7** ให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็น พีชคณิต BCK ดังนั้น ฟังก์ชันคงที่ $f\colon \underline{X} \to \underline{X}$ ที่กำหนดโดย $f(x) = c$ สำหรับ บาง $c \in X$ จะเป็น ฟังก์ชันถ่ายแบบ ก็ต่อเมื่อ $c = 0$

**พิสูจน์** ($\Rightarrow$) ให้ $f\colon \underline{X} \to \underline{X}$ เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ และ $x, y \in X$

จาก $\quad f(x * y) = f(x) * f(y)$

ดังนั้น $\quad c = c * c$

$\quad = 0$

($\Leftarrow$) เห็นชัดว่า $f(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in X$ เป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ

**ข้อสังเกต 3.6.8** ให้ $\underline{X} = (X;\ *, 0)$ เป็น พีชคณิต BCK ที่มีเงื่อนไข (S) แล้ว ฟังก์ชันคงที่ $f\colon (X;\ *,\ 0) \to (X;\ \circ,\ 0)$ ที่กำหนดโดย $f(x) = c$ สำหรับทุก $x \in X$ เมื่อ $c \in X$ จะเป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ

**พิสูจน์** ให้ $c \in X$ และกำหนด $f(x) = c$ สำหรับทุก $c \in X$ และ

จาก ทฤษฎีบท 3.4.2 จะได้ว่า $c \circ c = c$ สำหรับทุก $c \in X$

ดังนั้น $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$ แสดงว่า $f$ เป็น ฟังก์ชันถ่ายแบบ

จากข้อสังเกต 3.6.6 จะเห็นได้ว่า

**ข้อสักเกต 3.6.9** ให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็น พีชคณิต BCK ที่มีเงื่อนไข (S) จะเห็นได้ว่า ฟังก์ชัน เอกลักษณ์ $i : (X;\ *,\ 0) \to (X;\ \circ,\ 0)$ ไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันถ่ายแบบ