บทที่ 4

พีชคณิตอนุพัทธ์อย่างอ่อนที่มาจากพีชคณิต BCK

(Algebras weakly derived from BCK-algebras)

เนื่องจาก พีชคณิต $(X;\ \Delta_r, 0)$ และ $(X;\ {}_k\Delta_r,\ 0)$ ที่ศึกษาในบทที่ 3 เป็นพีชคณิตอนุพัทธ์อย่างอ่อน จึงได้รวบรวมเฉพาะส่วนนี้มาเขียนไว้เป็นคุณสมบัติของพีชคณิตอนุพัทธ์อย่างอ่อน

นิยาม 4.1 ให้ $\underline{X} = (X;\ *, 0)$ เป็นพีชคณิต BCK และ $Y_2 = \{x,y\}$
นิยาม ไบนารี่ BCK-โพลิโนเมียล (binary BCK- polynomial) บน $\underline{X}$ โดย

1) x, y เป็น ไบนารี่ BCK-โพลิโนเมียล

2) c เป็น ไบนารี่ BCK-โพลิโนเมียล สำหรับทุก $c \in X$

3) ถ้า p_1, p_2 เป็น ไบนารี่ BCK-โพลิโนเมียล แล้ว $p_1 * p_2$ เป็น ไบนารี่ BCK-โพลิโนเมียล

เมื่อ $*$ เป็นแค่ สัญลักษณ์การดำเนินการไบนารี่ (binary operation symbol) บน $P(Y_2)$
เมื่อ $P(Y_2)$ เป็นเซตของ ไบนารี่ BCK-โพลิโนเมียล ทั้งหมด

นิยาม 4.2 ฟังก์ชัน $\sigma : \{*, 0\} \to P(Y_2)$ โดยที่ $\sigma(0) = 0$ จะถูกเรียกว่า
BCK-ไฮเพอร์สับสทิทิวชันอ่อน (weak BCK- hypersubstitution)

นิยาม 4.3 ให้ $\underline{X} = (X;\ *,\ 0)$ เป็น พีชคณิต BCK และ $\sigma : \{*, 0\} \to P(Y_2)$
เป็น BCK-ไฮเพอร์ซับสทิทิวชันอ่อน เราจะเรียก $\sigma\left[\underline{X}\right] = (X;\ \sigma(*),\ 0)$ ว่า
พีชคณิตอนุพัทธ์อย่างอ่อน (weakly derived algebra) ของ $\underline{X}$ โดย σ

หมายเหตุ ถ้าให้ $\underline{X} = (X\,;\,\cdot)$ เป็น พีชคณิต ชนิด (2) แล้ว $P(Y_2)$ ในนิยาม 4.1 โดยยกเว้นเงื่อนไขข้อ 2 จะเรียกว่าเซตของไบนารี่เทอม และฟังก์ชัน $\sigma : \{\,\cdot\,\} \to P(Y_2)$ จะถูกเรียกว่าไฮเพอร์สับสทิทิวชัน (hypersubstitution)

และ จะเรียก พีชคณิต $(X\,;\,\sigma(\cdot))$ ว่า พีชคณิตอนุพัทธ์ (derived algebra) ที่มาจาก $\underline{X}$

ทฤษฎีบท 4.4 ให้ $\underline{X} = (X\,;\,*\,,\,0)$ เป็นพีชคณิต BCK และ $0 \neq r \in X$
นิยาม ไบนารี่ BCK-โพลิโนเมียล ของรูปแบบ $p_k(x, y)$ โดยวิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์ ดังต่อไปนี้

1) $p_1(x,y) = (x * r) * y$

2) ถ้า $p_k(x,y)$ ถูกกำหนดมา แล้ว จะได้ว่า $p_{k+1}(x,y) = (p_k(x,y) * r) * y$

ให้ $P_r(Y_2) = \{\, p_k(x,y) \,/\, k \in N^+ \,\}$ จะได้ว่า

สำหรับ $p(x,y)$ ใน $P_r(Y_2)$ จะสอดคล้องคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. $p(p(x,p(x,y)),y) = 0$ BCK 2
2. $p(x,x) = 0$ BCK 3
3. $p(0,x) = 0$ BCK 4
4. $p(p(x,y),z) = p(p(x,z),y)$ BCK 7
5. $p(p(x,y),x) = 0$ BCK 8 เมื่อ $p(x,y) \in P_r(Y_2)$

พิสูจน์ ทำนองเดียวกันกับ ทฤษฎีบท 3.4.20

ข้อสังเกต 4.5 ถ้า $\underline{X} = (X\,;\,*\,,\,0)$ เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK แล้ว

$p_k(x,y) = p_1(x,y)$ สำหรับ $k \in N^+$

ทฤษฎีบท 4.6 ถ้า $\underline{X} = (X;\ *, 0)$ เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK แล้ว p_1 จะสอดคล้อง $p_1(p_1(p_1(x,y),p_1(x,z)),p_1(z,y)) = 0$ BCK 1

พิสูจน์ ทำนองเดียวกันกับ ทฤษฎีบท 3.4.14

จาก ทฤษฎีบท 4.4 และทฤษฎีบท 4.6 จะได้ว่า

ทฤษฎีบท 4.7 ถ้า $\underline{X} = (X;\ *, 0)$ เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK แล้ว พีชคณิตอนุพัทธ์อย่างอ่อน $\sigma_{p_k}\left[\underline{X}\right] = (X;\ p_k(x,y),\ 0)$ จะสอดคล้องกับคุณสมบัติดังต่อไปนี้ BCK 1 , 2 , 3 , 4 , 7 และ 8 เมื่อ $\sigma_{p_k}(*) = p_k(x,y)$

ทฤษฎีบท 4.8 ให้ $\underline{X} = (X;\ *, 0)$ เป็น โพซิทีฟอิมพลิเคทีฟ พีชคณิต BCK , $\phi \neq A \subseteq X$ และ $0 \neq r \in A$ ดังนั้น A เป็น ไอดีลบน $\underline{X}$ ก็ต่อเมื่อ A เป็น ไอดีลบน พีชคณิตอนุพัทธ์อย่างอ่อน $\sigma_{p_1}\left[\underline{X}\right]$

พิสูจน์ ทำนองเดียวกันกับ ทฤษฎีบทแทรก 3.4.25